

TIØ 4700
Investering, finans og økonomistyring

PRODUKSJONSPLANLEGGING, VANNKRAFT

NTNU
Institutt for industriell økonomi og
teknologiledelse
Desember 2003

Rune Bruøygard
Cato Larsen

Forord

Denne prosjektoppgaven har blitt utført ved Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse, Norges teknisk- naturvitenskapelige universitet, høsten 2003. Rapporten er utarbeidet i faget TIØ 4700, Investering, finans og økonomistyring, fordypningsemne.

Vi har hatt god hjelp fra eksterne bidragsytere i løpet av prosjektet, og vi vil gjerne rette en takk til Grete Westerberg og Norsk Hydro Energi for tilgang på systemdata og tilsigsdata. Vi ønsker også takke Espen Brevik fra M3 Kraft/APX for hjelp med markedsdata. Sist og ikke minst vil vi rette en stor takk til vår veileder Stein-Erik Fleten for god hjelp i hele prosjektperioden.

Trondheim, 8.desember 2003

Cato Larsen

Rune Bruøygard

Sammendrag

Denne prosjektoppgaven omhandler produksjonsplanlegging i vannkraftindustrien. En vannkraftprodusents dilemma er hvordan vannressursen skal benyttes og det fundamentale spørsmålet er om det skal produseres i dag, eller om vannet skal spares til senere i påvente av bedre priser. Ut i fra en prognose på fremtidig pris og tilsig, så er det opp til kraftprodusenten å vurdere når en skal produsere. Den tradisjonelle løsningen på produksjonsplanleggingsproblemet er å optimere forventet profitt. Denne oppgaven har belyst implikasjoner ved å maksimere markedsverdi i stedet.

Et verdimaksimerende foretak vil benytte seg av markedsprisene fra det finansielle markedet som input i produksjonsoptimeringen, mens et profittmaksimerende foretak vil benytte forventet spotpriser. Teoridelen viser at under forutsetning av kompletthet så vil det eksistere en entydig sammenheng mellom forventet spotpris og markedsprisen, gitt av markedsprisen på risiko. Dermed vil bruk av markedsprisene sørge for at de fremtidige prisene på ethvert tidspunkt er justert for denne risikoen, mens spotprognosene ikke har denne justeringen.

Forventet spotpriser er som regel en prisprognose, som i denne oppgaven er basert på EMPS-modellens scenarier om fremtidige priser. Ut ifra disse prisene har vi estimert volatilitet, og laget en prisscenarioer basert på en binomisk modell over fire perioder. En lignende prisrekke er generert for markedspriser, men her er det benyttet volatilitetsestimat basert på implisitte volatiliteter og en volatilitetsmodell for forwardkurver fra Koekebakker og Ollmar(2001).

Vi har ved hjelp av modellen forsøkt å få frem ulikheter i produksjonsstrategi ved bruk av spotprisprognoser og markedspriser. Det er testet med utgangspunkt i uke 17 og uke 40 i 2001 med periodelenge på blokker av fire uker, eller sesonger. Resultatene viser at produksjonsstrategiene ikke blir identiske. Som følge av ulike volatilitetsbeskrivelser, og dermed ulike prisscenarioer, blir vannverdivurderingen for de to alternativene ulike. Spesielt i uke 40 viste resultatene at det ble en betydelig forskjell i produksjonsplanene. At forskjellen er større her forklarer vi med at det relativt lave tilsiget i denne perioden gir optimeringsmodellen større handlefrihet, og følgelig åpner for ulike strategier i større grad.

Vi har konkludert med at de to metodene for prognosering av fremtidig pris, gir ulik produksjonsstrategi. Bakgrunnen for denne forskjellen ligger i de to metodenes beskrivelse av risikoen i form av volatilitetsmålene. En sammenligning av volatilitetene viser at spotprognosen til tider gir betydelig andre verdier på volatiliteten i pris, enn det som gjenspeiles i markedet gjennom de implisitte volatiliteter.

FORORD.....	I
SAMMENDRAG	II
1 INNLEDNING.....	1
2 MARKEDSBESKRIVELSE	2
2.1 DET FYSISKE MARKEDET	2
2.1.1 <i>Egenskaper ved spotprisen</i>	3
2.2 DET FINANSIELLE MARKEDET	4
3 PRODUKSJONSPLANLEGGINGSPROBLEMET	7
3.1 PROBLEMFORMULERING	7
3.1.1 <i>EMPS-modellen</i>	8
3.1.2 <i>Forskjellen på optimering av forventet profitt og markedsverdi</i>	8
3.2 MATEMATISK BESKRIVELSE AV PROBLEMET	9
3.2.1 <i>Vannverdier</i>	11
3.2.2 <i>Verdien av sluttmagasin</i>	11
3.3 PRIS.....	12
3.3.1 <i>Estimering av fremtidige markedspriser</i>	12
3.3.2 <i>Prismodellen</i>	13
3.4 TILSIG	14
3.4.1 <i>Beskrivelse av tilsigserier</i>	14
3.4.2 <i>Tilsigsmodellen</i>	14
3.4.3 <i>Konsekvenser for modellering av tilsig</i>	15
3.4.4 <i>Korrelasjonen mellom pris og tilsig</i>	15
3.4.5 <i>Hydrologisk balanse</i>	16
3.5 LØSNINGSALGORITMER FOR PRODUKSJONSPLANLEGGINGSPROBLEMET	17
4 TEORETISK GRUNNLAG.....	18
4.1 PRISMODELLERING	18
4.1.1 <i>Prismodellering – kontinuerlig tid</i>	18
4.1.2 <i>Prismodellering – diskret tid</i>	19
4.1.3 <i>Forutsetninger og implikasjoner i en binomisk fremstilling</i>	20
4.1.4 <i>Markedspris på risiko</i>	21
4.1.5 <i>Sammenhengen mellom forwardpris og spotpris</i>	22
4.1.6 <i>Justering for risiko</i>	24
4.1.7 <i>Kompletthet i markedet</i>	25
4.2 VOLATILITET.....	26
4.2.1 <i>Historisk volatilitet</i>	28
4.2.2 <i>Implisitt volatilitet</i>	29
4.2.3 <i>Terminstruktur i de implisitte volatilitetene</i>	30
4.2.4 <i>Volatilitetsmodeller</i>	31
5 MODELLEN	33
5.1 MODELLBESKRIVELSE.....	33
5.1.1 <i>Forutsetninger gjort i modelleringen</i>	33
5.1.2 <i>Optimering</i>	34
5.2 MODELLERING AV PRIS VED HJELP AV BINOMISK TRE	36
5.2.1 <i>Utspenning av tre for terminpriser</i>	36
5.2.2 <i>Utspenning av tre for forventet spotprognose</i>	38

5.3	BEHANDLING AV TILSIG I MODELLEN	38
5.4	TESTING AV DATAGRUNNLAG	39
5.4.1	<i>Testing av prisprognoser</i>	39
5.4.2	<i>Testing av tilsigsserier</i>	40
6	DISKUSJON AV RESULTATER	41
6.1	PRISUTVIKLING OG PRODUKSJONSSTRATEGI	41
6.2	VOLATILITET	43
6.3	KONSEKVENSER VED DEFINERING AV SLUTTMAGASIN	44
6.3.1	<i>Modellens håndtering av restriksjonen</i>	45
6.3.2	<i>Produksjonsstrategien</i>	46
7	EVALUERING OG UTBEDRING AV MODELLEN	48
8	REFERANSER	50
	VEDLEGG 1: SDDP ALGORITME	53
	VEDLEGG 2: BESKRIVELSE AV SIMULERINGSSCENARIENE	57
	VEDLEGG 4: PRISREKKER	62
	VEDLEGG 5: TESTING AV PRISPROGNOSER OG TILSIGSERIE	63
	VEDLEGG 6: TESTING AV TILSIGSERIER	66

1 Innledning

Hovedformålet med denne prosjektoppgaven har vært å skaffe forfatterne inngående kjennskap til produksjonsplanleggingsproblemet for en vannkraftprodusent. De aller fleste produsenter planlegger i dag sin produksjon ut ifra ønske om å maksimere profitten, men Fleten (2000) påpeker at det er markedsverdien som burde være interessant. Oppgavens hensikt har vært å sette seg grundig inn i dagens håndtering av problemet, og ved hjelp av en forenklet case prøve å påvise implikasjoner ved å maksimere markedsverdien i stedet for profitten. Oppgaven belyser også optimeringsdelen av problemstillingen, men i egen modell og i drøftingene, er dette ikke fokusert i stor grad.

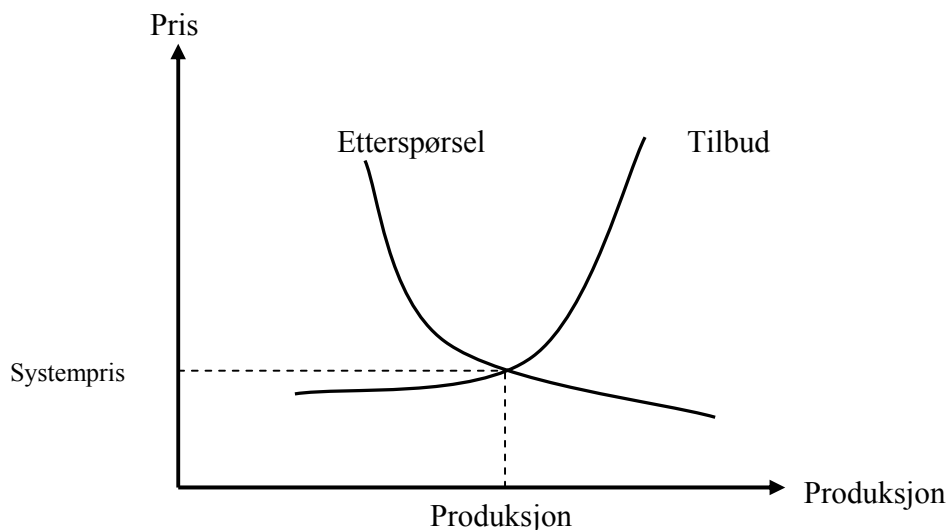
Oppgaven starter med en introduksjon av markedet som en vannkraftprodusenten må forholde seg til og blir på den måten en beskrivelse av rammene som er satt for planleggingsproblemet. I kapittel 3 vil planleggingsproblemet drøftes mer i detalj. Det blir en redegjørelse av hvordan problemet håndteres i dag, og vi introduserer også bruken av markedsinformasjon i produksjonsplanleggingen. Kapittel 4 omhandler underliggende teori om de viktige faktorene pris og volatilitet, og vil belyse den teoretiske forskjellen mellom å benytte seg av forventede spotpriser og markedspriser. Dette blir dermed en introduksjon og plattform for presentasjonen av vår modell i kapittel 5. I kapittel 6 vil det bli en diskusjon av de viktigste resultatene fra simuleringene med modellen, mens kapittel 7 avslutter med en evaluering av modellen og de resultater som har kommet frem.

2 Markedsbeskrivelse

Det nordiske kraftmarkedet er bygd opp omkring kraftbørsen Nord Pool. Nord Pool er en fellesnordisk kraftbørs som har vokst i takt med at de nordiske landene gradvis har åpnet for et deregulert kraftmarked. Nord Pool har ansvaret for å drifte det fysiske- og administrere det finansielle markedet, og opptre som en nøytral motpart for aktørene i markedet. Nord Pool skal også benytte markedsmekanismer for å unngå at det oppstår overføringsbegrensninger i nettet i samarbeid med nettoperatorene i de nordiske landene.

2.1 Det fysiske markedet

For en kraftprodusent er det prisen som til enhver tid oppnås i markedet som er avgjørende for hvor mye penger produsenten kan tjene. Markedet fungerer slik at de som ønsker å kjøpe eller selge kraft på Nord Pool anmelder et kvantum for kjøp og salg til ulike priser i de forskjellige timene det aktuelle døgnet, hver eneste dag. Budene aggregeres av Nord Pool, og man finner en pris som er slik at det er balanse mellom tilbud og etterspørsel (se Figur 2.1). Denne prisen kalles systemprisen, og det blir dermed en systempris for hver time det aktuelle døgnet. Systemprisen blir som oftest referert til på døgns-, eller ukesnivå. Det er gjennomsnittsverdien av alle timeprisene i den aktuelle perioden. Gitt at det ikke er overføringsbegrensninger mellom noen av prisområdene¹ i Norden, blir spotprisen lik systemprisen. I denne oppgaven antas det at det ikke er noen overføringsbegrensninger og systemprisen omtales dermed som spotpris.



Figur 2.1 Markedskrysset som gir systemprisen ut fra tilbud og etterspørsel i markedet.

¹ Det Nordiske markedet er delt inn i ulike prisområder. Hvis det er overføringsbegrensninger i systemet oppstår det såkalte under-, og overskuddsområder hvor underskuddsområdet får høyere pris enn systemprisen og overskuddsområde får lavere pris enn systemprisen i den aktuelle timen.

Med denne prisen gitt, vet vannkraftprodusenten eksakt hvilken pris han får for produksjonen det kommende døgn og en detaljert produksjonsplan kan settes opp for alle aggregat produsenten disponerer, for å maksimere inntektene det kommende døgn. Det er imidlertid ikke inntektene for et enkelt døgn, men inntektene over tid som er avgjørende for produsenten. Det betyr at han må disponere sine ressurser på en slik måte at han kan produsere mest mulig når prisene er høye. Av den grunn må enhver produsent gjøre seg opp en formening om hvordan fremtidig spotpris og ressurstilgang vil bli. Problemstillingen vil bli omhandlet grundigere i de etterfølgende kapitlene, men det vil først bli en beskrivelse av viktige egenskaper ved spotprisen som vannkraftprodusenten må forholde seg til.

2.1.1 Egenskaper ved spotprisen

Volatilitet et viktig begrep for vannkraftprodusentene. For en gitt spotpris S , er volatiliteten definert som den annualiserte verdien for standardavviket til spotprisendringene (Se ligning (2.1)), og dermed et uttrykk for mulighetsrommet for den fremtidige spotprisen. At det er annualiserte verdier vil si at et volatilitetsmål kan sammenlignes uavhengig av periodelengden som benyttes for å finne standardavvik.

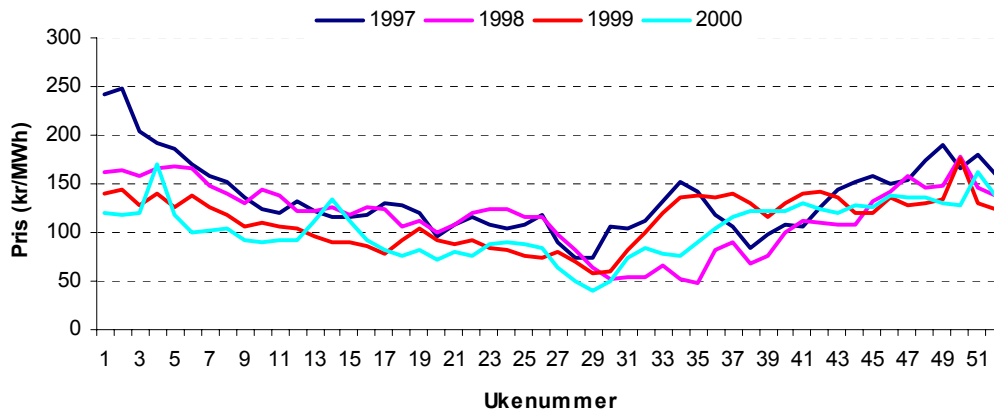
$$\sigma = \frac{Std\left(\frac{dS}{S}\right)}{\sqrt{dt}} \quad (2.1)$$

Lucia og Schwartz målte standardavviket mellom daglige svingninger i logaritmen til prisene til å bli 0.099, i perioden 1993 til 1999. Med standard annualisert volatilitetsmål, gir det en verdi på 189 %, og sett i forhold til tradisjonelle aksjemarkedet, som ligger mellom 20 og 30 %, er dette en svært høy verdi[oslobors.no] [Lucia og Schwartz, 2001].

Spotprisen har også den egenskapen at dersom prisene blir unormalt høye, øker sannsynligheten for at prisene fremover vil falle og motsatt hvis prisen er unormalt lav. [Lucia og Schwartz, 2001]. Denne egenskapen kalles mean-reversion, og kan forklares med at når prisene er høye vil tilbudet øke når aktører med høyere kostnader kommer inn i markedet, og dermed presses prisene ned. Ved lave priser vil tilbudet avta, og prisene presses opp. Flere har gjort bruk av denne egenskapen ved modellering av spotpriser, blant annet Lucia og Schwartz (2001) i sin en- og tofaktormodell.

Det er også påvist en negativ korrelasjon mellom pris og tilgang til vannressurser i det nordiske markedet. Ved dårlig hydrologisk balanse eller lavt tilsig har prisene en tendens til å gå opp. Årsaken til dette er det nordiske energisystemet, som i stor grad baserer seg på vannkraft².

² 55 % av den totale elektrisitetsproduksjonen i Norden, er basert på vannkraft. For Norge sin del er tallet 99 % [Wangensteen, 2003].



Figur 2.2 Utviklingen av systempris på ukensnivå mellom 1997-2000 [Nord Pool, a].

Historiske priser har også vist seg å inneha elementer av forutsigbarhet. I Figur 2.2 er spotprisen på ukensnivå for årene 1997-2000 vist. Som det går frem av figuren er det tydelige tegn til at prisen har sesongsvingninger, med lavere pris i sommerukene enn på vinteren.

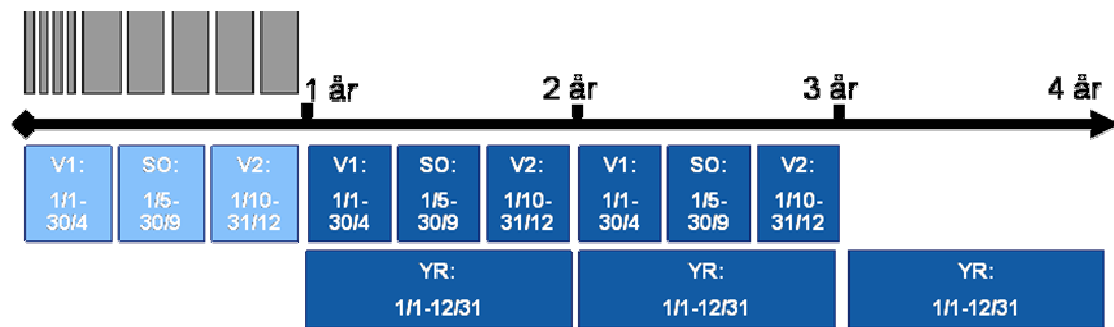
2.2 Det finansielle markedet

I tillegg til det fysiske markedet for strøm, finnes det også et finansielt marked hvor det ikke foregår fysisk levering av kraft. Det har i den senere tid blitt flere handelsplasser for slike, men det er på Nord Pool at storparten av handelen foregår. I 2002 ble det omsatt for 179,9 Mrd NOK i dette markedet på Nord-Pool og det tilsvarer 1018,7 TWh. Likviditeten har økt hvert år siden 1996 og frem til i dag [Nord Pool].

Det finansielle markedet består i dag av en rekke produkter som aktørene kan handle, og det handles kontrakter med levering opp til tre år frem i tid. De mest vanlige kontraktstypene er forward- og futureskontrakter³. Dette er standardiserte kontrakter på 1MW, med definerte leveringsperioder. Figur 2.3 illustrerer de ulike forwards og futureskontraktene med forskjellige leveringsperioder⁴.

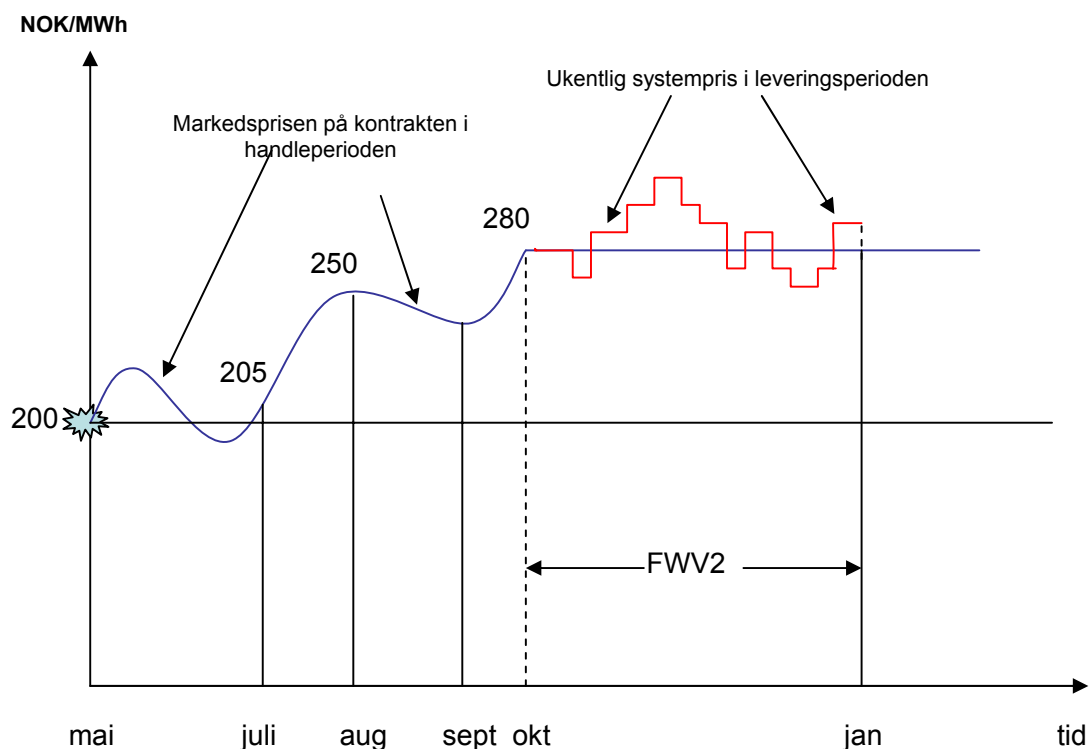
³ Hovedforskjellene mellom future- og forwardkontraktene ligger i oppgjøret. Futureskontraktene har daglig marked to market oppgjør, mens en for forwardkontraktene har akkumulert oppgjør etter siste handelsdag.

⁴ Leveringsperioden beskriver perioden når kontrakten avregnes mot systemprisen og har ikke noe med fysisk levering av strøm å gjøre.



Figur 2.3 Oppdeling av de ulike terminkontraktene. Futureskontrakter vises over og forwardkontrakter vises under tidsskalaen.[Wangensteen, 2003]

Figur 2.4 viser hvordan et kjøp av forwardkontrakten FWV2 kan forløpe. I mai ble denne kontrakten handlet for 200 NOK, og den blå kurven viser hvordan verdien på kontrakten forandret seg i handleperioden som strekker seg frem til 30.09. I denne perioden er det ikke noe finansielt oppgjør for kontrakten, men daglige verdier av kontrakten bokføres allikevel. Ved handelsperiodens slutt er det et oppgjør hvor long posisjonen i dette tilfellet vil få et realisert tap på 80 NOK/MWh, mens den som har en i short posisjon tilsvarende vil tjene 80 NOK/MWh.



Figur 2.4 Illustrasjon av utviklingen til verdien av en forwardkontrakt FWV2 som blir kjøpt i mai.

Etter at handleperioden er over den 30. september, går kontrakten til levering. Leveringsperioden varer ut resten av året, og den røde kurven viser utviklingen av systemprisen på ukentlig basis i denne perioden. I leveringsperioden vil en long posisjon oppleve profitt hvis gjennomsnittet av systemprisen er over 280 NOK/MWh, mens en short posisjon vil få profitt i de tilfellene der gjennomsnittlig systempris blir lavere enn 280 NOK/MWh.

Det er dermed både prisen frem til levering og gjennomsnittsprisen i leveringsperioden som er avgjørende for hvordan oppgjøret blir. Et viktig moment er at prisen på kontrakten og systemprisen ikke nødvendigvis utvikler seg likt. Verdien av en kontrakt er frem til levering kun avhengig av markedsprisen på kontrakten, mens det i leveringsperioden er den siste handlede kontrakten som måles opp mot systemprisen hver dag. Derfor vil forwardkontrakten gi en prisgaranti i hele leveringsperioden.

Informasjonen i det finansielle markedet kan gi nyttige signaler for en vannkraftprodusent som skal disponere sine ressurser optimalt. Prisene som det handles for er offentlig tilgjengelig informasjon og forteller hva markedet verdsetter produksjonen i den aktuelle perioden til. I sin vurdering av fremtidig spotprinsnivå kan derfor prisene her være svært interessante. Dette momentet vil bli klarere i neste kapittel som tar for seg produksjonsplanleggingsproblemet på en grundigere måte.

3 Produksjonsplanleggingsproblemet

Produksjonsplanlegging ble frem til dereguleringen i 1991 drevet ved å minimere kostnader forbundet til produksjonen. Produsentene hadde leveringsplikt, og hadde lite eller ingen innvirkning på hvor stor inntekt de ville få. Målet var å møte etterspørselen til minst mulig kostnad [Flatabø et al, 2002]. Etter at dereguleringen ble gjennomført og iverksatt fra 1991, måtte produsentene endre sine målsetninger til å bli mer profittorienterte og konkurransedyktige[Fleten et al, 2002].

Hovedproblemet for planleggingen er først og fremst de stokastiske variablene tilsig og pris. For å optimere må en derfor definere disse fremtidige verdiene på en så god måte som mulig. Dette vil beskrives nærmere i kapittel 3.3 og 3.4. Det er primært usikkerheten omkring disse variablene som gjør produksjonsplanleggingsproblemet så kompleks. På tross av at en vannkraftprodusent har flere usikre faktorer og forhold seg til, slik som driftsmessige, miljømessige og ulik finansiell risiko, vil det i denne oppgaven primært fokuseres på risiko relatert til pris og tilsig. Det vil bli en gjennomgang av hvordan aktørene håndterer denne usikkerheten basert på noen av de mest kjente modelleringsverktøyene i bransjen.

3.1 Problemformulering

Den fundamentale problemstillingen for en vannkraftprodusent er å kunne produsere mens prisen er høy og spare vannet når prisen er lav. Fosso et al (1999) beskriver produksjonsplanleggingsproblemet på følgende måte:

Gitt en prognose på fremtidige markedspriser; etabler en produksjonsplan eller -strategi som maksimerer forventet profitt i planleggingsperioden, gitt alle relevante restriksjoner. (3.1)

Fleten, (2000) hevder imidlertid at det er to mulige målfunksjoner for produsenten, der den ene tar som mål å maksimere forventet profitt, mens den andre sikter mot å maksimere markedsverdien. Forskjellen gir seg utslag i at en for forventet profitt vil benytte seg av forventede spotprognoser, mens man for å optimere markedsverdien vil bruke informasjonen som ligger i terminprisene i det finansielle markedet [Fleten, 2000]. Den teoretiske forskjellen mellom disse to fremgangsmåtene vil bli nærmere behandlet i kapittel 4.1.6, mens det i denne delen vil bli en diskusjon om konsekvensene av å optimere markedsverdien. Først vil det imidlertid bli en kort redegjørelse for en av de mest anerkjente simuleringsmodellene i markedet, EMPS-modellen.

3.1.1 EMPS-modellen

Utviklingen av EMPS-modellen startet på 70-tallet av forskere ved EFI. Modellen kan sees på som en markedssimulator som søker å optimalisere utnyttelsen av hydrotermiske system basert på vannverdimetoden og tilbud og etterspørsel av elektriske kraft. Modellen gir videre innsikt i prisdannelser, energiøkonomi, energiflyt, miljøkonsekvenser og leveringskvalitet av kraft. Ved hjelp av modellen kan både lokale og nasjonale energiressurser simuleres, både ved vannbaserte og hydrotermiske kraftsystemer[Fosso et al 1999].

EMPS-modellen er en stor og omfattende modell, som består av to hoveddeler. Det er en strategidel hvor vannverdier beregnes, og en simuleringsdel for fysiske og økonomiske konsekvenser for ulike tilsigsalternativ. I den første delen blir hvert delområde representert med en enmagasinmodell, og vannverdiene finnes for hvert alternativ. I simuleringsdelen simuleres driften av vannkraftverkene for et gitt antall historiske tilsigsår.

Simuleringsresultatene blir presentert på ukesnivå og inneholder disponering av vann og produksjon i hvert område. Denne delen gir altså en omfattende og detaljert presentasjon av vannkraftsystemet i hvert delområde samt forbindelsene mellom dem. Dette inkluderer både disponering av vann, leveranser, utveksling mellom områder, økonomiske resultat, prisutvikling på spotmarkedet (prisrekker), utslipp og marginale nytteverdier.

EMPS-modellen er blant modellene som optimerer ut i fra kriteriet om å maksimere forventet profitt. Modellen tar inn data som historiske tilsigsrekker, temperaturserier, last etc og genererer prisscenarier, et prisscenario for hver tilsigsserie. Det betyr at denne modellen ikke tar i bruk informasjon i markedet ved optimaliseringen

Den helhetlige simuleringen av fremtidige produksjon, gjør at modellen benyttes i dag av en rekke aktører i kraftmarkedet i Norden. Men det store analysearbeidet som ligger til grunn for resultatene, fører til at de færreste kraftprodusenter har kapasitet til å kjøre hele modellen selv. Det mest interessante for de fleste er prisrekkene som blir simulert. Prisrekkene genereres ut i fra de simulerte produksjonene for ulike tilsigsalternativ, og benyttes av mange som en input i egen produksjonsplanlegging.

3.1.2 Forskjellen på optimering av forventet profitt og markedsverdi

Et profittmaksimerende foretak vil benytte forventede priser fra for eksempel en spotprisprognose for å representere fremtidig usikre markedspriser. Dette kan sees på som et estimat på hva man kan få for fremtidig produksjon i spotmarkedet. Spotprognosene er ikke alltid sammenfallende med terminprisene, og det er nærliggende å tro at man da kan få forskjellig produksjonsstrategi ut ifra hvilke priser som benyttes.

Dette kan illustreres ved et enkelt eksempel. En produsent står i slutten av desember og skal planlegge sin produksjon i januar og februar. Det antas at det er kun disse to

periodene, at det ikke er noe tilsig i perioden og at magasinnivået i starten av perioden er X GWh. Prisene i januar og februar for de to prisalternativene er vist i Tabell 3.1.

Tabell 3.1 Forventet spotpris og markedspris for januar og februar i eksempelet.

Pristype	Januar	Februar
Forventet spotprognose	100	90
Markedspris	100	110

Produsenten som bruker forventet spotprognose vil produsere X GWh i januar og ingenting i februar. Strategien for produsenten som bruker markedsverdi vil bli motsatt. Han ser høyere priser i februar og vil dermed ikke produsere i januar, men produsere X GWh i februar. Produksjonsstrategien for de to produsentene blir dermed forskjellig avhengig av hva slags priser man bruker i optimeringen.

Man kan også bruke et arbitrageargument for å få fram forskjellen på å bruke markedsverdi og forventet spotpriser. Produsent 1 har kjørt simulering med sin optimeringsmodell og fått beregnet en forventet spotpris på 210 NOK/MWh for perioden FWS0-04. Det betyr at han er villig til å betale opp til denne prisen for en fremtidig levering i perioden. Produsent 2 tilbyr seg å selge denne kraften til ham for 205 NOK/MWh, noe Produsent 1 synes er en bra pris, ettersom han optimerer sin produksjon ut fra forventning om pris på 210 NOK/MWh. Men Produsent 2 har sett at markedsprisen er 200 NOK/MWh for denne perioden. Dermed kan han kjøpe denne kontrakten i markedet for 200 NOK/MWh og samtidig selge til Produsent 1 for 205 NOK/MWh. Mellomlegget på 5 NOK/MWh er en risikofri gevinst for Produsent 2. Produsent 1 har ikke brukt informasjonen fra markedet i sine vurderinger av framtidig produksjon og har på denne måten tapt 5 NOK/MWh.

Eksemplene illustrerer at produsenten kan ta forskjellige beslutninger avhengig av om han maksimerer markedsverdi eller maksimerer forventet profitt. Sett i fra en investors synspunkt så er det alltid markedsverdien som betyr noe i forhold til vurdering av lønnsomhet [Brealey and Myers, 2003]. Selv om det er forventet profitt som det i stor grad fokuseres på i kraftbransjen, viser eksemplene at bruk av informasjon fra markedet kan gi andre signaler i produksjonsplanleggingen. Bedrifter i et konkurranseutsatt marked som kraftmarkedet som ønsker å maksimere verdien for aksjeeierne, bør ha dette som fokus i stedet for optimering av forventet profitt som gir en mer kortsiktig gevinst [Wallace, 2003].

3.2 Matematisk beskrivelse av problemet

En sentral forutsetning i EMPS-modellen, er at enhver produsent er uten markedsrett, det vil si alle produsenter er pristakere. En slik forutsetning betyr at produsenten ved sin egen produksjon ikke har muligheten til å påvirke prisene i markedet. Dette er rimelig å anta for de fleste aktørene i markedet, men kan trekkes i tvil når det gjelder de største produsentene [Flatabø et al, 2002]. Samtidig påpeker Fleten et al (2002) at det gjort flere

studier som viser at det nordiske markedet generelt sett har tilnærmet perfekt konkurranse, slik at antagelsen som gjøres er noenlunde riktig.

Med utgangspunkt i problemformuleringen i (3.1) og disse forutsetningene kan målfunksjonen som brukes i disse modellene settes opp. Man søker å maksimere forventet profitt i planleggingsperioden med hensyn på usikkerhet om framtidig pris og tilsig. Samtidig settes det beskrankninger for det fysiske produksjonssystemet og vannbalansen. Fosso et al (1999) beskriver målfunksjonen og beskrankningene på følgende måte:

$$\text{maksimer } E_{vp} \left\{ \left(\sum_{k=1}^N q_k p_k + S(x_k, p_k) \right) \right\} \quad (3.2)$$

s.t

$$x_{k+1} = x_k + v_k^r - s_k - \max(q_k - v_k^u, 0) \quad (3.3)$$

$$x_{k,\min} \leq x_k \leq x_{k,\max} \quad (3.4)$$

$$v_k^u \leq q_k \leq q_{k,\max} \quad (3.5)$$

q_k	-	Produksjon i tidssteg k .
p_k	-	Pris i tidssteg k .
$S(\bullet, \bullet)$	-	Verdi av magasin i enden av planleggingsperioden.
k	-	Tidsindeks (for eksempel uke)
N	-	Tidsindeks for enden av planleggingsperioden.
x_k	-	Magasinnivå i slutten av uke k .
s_k	-	Overløp i uke k .
$x_{k,\min}$	-	Minimum magasinnivå i uke k .
$x_{k,\max}$	-	Maksimum magasinnivå i uke k .
v_k^r	-	Regulert tilsig i uke k .
v_k^u	-	Uregulert tilsig i uke k .
q_k	-	Maksimum produksjonskapasitet i uke k .

E_{vp} betegner forventet verdi med hensyn på både tilsig og pris.

Som det går frem av problemformuleringen, så søker målfunksjonen å optimere bruken av vannet ved å maksimere summen av inntektene fra produksjonen i planleggingsperioden og verdien av magasinet ved slutten av planleggingsperioden. Det

vil nå bli en kort redegjørelse for noen sentrale begrep i forbindelse med problemstillingen.

3.2.1 Vannverdier

For en produsent er situasjonen slik at de vannressursene man har i de fleste tilfeller er begrenset. Dermed har produsenten valget mellom å produsere nå eller å lagre den neste KWh til senere produksjon. Vannverdien er definert som marginalverdien av å lagre denne KWh [Mo, Haugstad, 1996]. Eksempelvis vil verdien av å lagre vannet i flomsituasjoner hvor faren for overløp er stor, være liten i forhold til en situasjon der det er lite vann og det er fare for rasjonering.

Ved hjelp av SDDP eller SDP brukes vannverdibegrepet i optimeringsmodellen til å finne optimal produksjonsstrategi. Man benytter seg av Bellman's prinsippl om optimalitet og deler problemet opp i subproblemer hvor man i hvert tidssteg optimerer summen av nåværende og fremtidig inntekt. Løsningsalgoritmen er følgende:

$$J_k(x_k, p_k) = \text{maksimer} \{E_{vp} [q_k p_k + J_{k+1}(x_{k+1}, p_{k+1})]\} \quad (3.6)$$

$$\kappa = \frac{\partial J(x_k, p_k)}{\partial x_k} \quad (3.7)$$

J_k er forventet framtidig inntekt etter tidssteg k . Her blir vannverdien κ uttrykt som den marginale endringen i framtidig inntekt ved en liten endring i magasinnivå. Den optimale produksjonsstrategien er funnet når vannverdien κ i hvert tidssteg k er lik prisen i markedet i dette tidssteget såfremt ikke restriksjoner som for eksempel maksimalproduksjon eller magasinrestriksjoner virker inn.

3.2.2 Verdien av sluttmagasin

Verdien av sluttmagasinet S (se ligning (3.2)) i slutten av planleggingsperioden er viktig med tanke på å få en riktig produksjonsstrategi. Hvis man ikke tar hensyn til denne verdien vil optimal produksjonsstrategi bli å søke å få tømt magasinet i enden av planleggingsperioden. En måte å løse dette på er å spesifisere sluttmagasin i perioder hvor det er minst usikkerhet i magasinnivåene, for eksempel like før vårflommen. For å unngå å spesifisere dette sluttmagasinet bruker modellene en iterativ prosedyre hvor vannverdiene blir reberegnet i det siste året av planleggingsperioden helt til vannverdiene $\kappa(x(N), p_n(N))$ blir lik $\kappa(x(N-52), p_n(N-52))$ for alle x og p_n [Fosso et al, 1999]. I dette tilfellet vil ikke valg av sluttmagasin ha noen innvirkning på produksjonsplanen for noen verdier av x .

3.3 Pris

Som problemformuleringen i (3.1) viser, er fremtidige priser helt avgjørende for strategien i produksjonsplanen. Det er da også denne parameteren som det er knyttet mest risiko til og som også er behandlet mest i denne rapporten. Dette kapittelet vil gjøre rede for hvordan prisrisikoen er behandlet i eksisterende modeller, mens en mer inngående teoretisk beskrivelse vil komme i kapittel 4.

3.3.1 Estimering av fremtidige markedspriser

For produsentene er det viktig å ha gode estimater av fremtidige priser for å optimere sin produksjonsstrategi, og produsenten er derfor avhengig av et dynamisk optimeringsverktøy for å oppdatere produksjonen til enhver tid. Når det gjelder pris finnes det flere simuleringsprogram som kan gi et inntrykk av hvordan prisene vil bli i den nærmeste fremtid. Fosso et al (1999) sier at godheten av prognosene ikke bare er avhengig av forventningsverdien, men også hvordan sannsynlighetsfordelingen til de ulike verdiene er og nevner tre hovedmåter å prognosere prisen på [Fosso et al, 1999].

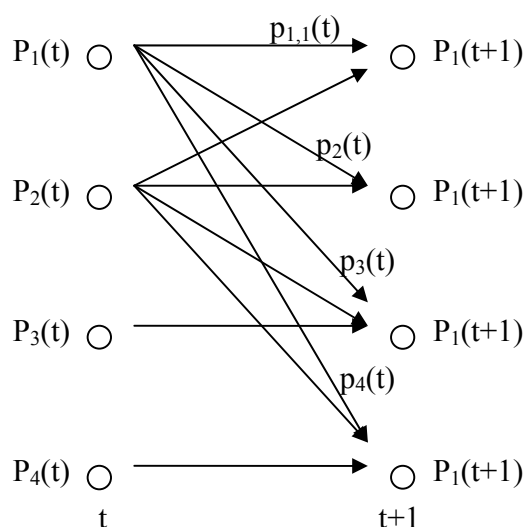
1. Bruke prisene i future-markedet.
2. Bruke historisk observerte priser og prognosere ut i fra trender og utvikling i disse historiske prisene.
3. Man kan bruke en simuleringsmodell som beskriver prisdannelsen fremover.

Det er for en stor del det siste alternativet som benyttes av dagens produsenter og den mest kjente av disse er EMPS-modellen som er beskrevet i 3.1.1. Prisrekken fra denne modellen er en matrise med prognoserte priser på ukenivå for ulike tilsigsalternativ, fra den dagen de simuleres og opp til fem år frem i tid. Det mest vanlige er å bruke de 60 tilsigsscenariene fra 1931-1990, hvor hvert scenario defineres med like stor sannsynlighet. I det senere har man også begynt å bruke tilsigserier som går fram til år 2000.

Som beskrevet i kapittel 3.1.1 så er modelleringen så kompleks at det ikke er entydige løsninger på hvordan alt gjøres. I en del av løsningsalgoritmen er det opp til brukeren å definere sine egne preferanser, og dette kan gjøre at selve prognosene bli forskjellige fra en produsent til en annen selv om de kjøres på samtidig og med samme datasett [Longva, SSF]. Brukerne kan ha definert ulike tilsigsserier, ulik magasinstatus ettersom ikke samtlige magasin i Norge er med i hver kjøring og temperaturkurver leveres fra flere aktører, og disse er ikke nødvendigvis sammenfallende. Dermed brukes det ulike input på noen av de mest kritiske parametrene i modellen.

3.3.2 Prismodellen

Prisscenarier fra EMPS-modellen brukes i den videre modelleringen av prisene i for eksempel Vansimtap. Her er det to prismodeller som står sentralt ved modellering av fremtidige markedspriser. Man har i mange år benyttet en første ordens autoregressiv modell (AR1), som benytter normaliserte priser som finnes ved å trekke fra forventingsverdi og dividere på standardavviket for hver uke. I tillegg til denne modellen er det i de senere år utviklet en Markov type prismodell. Begge disse modellene er første ordens modeller, dvs at det kun er prisen i uken før som har betydning for sannsynligheten for prisen i inneværende uke [Mo et al, 2000]. Hvordan prisene blir modellert i markovmodellen blir kort beskrevet her.



Figur 3.1 Illustrasjon av markovmodellen med et eksempel på 4 prispunkter og tilhørende overgangssannsynligheter.

Markovmodellen definerer et gitt antall prispunkt i hvert tidssteg og overgangssannsynligheter mellom tidsstegene, slik som illustrert i Figur 3.1. Prispunktene blir valgt slik at utfallsrommet som er gitt av prisscenariene fra EMPS-modellen dekkes best mulig. Overgangssannsynlighetene bestemmes av antall prisscenarier som blir tildelt hvert prispunkt i uke t og uke $t+1$, gitt i ligning (3.8):

$$p_{ij}(t) = \frac{N_{ij}^P(t)}{N_i(t)} \quad (3.8)$$

$N_i(t)$ - Antall prisscenarier som tilhører prispunkt i i uke t .

$N_{ij}^P(t)$ - Antall prisscenarier som tilhører prispunkt i i uke t og som samtidig tilhører prispunkt j i uke $t+1$.

Etter denne beregningen må overgangssannsynlighetene justeres slik at forventet pris i uke $t+1$ for prispunktet må være lik gjennomsnittet av prispunktene som tilhører prisscenariene. Dette skal gjøres slik at forventet pris i hvert tidskritt i prismodellen skal være lik forventingsverdien til alle prisscenariene.

3.4 Tilsig

Ved siden av pris er tilsiget til magasinene den viktigste faktoren som det må tas hensyn til ved optimalisering av produksjonen. Videre vil det gjennomgå hvordan ulike modeller som EMPS-modellen håndterer dette for i best mulig grad representere usikkerheten i tilsiget i modellene.

3.4.1 Beskrivelse av tilsigserier

Utgangspunktet for modellering av tilsiget i modellene er observerte vanndata rundt omkring i Norge. I dag foregår det en omfattende innsamling av slike data, i NVE's sin hydrologiske database HYDRA II finnes det vannstands og vannføringsdata fra ca 3000 ulike stasjoner [Olaussen og Roald, 1996]. For at disse tilsigseriene skal representere usikkerheten i best mulig grad er det blitt vanlig å ha tilsigserier med varighet på 60 år. Eksempel på dette er tilsigsperioden 1930-1990. Observerte tilsigsdata for hele perioden kan være vanskelig å fremskaffe, og man må da forlenge disse seriene.

Det finnes flere metoder for å forlenge slike syntetiske serier. Metodene bruker de statistiske egenskapene ved observasjonsmaterialet man har til rådighet for å generere serier av ønsket lengde. Olaussen og Roald (1996) nevner at autoregressive modeller har blitt mye brukt til dette formålet. Problemet med slike modeller er modellering av krysskorrelasjon, som er viktig når seriene skal brukes der samkjøring av flere produksjonssystemer er nødvendig. Derfor har man i større grad brukt ulike regresjonsmodeller som multipl regressjonsanalyse eller EOF-metoden, fordi disse antas å ivareta krysskorrelasjonen på en rimelig god måte [Olaussen og Roald, 1996].

3.4.2 Tilsigsmodellen

Modellen etablerer diskrete tilsigsalternativ som har til hensikt å best mulig beskrive utfallsrommet tilsiget har i fra en gitt tilstand. Samtidig søker modellen og modellere sammenhengen mellom tilsig fra en uke til den neste. I simuleringsdelen brukes tilsigseriene i en foroversimulering med driftsstrategien funnet i strategidelen.

Modelleringen av tilsig i strategidelen er komplisert og behandles separat i optimeringsmodellen. Utgangspunktet er tilsigserier som er fremskaffet som beskrevet i kapittel 3.5.1 Disse tilsigseriene normaliseres, det vil si at de skaleres slik at tilsiget hver uke har middelerdi 0 og standardavvik 1. Videre antas det i modellen at disse normaliserte seriene kan tilpasses en første ordens autoregressiv modell (AR1).

Hvis z_t er det normaliserte tilsiget i uke t , kan tilsiget beskrives slik [Haugstad et al, 2001]:

$$z_t = \phi \cdot z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.10)$$

Her er ϕ en korrelasjonsmatrise som beskriver korrelasjonen mellom tilsiget i uke $t-1$ og tilsiget i uke t . ε_t er støyleddet som beskriver stokastiske variasjoner i tilsiget uavhengig av tilsiget i uken før.

Det er nødvendig å diskretisere tilsigsalternativene i en gitt uke for å begrense optimeringsproblemet. Dette bør gjøres slik at man best mulig representerer tilsigsmulighetene som støyleddet ε_t i (3.9) representerer. I modellene er dette gjort ved prinsipalkomponentanalyse. Man utfører en prinsipalkomponentanalyse på residualene (ε_t), og finner dem som bidrar mest til variansen. Disse brukes videre for å representere mulige tilsigsutfall fra en gitt uke.

3.4.3 Konsekvenser for modellering av tilsig

Optimaliseringsmodellen som blir brukt krever en diskretisering av tilsigsalternativene i en gitt uke som beskrevet i det foregående kapittel. Denne forenklingen bidrar til at tilsigsmodellen i noen tilfeller ikke vil være like representativ for alle tilsigserier. Det påpekes i [Haugstad et al, 2001] at tilsigsmodellen i noen tilfeller kan gi en betydelig lavere varians enn det de observerte seriene skulle tilsi. Grunnen til dette er at ekstreme utfall ikke kommer med i representasjonen av tilsiget pga diskretiseringen. Når man da gjennomfører foroversimuleringen med gitte tilsigsserier, kan det oppstå situasjoner der strategien som er optimalisert ikke representerer de egenskapene de observerte tilsigsseriene har. For å unngå dette problemet kan det være en løsning å innføre flere prinsipalkomponenter for å beskrive utfallsrommet bedre. Dette må da oppveies mot lengre regnetid for optimaliseringen. Haugstad et al (2001) illustrerer problemstillingen hvor et datasett med en prinsipalkomponent gir en regnetid på 1 time (konvergens etter 40 iterasjoner). Samme datasett, men med bruk av 5 prinsipalkomponenter gir en 10-dobling av regnetiden for samme antall iterasjoner.

3.4.4 Korrelasjonen mellom pris og tilsig

I et vannkraftsbasert kraftsystem som vi har i Norden, er prisen i stor grad avhengig av hvor mye vann som er i systemet og som tilkommer systemet i nærmeste fremtid. Tabell 3.2 gir korrelasjonen mellom tilsiget⁵ til et gitt magasin og systemprisen på ukenivå.

⁵ Tilsigserie fra Norsk Hydro Energi

Tabell 3.2 Korrelasjon mellom systemprisen og tilsig til et magasin i årene 1993-2000. Ukeverdier for tilsig og systempris er brukt i beregningene.

Korrelasjon mellom tilsig og systemprisen	
Periode	Korrelasjon
1993	-0,65
1994	-0,58
1995	-0,72
1996	0,21
1997	-0,45
1998	-0,28
1999	-0,50
2000	-0,48
1993-2000	-0,42

Tabellen viser at det finnes en negativ korrelasjon mellom prisutviklingen og tilsiget til magasinet. Det vil si at ved lave tilsig er det en klar tendens til at prisene øker. Beregnet korrelasjon for hele perioden er -0,42. Det eneste året hvor det ikke er negativ korrelasjon er i 1996 som var preget av et usedvanlig lite tilsig og høye priser på sommeren

Selv om resultatene presentert ovenfor viser at det er en korrelasjon til stede er modellering av dette veldig utfordrende i praksis. I EMPS-modellen og Vansimtap blir dette tatt hensyn til ved at det for hvert simulert tilsigsår (tilsigsscenario) finnes ett prisscenario. Det finnes også aktører i markedet som bruker flere prisscenarier for hvert tilsigsalternativ. På denne måten tar modellen til en viss grad opp i seg korrelasjonen mellom det tilsiget som kommer og prisen som dannes. I sin doktorgradavhandling brukte Fleten korrelasjonsfaktorer for generering av scenarier [Fleten, 2000]. Her ble korrelasjonen mellom pris og tilsig for hver periode spesifisert.

Man kan i tillegg tenke seg at det også finnes korrelasjon mellom tilsig i en periode og prisen i neste periode. Fleten opererte med ulike periodelengder, blant annet 26 og 56 uker. Et veldig lavt tilsig i perioden på 26 uker, kan få konsekvenser for prisen i perioden på 56 uker. En slik krysskorrelasjon er ikke tatt hensyn til i Fletens modell.

3.4.5 Hydrologisk balanse

En annen viktig prisdriver i det norske markedet er den hydrologiske balansen. Den hydrologiske balansen er et estimat på hvordan ressursituasjonen, altså hvor mye vann som finnes i systemet, avviker fra normalsituasjonen. Fordi det norske kraftsystemet er vannkraftbasert vil denne balansen innvirke på prisene i markedet. I den hydrologiske balansen inngår magasininfylling i det totale systemet, snømagasin og grunn- og markvann [Haneberg, NHE].

Magasininfyllingen er den størrelsen som er lettest å vurdere fordi det finnes godt med målinger for de fleste magasiner i Norge. I produksjonsplanleggingen er det også viktig å estimere snømagasinet slik at man vet hvor mye tilsig snøen gir når den smelter og

hvordan ressursituasjonen er. Dette gjøres ofte ved manuelle målinger av snødyp og vektprøver av snøen. På denne måten finner man snøens vannekvivalent som forteller noe om hvor mye vann det blir når snøen smelter [NVE].

Med egne beregninger er det benyttet avvik fra normal magasinfylling totalt for Norge i perioden 1998-2002 som et estimat på den hydrologiske balansen [SSB]. Dermed blir ikke snømagasin og grunn og markvann med i beregningen av den hydrologiske balansen. Korrelasjonen mellom avvik fra normal magasinfylling og systemprisen, ga en korrelasjonskoeffisient på -0,74, noe som viser en klar tendens til at magasinnivå som avviker negativt fra normalnivået driver prisene opp.

Man ser at prisene i stor grad korreleres negativt både med tilsig og hydrologisk balanse. Spesielt hydrologisk balanse, som sier noe om ressursituasjonen i det totale vannkraftsystemet, er en viktig indikator på hvordan prisene i markedet vil utvikle seg [Haneberg, NHE].

3.5 Løsningsalgoritmer for produksjonsplanleggingsproblemet

Objektfunksjonen (likning (3.2)) som beskriver den matematiske problemstillingen, kan i prinsippet løses med standard lineær programmering. Men ettersom man i produksjonsplanleggingen har en lang planleggingshorisont med både pris og tilsig som stokastiske variable vil det stokastiske optimeringsproblemet med bruk av lineær programmering etter hvert bli så stort og komplekst at regnetiden blir uakseptabel [Pereira et al, 1999]. For å løse optimeringsproblemet har man derfor tatt i bruk mer raffinerte metoder.

Denne oppgaven fokuserer i liten grad på løsningsalgoritmen, men for å få en så komplett fremstilling som mulig av produksjonsplanleggingsproblemet, er en beskrivelse av hvordan SDDP-algoritmen fungerer vist i vedlegg 1. Wallace og Fleten (2003) nevner forløperen SDP som var den mest vanlige løsningsmetoden tidligere, og nested Benders' decomposition som andre mulige metoder.

4 Teoretisk grunnlag

Redegjørelsen for produksjonsplanleggingsproblemet åpner for en del spørsmål knyttet til de teoretiske sammenhengene i forbindelse med defineringen av fremtidige usikre verdier. Dette kapitlet er ment å være en spesifisering av de finansteoretiske aspektene ved planleggingsproblemet, og på den måten være en overgang til vår tilnærming til problemet, som kommer i neste kapittel. Dette kapitlet tar utgangspunkt i ulike måter å modellere pris på, og ser på konsekvenser og forutsetninger for en slik modellering. Deretter vil det bli en grundig redegjørelse for volatilitet som mål på risikoen i markedet og hva denne kan fortelle oss.

4.1 Prismodellering

For å beskytte seg mot risiko i pris, er det vanlig for en vannkraftprodusent å bruke det finansielle markedet til å hedge sine produksjonsplaner. Dette gjøres ved å sette opp porteføljer slik at små svingninger i prisen ikke påvirker risikoeksponeringen. For å få dette til så må det genereres prisscenarier som beskriver hvordan prisene forventes å utvikle seg fremover.

4.1.1 Prismodellering – kontinuerlig tid

Lucia og Schwartz (2001) modellerer spotprisutviklingen P_t der $t \in [0, \infty]$, ved hjelp av to komponenter:

$$P_t = f(t) + X_t \quad (4.1)$$

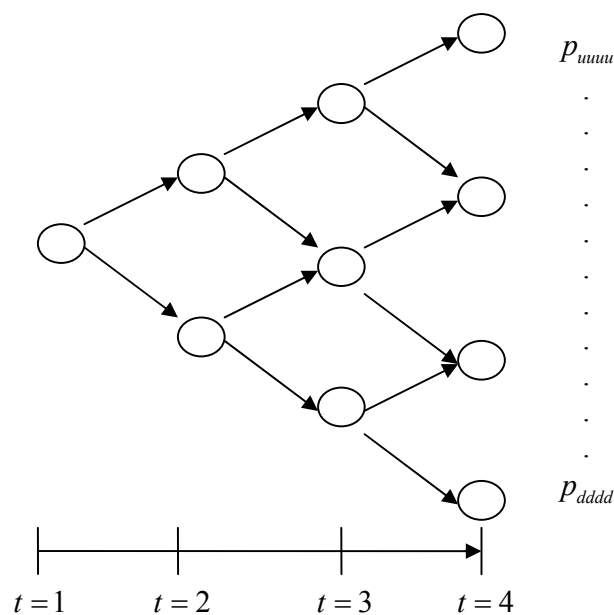
Her beskriver $f(t)$ en deterministisk funksjon og X_t antas å følge en stokastisk prosess på formen

$$dX_t = -\kappa X_t dt + \sigma dZ \quad (4.2)$$

Her er $\kappa > 0$. X_t følger en stasjonær mean-reversion prosess, eller en Ornstein-Uhlenbeck prosess, med null forventet avvik på lang sikt der κ beskriver hastigheten på justeringen mot det langsiktige fremtidige nivå. dZ representerer et inkrement i en standard brownsk bevegelse, og følger derfor en prosess som er normalfordelt med et standardavvik på $\sigma\sqrt{dt}$. Variansen til dX_t reduseres over tid på grunn av reversionsegenskapen.

4.1.2 Prismodellering – diskret tid

En annen måte å fremstille prisutviklingen på er å diskretisere prosessen. Det betyr at en lager seg et scenarietre hvor prisens utvikling modelleres ved gitte tidspunkt. Hver enkelt verdi i en slik fremstilling vil i resten av oppgaven defineres som nodeverdi. Det vil si at hver node tilhører en tilstand i et gitt tidspunkt frem i tid. Figur 4.1 viser et enkelt prisscenario over tre perioder med rekombinerende struktur.



Figur 4.1 Beskrivelse av et scenarietre hvor hver node representerer hver sin mulige pris.

Cox, Ross og Rubenstein introduserte i 1979 den første versjonen av en binomisk fremstilling for usikre fremtidige verdier [Hull, 2003]. Den viktigste parameteren i en slik fremstilling er modelleringen av fremtidig usikkerhet til spotprisen. Med en antagelse om en lognormalfordeling for prisene, vil opp- og nedbevegelsen være representert som:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (4.3)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (4.4)$$

Sannsynligheten for at variabelen går opp er dermed gitt som

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad (4.5)$$

En ulempe med å bruke Cox, Ross og Rubensteins fremgangsmåte, er at sannsynlighetene for opp og ned bevegelse er avhengig av volatiliteten i den aktuelle

perioden. Et annet moment er at dersom tidsperiodene blir for lange, så kan sannsynlighetene bli negative med denne modelleringen. Det skjer hvis tidsstegene er slik at $\sigma < r\sqrt{\delta t}$. Negative sannsynligheter for opp eller nedbevegelse gir ingen mening [Hull,2003].

Hull brukte egenskapene til den forutsatte lognormalfordelingen for å finne en beskrivelse som alltid ga sannsynlighet på 0,5 for en oppbevegelse. Dette gjorde han ved å inkludere forventningsverdien til en lognormalfordelt variabel i uttrykket for utviklingen. På den måten vil sannsynligheten for en opp eller nedbevegelse være lik i alle perioder. Med forutsetning om lognormalitet, og at driften kan representeres med den risikofrie renten r , så vil en slik utvidelse medføre følgende uttrykk for bevegelsen:

$$u = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}} \quad (4.6)$$

$$d = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}} \quad (4.7)$$

Denne fremgangsmåten tilsier imidlertid at verdien på den underliggende parameteren som for eksempel spotprisen, ikke har den samme forventningsverdien i tidssteg 2, som det var i tidssteg 0 [Hull, 2003].

4.1.3 Forutsetninger og implikasjoner i en binomisk fremstilling

I en binomisk fremstilling så gjelder antagelsen at den kontinuerlige avkastningen er binomisk fordelt. Summen av binomiske tilfeldige fordelte variable går mot en normalfordeling når utvalget blir stort nok. Det er denne forutsetningen som ligger til grunn for å benytte seg av denne metoden.

Det binomiske treet er rekombinerende. Dette impliserer at prisen i en gitt node er uavhengig av stien den kom dit på. Det eneste som betyr noe er at det er like mange opp- som ned-steg frem til det aktuelle tidspunktet, og rekkefølgen ikke betyr noe. Dermed blir den begrensede spredningsfremstillinga i treet uavhengig av tidligere bevegelser for spotprisen.

Verdiene i hvert tidssteg er organisert fra lavest til høyest. En slik organisering medfører at det etter en opp-(ned)bevegelse, så vil det mest ekstreme ned-(opp)scenarie bli droppet fra beregningene fordi det ikke er noen mulig sti til denne noden(se Figur 4.1). Dette vil ha praktiske konsekvenser for forventningsverdien i hvert tidssteg, samtidig som det er med å gi en korrelasjon mellom periodene [Rubenstein, 1994].

4.1.4 Markedspris på risiko

Fra standard finanst teori, vet vi at avkastningen på et underliggende produkt som følger en stokastisk prosess, er avhengig av risikoen på det underliggende produktet [Brealey og Myers, 2003]. Høy risiko gir høyere avkastningsmuligheter. Et vel så interessant mål er avkastning for hver enkelt enhet risiko man tar. Hull viser at overskytende avkastning utover den risikofrie renta, er lineært avhengig av den såkalte markedsprisen på risiko. Det vil altså si forskjellen mellom driften i en standard geometrisk brownsk bevegelse (GBM) og risikofri rente, dividert på volatiliteten på det underliggende produkt. Resonnementet tar utgangspunkt i den fundamentale antagelsen om at prisbevegelsen for en gitt vare, som for eksempel spotprisen, følger en GBM. Fra CAPM⁶ har man at forventet avkastning kan uttrykkes ved μ etter følgende ligning:

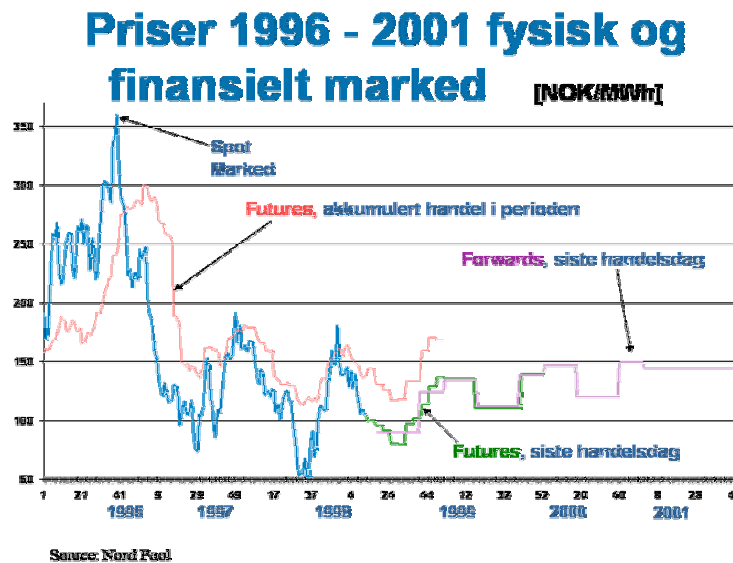
$$\mu = r + \phi \sigma \rho_{pm} \quad (4.8)$$

Her er ρ_{pm} korrelasjonskoeffisienten mellom avkastningen i markedet og spotprisen, σ er variansen i avkastningen til produktet og ϕ er målet på markedsrisikoen. Når r er den risikofrie renten, så vil μ beskrive den forventede avkastningen til det underliggende produktet. Dermed kan man eksplisitt uttrykke CAPM sin representasjon av markedsprisen på risiko som:

$$\lambda = \phi \rho_{pm} \quad (4.9)$$

Risikopremien er, som det vil fremgå av kapittel 4.1.5, et uttrykk for sammenhengen mellom forventet spotpris og forwardpris. Mens denne verdien er null eller positiv for handling av forward på de fleste andre råvaremarkeder, finner blant annet Botterud et al (2002) en signifikant oftere negativ risikopremie på å holde en terminkontrakt på strøm. Det vil si at futureprisen i gjennomsnitt har ligget over spotprisen i den faktiske uke for levering i analyseperioden 1995-2001. Det samme resultatet går frem av Figur 4.2.

⁶ Capital Asset Pricing Modell. For nærmere beskrivelse se [Brealey and Myers, 2003]



Figur 4.2 Sammenligning av spotpriser og futurepriser i perioden 1996 og 2001

Undersøkelser av denne sammenhengen er imidlertid ikke entydige, og Bernseter (2003) antyder at det for lange kontrakter er en positiv risikopremie, men at den på kort sikt er negativ. Han viser også at andre faktorer er viktig for størrelse og fortegn på risikopremien, og finner blant annet en god korrelasjon mellom størrelsen på risikopremien og den hydrologiske totalressursen [Bernseter, 2003].

4.1.5 Sammenhengen mellom forwardpris og spotpris

Gitt en risikofri verden så skal prisen på en forwardkontrakt være en beskrivelse av spotprisen på et fremtidig tidspunkt T , etter sammenhengen [McDonalds,2003]:

$$F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)} \quad (4.10)$$

T er her forfallstidspunkt for kontrakten, t er tidspunkt for kontraktinngåelse, r er risikofri rente, S_t er spotprisen ved inngåelse av kontrakten og $F_{t,T}$ er forwardprisen observert ved tid t med forfall ved T .

For strøm blir prisen, som nevnt i kapittel 2.1, satt som likevekten mellom etterspørsel og tilbudet til enhver tid. På grunn av at etterspørselen eller tilbudet i dag ikke nødvendigvis har noe med etterspørsel og tilbud i fremtiden, så vil strøm i dag og en gang i fremtiden kunne betraktes som to ulike varer [Audet et al, 2002]. Dette gjør sitt til at sammenhengen mellom spotpris og forwardpris ikke er så rett frem som i standard finanstheori, og at arbitrasjeargumentet ikke holder alene.

Forventet avkastning kan uttrykkes som $\mu = \alpha + \delta$, der α er forventet drift i prisprosessen og δ beskriver dividenden som betales i perioden. Når det gjelder dividenden, så settes denne ofte til 0 på grunn av ikke-lagrings egenskapen for strøm. Tar man hensyn til at man har muligheten til å lagre vann i magasinene kan man allikevel snakke om en verdi på dette, men det vanlige er å sette denne til null. Dermed kan fremtidig forventet spotpris i tidspunkt T når man befinner seg i tidspunkt t , uttrykkes som:

$$E[S_T] = S_t e^{\mu(T-t)} \quad (4.11)$$

For å unngå at dette skal gi opphav til risikofri profitt må forwardkontrakten prises slik at verdien av å holde en kontrakt og ha en andel i underliggende må være like i en risikonøytral vurdering. Kombinert med (4.10) gir dette et uttrykk for forwardprisen:

$$F_{t,T} = E_t(S_t) e^{(r-\mu)(T-t)} \quad (4.12)$$

Forwardprisen blir dermed proporsjonal med den forventede spotprisen. Ut ifra diskusjonen i foregående delkapittel, kan en representere markedsprisen på risiko ved hjelp av CAPM:

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad (4.13)$$

Innsetting av (4.13) i (4.12) gir da:

$$F_{t,T} = E_t[S_t] e^{-\lambda\sigma(T-t)} \quad (4.14)$$

Her er λ definert med positivt fortegn slik at en positiv markedspris på risiko impliserer at forwardprisen ligger lavere enn forventet spot. Dette viser at forwardprisen ved tidspunkt T er den forventede spotprisen korrigert for markedsprisen på risiko [Hull, 2003]. Forwardprisen er dermed den risikonøytrale forventningen til spotprisen ved tidspunkt t .

Intuisjonen bak denne ligningen er som følger. Ettersom lagringsmulighetene for elektrisitet er minimale og lagrings-og eiefordelen ofte sees bort ifra, eksisterer futuremarkedet for elektrisitet som et resultat av markedets behov for å sikre seg mot store svingninger i markedet. I tillegg er det spekulanter som både kjøper og selger kraft basert på forventninger om at prisene vil gå opp eller ned i fremtiden. Disse forventningene baserer seg gjerne på spotprismodeller som EMPS-modellen [Fleten og Lemming, 2003].

4.1.6 Justering for risiko

Finansteorien har to hovedmåter å verdisette fremtidige usikre kontantstrømmer. Den ene måten benytter seg av arbitrasjeargumenter, som risikonøytral verdisetting, mens den andre angrepsvinkelen er å ta utgangspunkt i likevektsteori [Danthine og Donaldson, 2002]. I dette delkapittelet vil det bli vist hvordan sammenhengen mellom bruk av forventede spotpriser og terminpriser henger sammen med utgangspunkt i likevektsteori.

Eksistensen av et finansielt marked for handel av kraft skal i teorien sikre at prisene er transparente og at de reflekterer den reelle økonomiske verdien av fremtidig levering av underliggende [Hull, 2003]. For en vannkraftprodusent vil dette innebære at han bør bruke terminprisene som input i produksjonsplanleggingen. En slik fremgangsmåte vil gi fremtidige kontantstrømmer som kan diskonteres med en diskonteringsfaktor ∂_i , der

$$\partial_i = \frac{1}{(1 + r_f)^i} \quad (4.15)$$

og r_f er den risikofrie renten og indeks i markerer ulike tidsperioder

Dersom produsenten ikke benytter seg av markedets priser, men bruker forventet spotpriser i produksjonsplanleggingen må man justere diskonteringsfaktoren i forhold til hvilken risiko prisene innehar. Denne forskjellen kan uttrykkes ved hjelp av risikopremien, som nevnt over. Dermed diskonteres de fremtidige inntekter med en diskonteringsfaktor ∂_i^J , som uttrykkes som:

$$\partial_i^J = \frac{1}{1 + (r_f + \lambda)} \quad (4.16)$$

der ∂_i^J representerer den risikojusterte diskonteringsfaktoren i tidspunkt i , og λ er risikopremien for produktet som vist i ligning (4.13). Som det ble antydnet i kapittel 4.1.4, er det ikke alltid like lett å estimere denne verdien. Den må estimeres ut ifra gjeldende data, og det kan være en krevende prosess som innebærer blant annet glatting av forwardkurver og definering av riktige produkt. En kan imidlertid finne den korrekte diskonteringsfaktoren ved bruk av følgende forenklet resonnement. Gitt et scenarietre av typen i Figur 4.1 med fremtidige forventede spotpriser som danner grunnlaget for en produksjon. Den forventede profitten $E(\pi_t)$, skal replikkere terminstrukturen for futureprisene diskontert med den risikofrie renten for alle fremtidige tidspunkt t å følgende måte:

$$\frac{E(\pi_t)}{1 + \gamma_t} = \frac{p_f}{1 + r_f} \quad \forall t \quad (4.17)$$

Dermed kan en finne rett, justert diskonteringsfaktor γ_t , og metodene blir identisk i forhold til behandling av risiko. Med en slik fremgangsmåte har en sikret seg at den totale risikoen som gjenspeiles i futuremarkedet er tatt høyde for i bruken av spotprognosene.

4.1.7 Kompletthet i markedet

En viktig forutsetning for at det skal være en entydig sammenheng mellom terminpris og spotpris, er at markedet er komplett. Det vil si at markedet er så likvid at det eksisterer prising av alle de aktuelle risikoene som er med i scenariene som beskriver utviklingen av kontantstrømmene. Med aktuelle risikoer menes i denne oppgaven pris- og tilsigsrisiko. En annen måte å si dette på er at markedet har gjort seg opp en mening, og priset risikoen for alle mulige produkter som er relevante i verdivurderingen, slik at dette kan brukes i verdisettingen. Det betyr at det skal eksistere et bud eller en kontrakt for akkurat den sammenhengen mellom pris og tilsig som hver node definerer [Danthine og Donaldson, 2002].

Dersom dette ikke er tilfellet, vil markedsverdivurderingen ikke bli sann i den forstand at det ikke er handlet på produktet [Danthine og Donaldson, 2002]. Produktet kan i denne sammenhengen være kontrakter med ulik lengde, der prisen skal reflektere hvilken risiko markedet finner i den aktuelle perioden. Dersom det for eksempel er knyttet stor usikkerhet og høy risiko for en enkelt time midt inne i en blokkontrakt, vil ikke prisen på blokkontrakten avspeile dette ettersom blokken gjenspeiler gjennomsnittet over hele blokken. Et prisscenario med timesoppløsning vil dermed representere et ikke komplett marked.

Når det gjelder graden av komplettheten i kraftmarkedet, så kommer det an på hvilken av de to risikoene som skal betegnes. Ettersom det ikke eksisterer noe marked for tilsig, vil dette ikke kunne defineres som komplett. Sannsynligheten for at et slikt marked skal dukke opp er også svært liten ettersom vannressursene bare kan benyttes i et enkelt vassdrag. Den systematiske risikoen for tilsiget antas imidlertid ofte til å være 0 for vannkraftprodusenter [Fleten, 2003b].

For pris eksisterer det derimot et velfungerende marked. Defineres tidsperiodene i produksjonsplanleggingsproblemet til å være identisk med lengdene på kontraktene som handles, kan man snakke om et tilnærmet komplett marked. Det vil i denne oppgaven ikke gås grundigere inn på diskusjonene om graden av kompletthet i det finansielle markedet, men viser til at den økende likviditeten i markedet impliserer en bedret kompletthet.

4.2 Volatilitet

Det har i de foregående avsnittene vært mye fokusert på risiko. Et vanlig uttrykk for risiko er volatiliteten, som betegnes med σ , og som nevnt i kapittel 2.1.1, er volatiliteten i kraftmarkedet betydelig. Her vil det bli en grundig gjennomgang av hva dette innebærer og ulike måter og måle denne parameteren på.

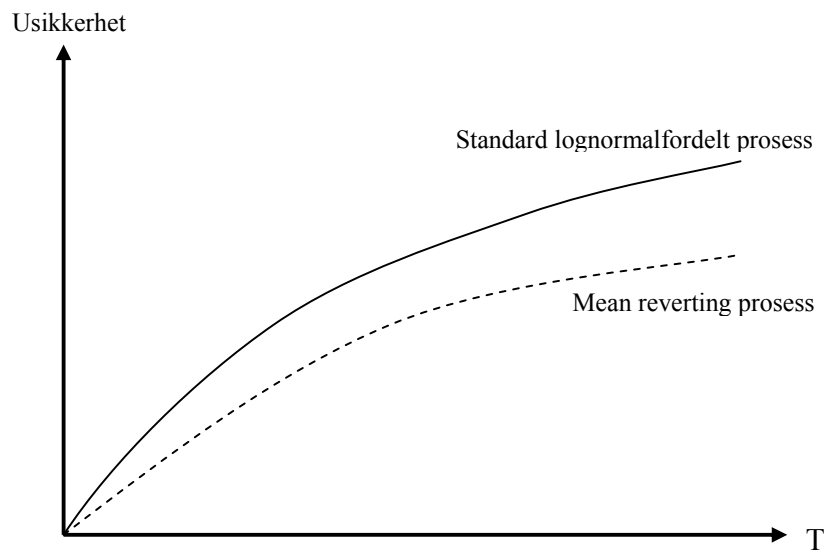
Det kan være naturlig å starte med en redegjørelse for forskjellen mellom volatilitet og usikkerhet. Selv om risikoen både kan øke og minske med tiden, så vil usikkerheten alltid øke [Mun, 2002]. Dette gir seg utslag i at selv om risikomålet eller volatiliteten i mange modeller settes konstant i tid, så vil usikkerheten i prognosene øke som en funksjon av tiden.

Usikkerheten til fremtidig pris kan for en lognormalfordelt variabel beskrives ved hjelp av variansen til endringen til kontraktverdien. Bjerksund et al (2000) foreslår en volatilitetsstruktur som tar utgangspunkt i endringene av verdien på kontrakten. $f(t, T)$ beskriver verdien til en kontrakt som er inngått i tiden t for levering i T , mens det forutsettes at det kan handles europeiske opsjoner med $(\tau - t)$ til forfall. Ettersom avstanden mellom kontraktsinngåelse og levering blir lenger, øker usikkerheten som funksjon av tid til levering. Koekebakker og Ollmar (2001) fant at 25 % av variasjonen i terminprisene kunne forklares med tid til levering som eneste parameter. For en kontrakt kan usikkerheten i verdien dermed defineres som:

$$\text{Usikkerheten} = \sqrt{\text{Var} \left(\ln \left(\frac{f(\tau, T)}{f(t, T)} \right) \right)} \quad (4.18)$$

For en lognormalfordelt variabel som følger en GBM, vil dette gi seg utslag i at usikkerheten vokser med tiden t til levering etter formelen $\sigma\sqrt{(T-t)}$.

I Figur 4.3 vises hvordan denne usikkerheten øker som funksjon av tid til levering, T . I samme figur er det også vist utviklingen av en mean-reversion prosess. Strømprisen følger som nevnt en slik prosess og som allerede gjort rede for, vil det medføre at usikkerheten har en slakere voksende tendens enn en prosess uten denne egenskapen.



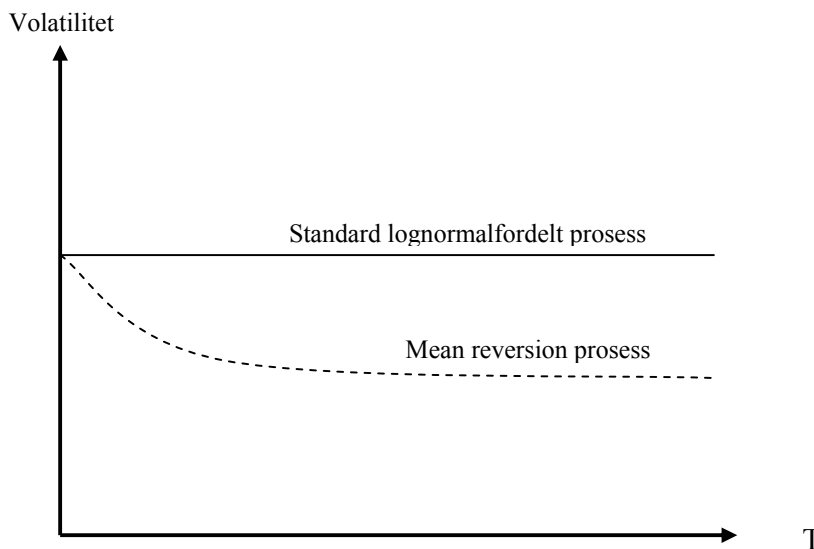
Figur 4.3 Illustrasjon av usikkerhet for en stokastisk prosess, som funksjon av tid til levering

Volatiliteten er den annualiserte verdien av usikkerheten. Annualiseres de to prosessene som er vist i Figur 4.3 får vi et uttrykk for volatiliteten σ , som kan beskrives som

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{Var}\left(\ln\left(\frac{f(\tau, T)}{f(t, T)}\right)\right)}{(\tau - t)}} \quad (4.19)$$

Annualiseringsfaktoren $(\tau - t)$ indikerer hvor lenge det er igjen av handleperioden på kontrakten. Figur 4.4 viser at en GBM har en konstant volatilitetsfunksjon, og dermed vil den lineære sammenhengen mellom risiko og utbytte som forutsettes i CAPM, være tilstedet for en prosess som følger en GBM.

For strømpriser som har mean reversion egenskaper, blir volatiliteten derimot ikke konstant. I motsetning til en GBM så vil prisene på lang sikt trekkes mot et gitt middelnivå, og utfallsrommet blir dermed mindre enn for en GBM. Ettersom tiden til levering øker, vil også den annualiserte volatiliteten få en fallende kurve som vist med den stiplete kurven i figuren.



Figur 4.4 Volatilitetsfunksjon for en standard GBM og en mean-reverting prosess

Det er to måter å finne et mål på volatiliteten. Enten kan man estimere den på bakgrunn av historiske data eller så kan man benytte den markedsimplisitte volatiliteten. I de påfølgende avsnitt bli redegjort for disse to.

4.2.1 Historisk volatilitet

Historisk volatilitet er et estimat som baserer seg på endringen i historiske data. Verdien regnes ut ved hjelp av analyser av hvordan for eksempel spotprisen har endret seg fra dag til dag, eller fra uke til uke og så beregnes volatiliteten som det annualiserte standardavviket til disse endringene, etter ligning (2.1) i kapittel 2.1.1.

Med god informasjonstilgang til markedet vil dette gi et riktig bilde av hvordan volatiliteten har vært i den aktuelle tidsperioden tidligere år. Gitt at situasjonen fra år til år er identisk, så vil dette estimatet på volatiliteten være forventningsrett også fremover i tid. Dette er naturlig nok sjelden tilfelle, men den historiske volatiliteten kan allikevel gi verdifull informasjon om hvordan prisene vil utvikle seg i framtiden.

Spotprognosene som kommer fra EMPS-modellen, kan sies å være basert på historiske data ettersom en viktig input er tilsigsrekker som kommer fra historiske tilsigsdata. Som nevnt i kapittel 3.3.1 er dette en prisprognose som definerer 60 ulike scenarier med ukesoppløsning for fremtidig prisutvikling. Denne prognosen, som endres hver uke, gir dermed indirekte et estimat på hvilken volatilitet som forventes i den aktuelle perioden. Det annualiserte standardavviket til de ukentlige endringene gir da volatilitetsmålet.

At volatilitetsmålet er basert på ukentlige endringer gjør ikke nødvendigvis estimeringen dårligere [McDonald, 2003]. En slik oppløsning vil innebære at døgnvariasjonen og helg-hverdagsvariasjonen ikke blir tatt hensyn til. Spesielt for elektrisitetsprisen så vil de klare deterministiske svingningene mellom natt og dag, og helge- og hverdager ikke bli representert i volatilitetsmålet. Det viktige for en kraftprodusent er imidlertid å estimere volatilitetsmålet ut ifra tidsoppløsningen til planleggingsperiodene. På lang eller mellom lang sikt er det derfor ikke hensiktsmessig å benytte seg av korte tidsintervall i planleggingen siden det er gjennomsnittlig varians over perioden som er av interesse.

Selv om man annualiserer standardavviket er det viktig å legge merke til at varians og standardavvik er spesifikk for den historiske perioden dataene over spotprisendringene er hentet fra. Seppi (2003) påpeker at volatiliteten til en stokastisk prosess er et uttrykk for den risikonøytrale sannsynlighetsfordelingen i leveringstidspunktet. Videre sier han at den lokale dynamikken eller usikkerheten, i hvert punkt frem til levering, bare påvirker volatiliteten i den grad disse påvirker fordelingen i periodens slutt. Det gir derfor liten nytte å sammenligne volatilitetsmål mellom fordelinger dersom de ikke henviser til eksakt samme periode.

4.2.2 Implisitt volatilitet

Den markedsimplisitte volatiliteten er et uttrykk for den volatiliteten som til enhver tid reflekteres av prisene i markedet. Ut i fra opsjonspriser på underliggende terminkontrakter, kan en finne hvilken volatilitet som markedet implisitt mener at produktet er gjenstand for den aktuelle dagen. I motsetning til historisk volatilitet, er den implisitte volatiliteten et foroverrettet estimat på variasjonen [McDonald, 2003].

Utrekningene tar utgangspunkt i Black⁷-76-formelen for opsjonsprising på en forward, og bruker Newton-Raphson-metoden for å komme frem til den gjeldende volatilitetsverdien. For å beskrive hvilken risiko dette er et mål på litt mer i detalj, kan vi ta utgangspunkt i formelen for volatiliteten som ligger til grunn for Black-76, når opsjonen har $\tau - t$ igjen til innløsning:

$$\sigma \equiv \sqrt{\frac{\text{Var}_t^* \left[\ln \left(\frac{f(\tau, T)}{f(t, T)} \right) \right]}{(\tau - t)}} \quad (4.20)$$

Av ligningen går det frem at volatiliteten etter denne formelen gjenspeiler den risikonøytrale beskrivelsen av usikkerheten frem til forfallsdag for opsjonen. Etter forfall handles ikke opsjonen og det er i teorien dermed heller ingen usikkerhet knyttet til levering av kontrakten på tross av at det er en tid før leveringen starter.

Implisitte volatiliteter beregnes hver handledag i handelsperioden. Ettersom ny info blir tilgjengelig i markedet vil disse verdiene svinge i takt med opsjonsprisendringene. En

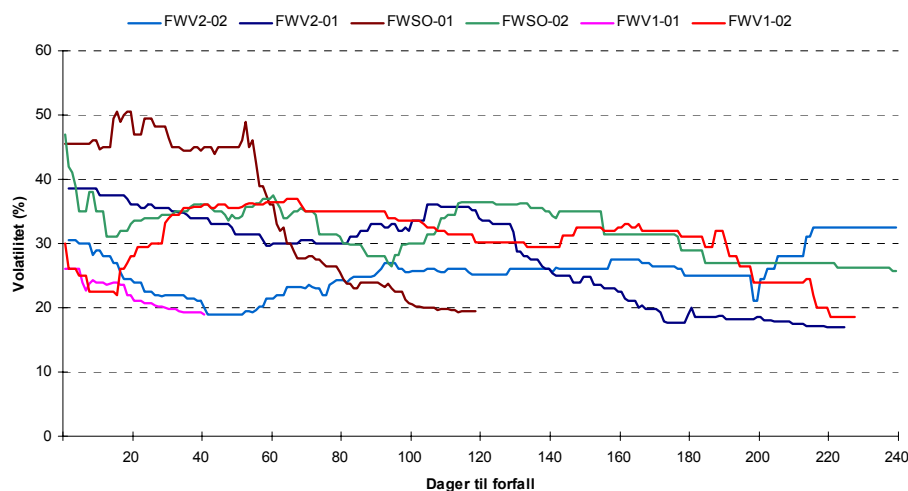
⁷ For nærmere beskrivelse, se [Hull, 2003]

kritisk forutsetning for riktigheten i verdiene er at opsjonen og kontrakten handles synkront. Det vil si at det handles opsjoner på de aktuelle kontraktene helt frem til siste handlede underliggende kontrakt [Hull, 2003]. I motsatt fall kan en asynkron handling medføre at ikke all informasjonen er gjenspeilet i de implisitte volatilitetene, og at verdiene ikke forteller sannheten om markedets oppfatning. I denne oppgaven forutsettes det at de implisitte volatilitetene gjenspeiler en synkron handling. Økende likviditet i det finansielle markedet vil bidra til at denne forutsetningen blir riktigere.

I kraftmarkedet handles det mest opsjoner på forwardkontaktene FWV1, FWSO, FWV2 og FWYR. Derfor er det også disse opsjonsprisene som gir det mest korrekte bildet av de implisitte volatilitetene. Ettersom en av de fundamentale forutsetningene i Black-76 formelen er en konstant volatilitet, betyr det at verdien som finnes vil være et gjennomsnitt av volatilitetene over tiden frem til levering. Clewlow og Strickland (2000) er blant de som viser til at volatilitetene ikke er konstant over tid, men snarere er volatil i seg selv.

4.2.3 Terminstruktur i de implisitte volatilitetene

Koekebakker og Ollmar (2001) har foretatt empiriske studier for hvilke parametere som er med å forklare utviklingen i volatiliteten, og fant ved bruk av PCA-analyse at mens det måtte 10 ulike faktorer til for å forklare 90% av variasjonen i forwardmarkedet, så ble hele 25 % av dette forklart med tid til levering som eneste parameter. Typisk vil kontraktspris og sesongsvingninger være med å påvirke volatilitetene. Lucia og Schwartz (2001) påpeker for eksempel at volatiliteten er høyere på sommeren enn på vinteren.



Figur 4.5 Utvikling av implisitte, annualiserte volatiliteter som funksjon av tid til forfall. Figuren viser volatiliteter for de tre sesongkontraktene i 2001 og 2002 høyere.

I Figur 4.5 er det vist hvordan de implisitte, annualiserte volatilitetene på henholdsvis FWV1, FWSO, og FWV2 har utviklet seg mot tid til levering, i 2001 og 2002. Figuren

viser en noe uoversiktlig volatilitetsstruktur, men felles for alle er at volatiliteten har en stigende tendens den siste tiden før forfall. Man kan også se en tendens til at volatilitetene for sommerkontraktene ligger over vinterkontraktene.

4.2.4 Volatilitetsmodeller

Basert på Lucia&Swarth(2001) sin modell for prisprognosering fra kapittel 4.1.1, kan det vises at disse forutsetter en volatilitetsfunksjon som er gitt av

$$\sigma_1(t, T) = \sigma e^{-\kappa(T-t)} \quad (4.21)$$

der både σ og κ er positive konstanter. Her er t tiden for inngåelse av kontrakt, mens T er tid til levering. κ er konstanten som beskriver hastigheten på mean-reversion egenskapen. Ut i fra denne likningen ser man at den vil skape en fallende volatilitet ettersom T øker. Det er i samsvar med teorien om en fallende annualisert utvikling, men svakheten med en slik modellering er at når $T \rightarrow \infty$ så vil volatiliteten gå mot 0.

Koekebakker og Ollmar (2001) foreslår to ulike fremgangsmåter for å modellere volatiliteten i en forwardkurvmodell. Den ene forutsetter en deterministisk volatilitetsfunksjon som er uavhengig av forwardprisnivået, mens den andre tar hensyn til prisnivået til forwarden. Utviklingen av forwardkurven vil være gitt av summen av alle små usikre endringer i hvert tidssteg frem til levering. Ved å betrakte prisen på forwardkontrakten i t , med levering i T , uten å ta hensyn til forwardprisnivået, kommer Koekebakker og Ollmar frem til følgende ligning for å beskrive prisprosessen:

$$f(t, T) = f(0, T) + \sum_{i=1}^K \int_0^t \sigma_i^A(s, T) dW_i(s) \quad (4.22)$$

Her er $f(0, T)$ prisen i dag på den aktuelle kontrakten og altså kjent, mens σ angir volatiliteten i hvert enkelt tidssteg frem til det aktuelle tidspunkt t . $dW_i(s)$ er her uavhengige brownske bevegelser i hvert enkelt tidssteg.

For en prisavhengig modell så kommer Koekebakker og Ollmar på tilsvarende måte frem til at prisen beskrives som

$$f(t, T) = f(0, T) e^{\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \int_0^t \sigma_i^2(s, T) ds \right) + \left(\sum_{i=1}^K \int_0^t \sigma_i(s, T) dW_i(s) \right)} \quad (4.23)$$

For begge modellene så er prisene representert med volatilitetsmål som er deterministiske i hver periode. Dette er også behandlet av blant andre Bjærksund et al (2001) som testet ut

ulike modeller for estimeringen av volatilitetsfunksjoner. Forfatterne argumenterte for at den beste volatilitetsmodellen burde ta hensyn til forwardprisnivået.

Disse lanserte en enfaktor modell som virket noe mer realistisk enn modellene vist i ligning(4.24). Enfaktormodellen er gitt som

$$\sigma_1(t, T) = \frac{a}{T - t + b} + c \quad (4.25)$$

Her er a , b og c positive konstanter som bestemmes ved regresjon. Også denne modellen tar hensyn til den fallende volatilitetsstrukturen, men ettersom $T \rightarrow \infty$ går volatiliteten her mot en konstant verdi c , i stedet for null som vist i ligning (4.21). Koekebakker og Ollmar (2001) konkluderer med at det med sesong- og halvårlig oppløsning på tidsintervallene så er ikke volatiliteten konstant i tidsperioden. Dermed foreslår de å utvide modellen sin til å ta hensyn til stokastisk volatilitet.

5 Modellen

Modellen beskrevet i dette kapittelet er en forenklet modell som har til hovedoppgave å forsøke å svare på hvorvidt man i optimeringen av produksjonen bør bruke terminpriser og maksimere markedsverdien av produksjonen, eller å maksimere forventet profitt ut i fra en spotprognose. Modellen tar opp prinsippene diskutert i kapittel 3 om produksjonsplanleggingsproblemet med en del forenklinger. Optimeringsproblemet løses ved bruk av Solver i Excel.

5.1 Modellbeskrivelse

I modellen forutsetter vi at vannkraftsystemet er en enmagasinmodell. Det betyr at systemet kan beskrives med et magasin og en tilhørende kraftstasjon. Produksjonsdata og kraftdata som beskriver dette systemet kommer fra Norsk Hydro Energi. Av dem har vi også fått tilgang til tilsigsdata som tilhører dette systemet.

Tabell 5.1 Systemdata brukt i modelleringen

Magasin		Kraftstasjon	
Maksimal fylling (Mm^3)	1064	Energiekvivalent (KWh/m^3)	1,81
Mid.regulert tilsig ($\text{Mm}^3/\text{år}$)	1590	Maksimal vannføring (m^3/s)	75

5.1.1 Forutsetninger gjort i modelleringen

Modellen består av 4 perioder. Disse periodene kan i prinsippet være av forskjellig lengde, men det faller naturlig å ha periodelengde lik produkter handlet på Nord Pool. Som diskutert i kapittel 4.1.7 sikrer dette at forutsetningen om et komplett marked i best mulig grad er tatt hensyn til. Derfor har vår periodelengde vært tilsvarende en blokk i kraftmarkedet. Vi har også testet modellen med bruk av sesonger som periodelengde.

Vi har kjørt optimering av produksjonen med start i uke 17 2001 og uke 40 2001. Vi ønsket å teste vår modell med tanke på ulike tilsigsforløp og startforutsetninger. Ved uke 17 befinner man seg i starten av vårflommen med mye tilsig og nokså tomme magasiner. I uke 40 befinner man seg i en annen situasjon, med noenlunde fulle magasiner og lavere tilsig framover mot vinteren. Samtidig var 2001 det man kan kalle et normalår med tanke på priser og tilsig, noe som gjorde valg av dette året naturlig.

Det er gjort en del forenklinger i modellen i forhold til teorien beskrevet i de foregående kapitlene. Markedsprisen på tilsigsrisikoen er satt til null selv om produsentene opplever risiko i tilknytning til tilsiget. Da det ikke finnes noe marked for denne type risiko er det imidlertid en vanlig antagelse at det ikke er noe markedspris på tilsigsrisikoen. Dette vil

på sin side medføre at tilsiget blir behandlet likt for alternativet med markedspris og forventa spotpris. Samtidig er diskontering av kontantstrømmene utelatt. Vår periodelengde er relativt kort slik at denne diskonteringen får forholdsvis lite å si for produksjonsstrategien.

I tillegg har vi brukt binomisk tre for å beskrive prisutviklingen. Denne metoden forutsetter at prisene er lognormalfordelte. Våre tester av prisprognosene viser at dette ikke er tilfelle (se kapittel 5.4.1 og vedlegg 1). Av hensyn til enkelhet og tiden vi har hatt til rådighet har vi allikevel brukt denne metoden for modellering av prisen.

5.1.2 Optimering

Modellen er oppbygd i Excel ved bruk av standard prinsipper for produksjonsplanlegging. Vi definerer vårt scenariotree hvor hver node n i treet har en pris og et tilsig gitt av det binomiske treet. Alle noder er element i mengden $\mathbb{N}$, mens vi definerer noder som er i siste periode som element i mengden $\mathbb{Z}$. Hver node har sin unike sannsynlighet α_n for å komme til denne noden. I tillegg definerer vi $f(n)$ som foreldrenode. I vårt binomiske tre vil hver foreldrenode ha to noder under seg. Dermed kan vi definere objektfunksjonen i vår modell:

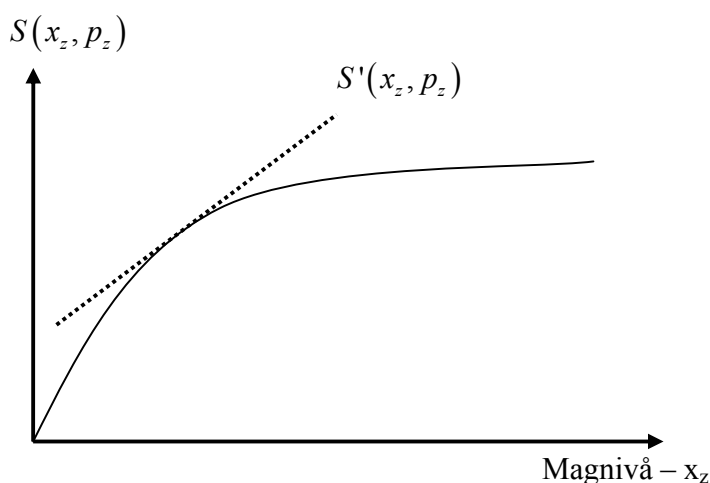
$$\text{Maksimer} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \cdot p_n \cdot q_n + \sum_{z \in \mathbb{Z}} \alpha_z \cdot S(x_z, p_z) \quad (5.1)$$

$$x_n = x_{f(n)} + a_n - q_n - s_n \quad (5.2)$$

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \quad (5.3)$$

$$q_{\min} \leq q \leq q_{\max} \quad (5.4)$$

Her er x_n magasinnivå i node n , a_n er tilsiget, s_n er spill, q_n er produksjon og p_n er prisen i node n . Ligning (5.3) og (5.4) gir beskrankninger på henholdsvis magasinnivå og produksjon, disse er de samme i alle periodene i vår modell. $S(x_z, p_z)$ er verdien av sluttmagasinet som en funksjon av magasinnivå og prisen. Denne funksjonen er basert på forutsetningen om at den marginale verdien av ekstra vann i magasinet ved analyseperiodens slutt er avtakende med økende magasinfylld. Når magasinet nærmer seg maksimal fylling vil overløpsfaren øke og den marginale nytten av ekstra vann vil avta. Dermed vil man få en funksjon for $S(x_z, p_z)$ som illustrert i Figur 5.1.



Figur 5.1 Verdien av sluttmagasin i siste periode som funksjon av magasinnivå

Funksjonen $S(x_z, p_z)$ kan representeres på følgende måte:

$$S(x_z, p_z) = ax_z^2 + bx_z + c \quad (5.5)$$

Her er konstantene a , b og c estimert ved bruk av ligningene (5.6), (5.7) og (5.8), og x_{spes} er et valgt nivå på sluttmagasinet.

$$a = \frac{p_z}{2(x_{spes} - x_{maks})} \quad (5.6)$$

$$b = x_{maks} \cdot p_z (x_{maks} - x_{spes}) \quad (5.7)$$

$$c = -a \cdot x_{min}^2 - b \cdot x_{min} \quad (5.8)$$

Disse gir en konkav funksjon for $S(x_z, p_z)$. Stigningstallet til $S(x_z, p_z)$ er gitt ved :

$$S'(x_z, p_z) = 2ax_z + b \quad (5.9)$$

Denne funksjonen angir vannverdien for sluttmagasinet i hver node i den siste perioden. Ut fra vannverdiene i siste periode, beregnes vannverdier i forrige periode ved hjelp av sannsynlighetene α_z . I vår modell har vi to noder ut fra hver foreldrenode, og dermed vil vannverdien i foreldrenoden beregnes som i ligning (5.10), hvor z_1 og z_2 er nodene ut fra foreldrenoden.

$$v_{f(n)} = \frac{\alpha_{z_1} \cdot v_{z_1} + \alpha_{z_2} \cdot v_{z_2}}{\alpha_{z_1} + \alpha_{z_2}} \quad (5.10)$$

Optimeringsmodellen bruker disse vannverdiene for å finne optimal produksjonsstrategi. Man vil produsere så lenge den marginale inntektsøkningen av å produsere en enhet er større enn vannverdien. Hvis noen beskrankninger blir aktive vil det optimale være å produsere slik at prisen er lik vannverdien i hver node.

Solveren i excel løser optimeringsproblemet ved hjelp av en iterativ prosedyre som forbedrer målfunksjonen ved å variere produksjon i nodene med hensyn på beskrankningene.

5.2 Modellering av pris ved hjelp av binomisk tre

I modellen er det tatt utgangspunkt i at prisen fra en periode til en annen enten kan gå opp eller ned. Det gjør det naturlig å bruke binomisk tre for å beskrive den forventede utvikling av prisene framover i tid. Dette treet skal i størst mulig grad gjenspeile usikkerheten i de framtidige prisene. Usikkerheten i prisene representeres av volatiliteten, σ . Opp og ned bevegelser i treet blir beregnet med den alternative prosedyren for utspenning av binomisk tre som er beskrevet i kapittel forklart i kapittel 4.1.2:

$$u = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}} \quad (5.11)$$

$$d = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}} \quad (5.12)$$

Med disse ligningene som utgangspunkt etablerte vi et pristree for terminpriser og et pristree for forventede spotprognoser. r er den risikofrie renta og er satt til samme verdi i begge pristræne. Ved å modellere pristreet på denne måten slipper vi å beregne overgangssannsynlighetene i treet fordi alle risikonøytrale sannsynligheter ved utspenning av treet er 0,5.

5.2.1 Utspenning av tre for terminpriser

Ved utspenning av det binomiske treet for terminpris må konstantene δt og σ bestemmes. Ved optimering med bruk av sesonger som periodelengde kan vi bruke implisitte volatiliteter fra opsjonsmarkedet direkte for volatiliteten σ i de ulike periodene. δt angir periodelengden i det binomiske treet. Clewlow og Strickland (2000) angir en standard annualiseringsfaktor på $\sqrt{250}$ hvor informasjon om priser kun kommer

på dager hvor det handles i markedet, og vi har brukt denne som utgangspunkt i vår treoppbygging. I vårt tilfelle hvor vi bruker annualisert volatilitet i (5.11) og (5.12) er ∂t eksempelvis satt til $\frac{104}{250}$ for å få volatiliteten for SO-01, der 104 er antall handledager i leveringsperioden for SO-01.

Vi har også kjørt optimeringsmodellen med periodelengde på en blokk. Det finnes ikke et opsjonsmarked for blokkene, derfor har vi ikke mulighet til å bruke implisitte volatiliteter. Derfor har vi brukt en volatilitetsmodell [Bjerk Sund et al, 2000] for å finne volatiliteten for disse blokkene. Denne er beskrevet i kapittel 4.2.4, og volatiliteten i denne modellen er uttrykt ved ligning (5.13).

$$\sigma(T, t) = \frac{a}{T - t + b} + c \quad (5.13)$$

I denne modellen må konstantene a , b og c estimeres. Av tidsmessige hensyn har vi ikke selv estimert disse faktorene, men tatt utgangspunkt i [Bjerdal, Skogen, 2002]. Her ble faktorene a , b og c estimert ved hjelp av regresjonsanalyse på et datasett for glattede forwardkurver. I deres analyse fikk a , b og c verdiene 2.511, 5.030 og 0.211, og med disse verdiene fikk vi volatiliteter i periodene som vist i Tabell 5.2.

Tabell 5.2 Annualiserte volatiliteter brukt for etablering av pristre ved ulike periodelengder og starttidspunkt

Periode	Volatiliteter (%) med blokk som periode, start uke 17	Volatiliteter (%) med sesong som periode, start uke 17
1	62,0	45,8
2	46,0	35,5
3	39,0	32
4	35,0	25,8

Det er viktig at den forventede prisen i hver periode tilsvarer prisen observert i markedet. For hver periode har vi laget et pristre med startverdi lik forventningsverdien fra spotprognosen og brukt verdiene i den perioden som tilhører den forventede prisen. For eksempel vil prisene i periode 3 komme fra et tre som er spent ut med startverdi lik den forventete prisen i periode 3 og tilhørende volatilitet. Samtidig vil prisene i periode 2 komme fra et tre som er spent ut med volatilitet og startverdi lik den forventete prisen i periode 2. Prisene med utgangspunkt i forventningsverdi i ulike perioder settes så sammen i et resulterende pristre som brukes i optimeringen. På denne måten er usikkerheten i terminprisene i hver periode ivaretatt samtidig som forventningsverdien til prisen blir riktig.

5.2.2 Utspenning av tre for forventet spotprognose

Det er brukt samme prinsipp ved utspenning av tre for spotprognosen som for terminpristreet forklart ovenfor. Forventingsverdien for prisen i hver periode er beregnet ut i fra spotprisscenariene i spotprisprognosen for perioden. Volatiliteten er beregnet fra spotprisprognoser fra uke 17 2001 og fra uke 40 2001. Med bruk av teorien beskrevet i kapittel 4.2.1 beregnet vi volatiliteten ved å ta standardavviket til alle endringene på ukenivå for alle scenarier i blokken eller sesongen, hvor vi ville estimere volatiliteten. Dette standardavviket ble deretter annualisert med $\sqrt{52}$. Tabell 5.3 viser volatilitetene funnet ut fra spotprognosen i uke 17 og uke 40.

Tabell 5.3 Annualiserte volatiliteter for spotprisprognosen, brukt ved testing av ulike perioder og starttidspunkt.

Volatiliteter fra spotprisprognoser (%)			
Periode	Periodelengde: Blokk Start: uke 17	Periodelengde: Blokk Start: uke 40	Periodelengde: Sesong Start: uke 17
1	13,3	32,9	29,7
2	17,8	17,3	21,2
3	24,7	11,0	40,0
4	29,3	8,0	61,5

5.3 Behandling av tilsig i modellen

Tilsgistallene som er brukt i modellen er beregnet ut i fra tilsgisdataene. Ut i fra disse dataene har vi laget et tilsgistre som vi laget for prisen med to mulige utfall for tilsgiget fra hver node, høyt og lavt tilsig. Korrelasjonen mellom tilsig og pris estimert i kapittel 3.4.4 viser at korrelasjonen mellom pris og tilsig er negativ. I modellen har vi satt korrelasjonen til å være -1. Det vil si at en økning av prisen i det binomiske treet fra en periode til en annen tilsvarer et lavt tilsig i denne perioden.

Tabell 5.4 viser hvilke tall vi har brukt for tilsig ved simulering fra uke 17 med blokk og sesong som periodelengder.

Tabell 5.4 Tilsgistall for simulering fra uke 17 med blokk og sesong som periodelengde.

Periode	Tilsg (GWh)			
	Periodelengde: Sesong		Periodelengde: Blokk	
	Høyt	Lavt	Høyt	Lavt
1	3057	1401	364	121
2	562	235	1093	608
3	233	89	766	341
4	3057	1401	349	150

I modellen er sannsynligheten for høyt og lavt tilsig satt til 0,5 i likhet med prisene. Vi har gått ut i fra at tilsigsdataene er normalfordelt og definerte derfor høyt tilsig til å være 75 persentilen og lavt tilsig til å være 25 persentilen fra dataene. En slik modellering gir en tilsigsvarians som er ulik variansen i pristreet og de to metodene får dermed samme tilsig som input i sitt planleggingsproblem.

5.4 Testing av datagrunnlag

En av forutsetningene for å bruke standard binomisk tre for å beskrive prisutviklingen, er at fremtidige forventede priser er lognormalfordelt på ethvert tidspunkt. For å kunne modellere prisen i det forventede spotpristreet, er det gjort undersøkelser for å teste ut hvilke fordeling som gjelder i disse prognosene. Det er også testet om datagrunnlaget er normalfordelt for eventuelt å kunne bruke en justert utgave av det binomiske treet. Bakgrunnstallene er forventet spotprognose fra EMPS-modellen og det er gjort undersøkelser ved hjelp av statistikkprogrammet MiniTab. For å sjekke egenskapene ved tilsigserien er det også gjennomført tester for disse dataene.

5.4.1 Testing av prisprognoser

Ettersom vår modell har blokk og sesongoppløsning har vi sjekket hypotesen om normalfordeling og lognormalfordeling for hver av disse periodene. Resultatene er vist i vedlegg 5. P-verdiene angir sannsynligheten for å gjøre feil hvis man forkaster nullhypotesen om normalfordeling og lognormalfordeling. Resultatene tyder på at prisene for disse periodene verken er normalfordelt eller lognormalfordelt.

Det er også foretatt tester på om hvordan fordelingen til endringene til spotprisscenariene er. Dette vil som vi har diskutert i 4.2.3 gi et bilde på hvordan volatilitetsstrukturen til prognosene er.

Vi har testet om endringene i spotprisen fra uke til uke er lognormalfordelt eller normalfordelt. Disse har fått betegnelsen dLnS-uke og dS-uke. Datasettet bestod av ukeverdier for alle spotprisscenariene ett år fram i tid. På basis av det som ble argumentert for i kapittel 4.2 om volatilitet, er det ingen nødvendig sammenheng mellom variasjonene på ukenivå og sesongnivå. Det er derfor også foretatt testing på hvordan de estimerte sesongprisene forandret seg, for eventuelt å påvise en lognormal- eller normalfordeling. Disse har fått betegnelsen dS-Sesong og dLnS-Sesong.

Resultatene fra testene finnes i vedlegg 5. Alle fire testene ga p-verdi 0, noe som betyr at prisene verken var lognormalfordelt eller normalfordelt. Man kan også se at kurtosisen for endringene mellom ukene er høy. Den høye verdien, samtidig som det er en relativt liten skjevhet i fordelinga, tyder på at forekomsten av endringer rundt forventningsverdien er betydelig større enn hva som kan forventes i en normalfordeling. Kurtosisen blir imidlertid merkbart mindre for analyser av endringene på sesongnivå.

5.4.2 Testing av tilsigsserier

Tilsigserien beskriver 60 ulike tilsigsår uke for uke. Vi har testet om ukene 17-52 er normalfordelt eller lognormalfordelt. Vedlegg 5 viser at dataene ikke er normalfordelt for disse ukene. 18 av 35 uker som er testet gir en p-verdi på 0. Samtidig viser resultatene varierende kurtosis og skjevhet forskjellig fra null.

I tillegg viser resultatene i vedlegg 5 at p-verdiene for testing av lognormalitet gjennomgående positive verdier. Dette gir indikasjon på lognormalitet for ukesverdiene i tilsigserien.

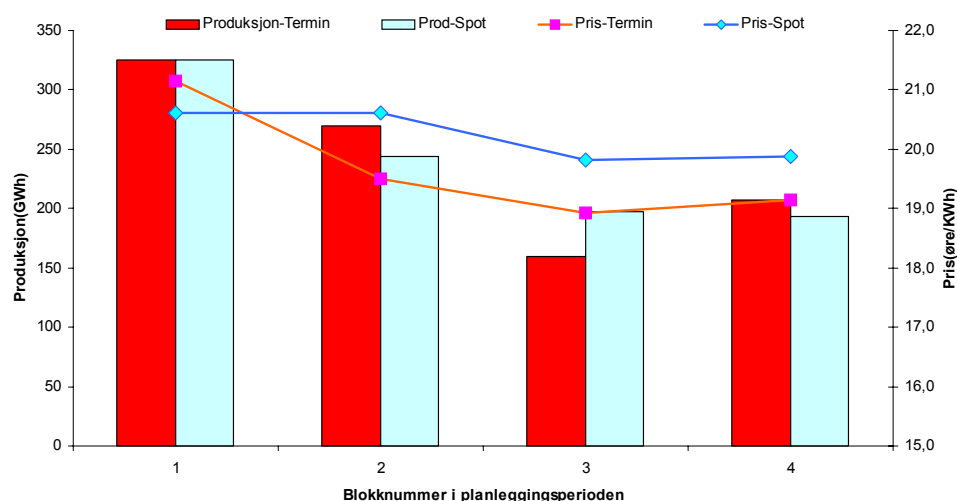
6 Diskusjon av resultater

I dette kapittelet vil vi diskutere de viktigste resultatene fra testingen som er gjort med modellen. Hovedhensikten med simuleringene har vært å forsøke og avdekke ulikheter ved produksjonen når man maksimerer markedsverdi eller maksimerer forventet profitt. Det primære har vært å undersøke om de to alternativene gir ulike bilder av risikoen i planleggingsperioden, og om dette kan ha gitt grunnlag for en ulik produksjonsstrategi. I tillegg har vi forsøkt å fremstille innvirkningene av noen av de mest sentrale forenklingene vi har gjort i modellen. Beskrivelse av ulike simuleringer som er gjort finnes i vedlegg 2 og resultater av simuleringene i vedlegg 3.

6.1 Prisutvikling og produksjonsstrategi

For å frem ulikheter i pris- og produksjonsutviklingen, har vi testet for starttidspunkt i to ulike uker i 2001. Dette for å forsøke å hindre at resultatene kan bli farget av spesielle omstendigheter i markedet på et gitt tidspunkt. Simuleringen benytter blokker av fire uker som periodelengde. Det betyr at den totale planleggingsperioden strekker seg fra uke 17 til og med uke 32 i det ene tilfellet, og fra og med uke 40 til og med uke 3 (2002) for den andre perioden.

Uke 17-32 er en periode hvor vårflommen kommer, slik at tilsigstallene i denne perioden har stor variasjon. Dette er gjort for å forsøke å tydeliggjøre hvordan denne usikkerheten blir behandlet ved simulering med forventet spotpriser og terminpriser og prøve å identifisere eventuelle forskjeller i de to fremgangsmåtene. De detaljerte resultatene er vist i vedlegg 3, men det er interessant å vise hvilken prisutvikling og produksjonsstrategi de to fremgangsmåtene gir.

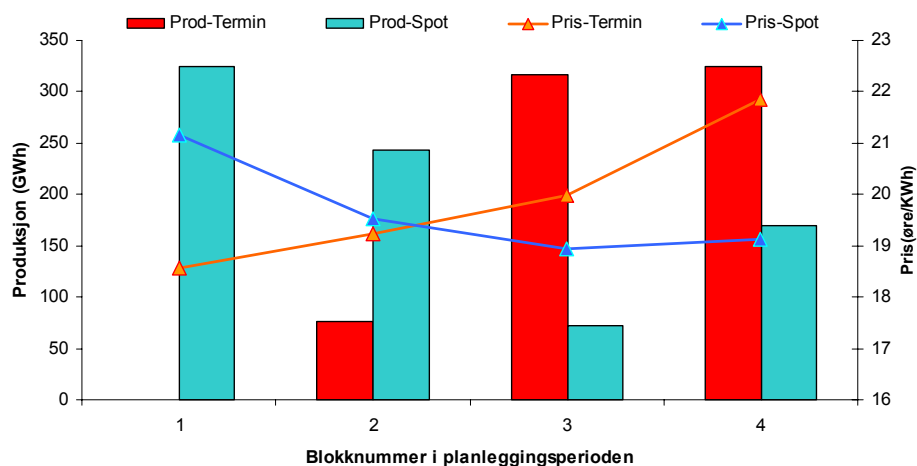


Figur 6.1 Fremstilling av hvordan prisutvikling og produksjonsstrategi for de to alternativene med start i uke 17, 2001. Kurvene indikerer prisutvikling, mens søylene viser planlagt produksjon i de ulike blokkene.

Figur 6.1 viser et plott av prisutvikling og produksjonsstrategier for de to alternativene. Søylene indikerer forventet produksjon i perioden, mens kurvene viser hvordan prisene er forventet å utvikle seg basert på de to ulike fremgangsmåtene, bruk av forventede spotpriser og terminpriser. Som det går frem av figuren blir produksjonsstrategien noe forskjellig, selv om prisene holder seg relativt likt i utvikling. Den forskjellen som kommer til syne, er nettopp på grunn av den marginalt ulike prisutviklingen.

Forskjellen i total produksjonen er bare på rundt 3 GWh (Vedlegg 3, scenario 0). Denne forskjellen utgjør under 1% av totalt forventet tilsig i perioden, og resulterer i en forventet profitt som er ca 24 millioner kroner bedre ved bruk av forventet spotpriser, en forskjell som er så marginal at ingen klare konklusjoner kan trekkes.

Mer interessant er denne sammenhengen i uke 40, som er vist i figur 6.2. Her er produksjonsstrategi og prisutvikling vist ved simulering med uke 40 som utgangspunkt. Når man nærmer seg vinteren vil usikkerheten i tilsiget bli betraktelig mindre enn tilfellet var med start i uke 17 (Vedlegg 6). At en da går inn i en periode med lavere tilsig gjør at modellen ikke i så stor grad blir begrenset av restriksjonene om overløp, og det åpner for større handlefrihet for optimeringen. Dermed kan en forvente at det vil bli større forskjeller her, noe også simuleringene viste.



Figur 6.2 Fremstilling av hvordan prisutvikling og produksjonsstrategi for de to alternativene med start i uke 40, 2001. Kurvene indikerer prisutvikling, mens søylene viser forventet produksjon i de ulike blokkene.

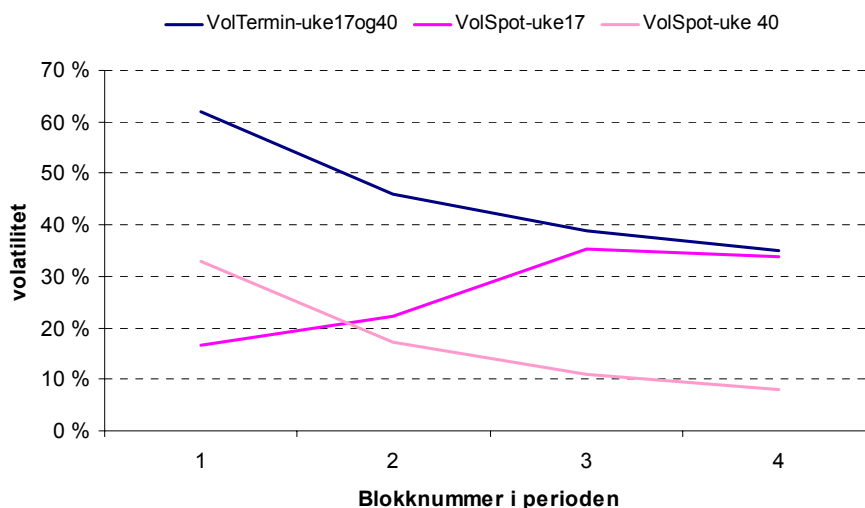
Ved bruk av terminpriser så ser vi at det lønner seg å vente med produksjon i første periode, mens en lav vannverdi resulterer i full produksjon de to siste periodene. Spotprognosealternativet har kommet frem til en strategi som gir full produksjon i den første perioden, men så blir det en fallende tendens før forventet produksjon øker igjen i siste periode. Gitt at ingen av beskrankningene i modellen blir aktive, vil siste periodes produksjon blir begrenset av vannverdien, som dermed ser ut til å ligge på i overkant av 190 NOK/MWh.

Forskjellen i total produksjonen i dette tilfellet, blir på i underkant av 100 GWh (se vedlegg 3, scenario 10). Denne forskjellen utgjør ca 25 % av totalt forventet tilsig i perioden, og resulterer i en profitt som er i overkant av 53 millioner kroner bedre ved bruk av terminpriser. Dette må vurderes som å være en stor forskjell.

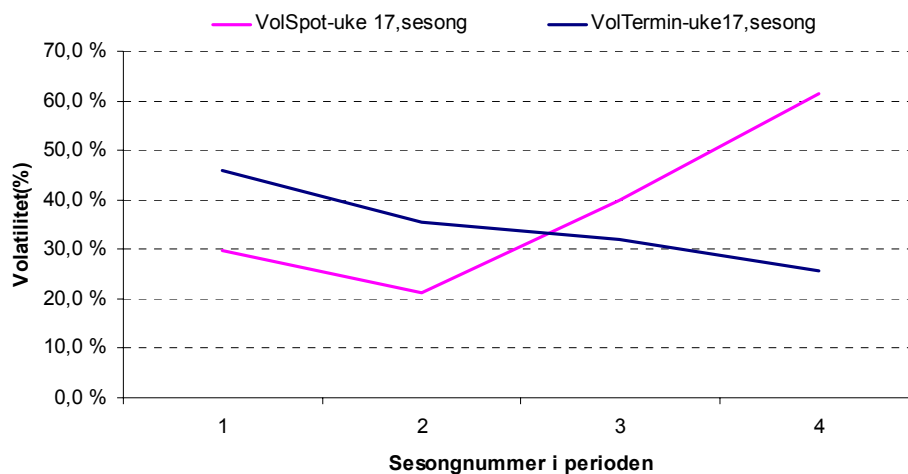
På bakgrunn av disse to testene kan man på den ene siden antyde at det lave tilsiget på høsten gir grunnlag for ulike prisvurderinger med de to fremgangsmåtene, samtidig som de to metodene behandler risikoen under vårflommen relativt likt. Den forskjellen som er, også med uke 17 som utgangspunkt, gir klare indikasjoner på at valg av målfunksjon ikke er likegyldig for hvilken produksjonsstrategi som blir valgt. Metodene vurderer åpenbart risikoen i fremtiden forskjellig, noe som vi har sett fra diskusjonen i kapittel 4.2 kan illustreres ved volatilitetsestimeringen.

6.2 Volatilitet

Som Figur 6.3 og Figur 6.4 viser, blir volatilitetsestimatene for de to alternativene ulike. Figur 6.3 viser hvordan volatilitetene utvikler seg på blokknivå, mens Figur 6.4 viser det samme med sesong som periodelengde. Terminprisalternativet er markert med blått, mens spotprognosen er markert med rosa, og vi legger merke til at volatilitetsprognosen med terminprisene, blir identiske for tilfellet uke 17 og uke 40. Dette kommer som beskrevet i kapittel 5.2.1 av at vi har benyttet en volatilitetsmodell som ikke tar hensyn til sesongvariasjoner. Med terminprisalternativet, ser vi at volatiliteten får en fallende tendens i begge figurene, mens de rosa kurvene viser at estimatet for volatiliteten basert på spotprognosene, varierer i langt større grad.



Figur 6.3 Illustrasjon over hvordan annualisert volatilitet endrer seg som funksjon av tiden for terminprisene og spotprisene med blokk som periodelengde.



Figur 6.4 Illustrasjon av hvordan annualisert volatilitet endrer seg som funksjon av tiden for terminprisene og spotprisene med sesong som periodelengde.

Vi kan ikke si noe om hvilken av kurvene som gir det ”rette” resultatet i Figur 6.3. Ut i fra diskusjonen om volatilitet vet vi at det finnes en terminstruktur i volatiliteten og siden terminprisalternativet benytter en forenklet modell for beregning av volatiliteten, kan vi ikke med sikkerhet si at denne verdien er den riktige. Spesielt kommer dette frem ved at volatiliteten for blokkene i uke 40 og uke 17 blir identisk. Dette gir mistanke om en svakhet ved modellen. Samtidig så merker vi oss at det var i uke 40, hvor begge alternativene indikerte en fallende struktur, at forskjellen i produksjonsstrategi ble størst.

I Figur 6.7 ser vi at spotprognosen gir en betydelig annen beskrivelse av risikoen i fremtidige priser. Her er det de implisitte volatilitetene som er benyttet for terminprisene og dette er følgende markedets beskrivelse av risikoen.

Den viktigste konklusjonen ut ifra disse analysene er at spotprisprognosene beskriver volatiliteten, og dermed risikoen i fremtidig priser på en helt annen måte enn det markedet gjør. Fra kapittel 4.1, så vi at forwardprisene har risikopremien i markedet som en del av verdien, og at dette i prinsippet skal sikre oss riktig risikovurdering. Spotprognosene er ikke justert for denne risikoen, og mangler dermed markedets oppfatning om hvordan utviklingen vil bli.

6.3 Konsekvenser ved definering av sluttmagasin

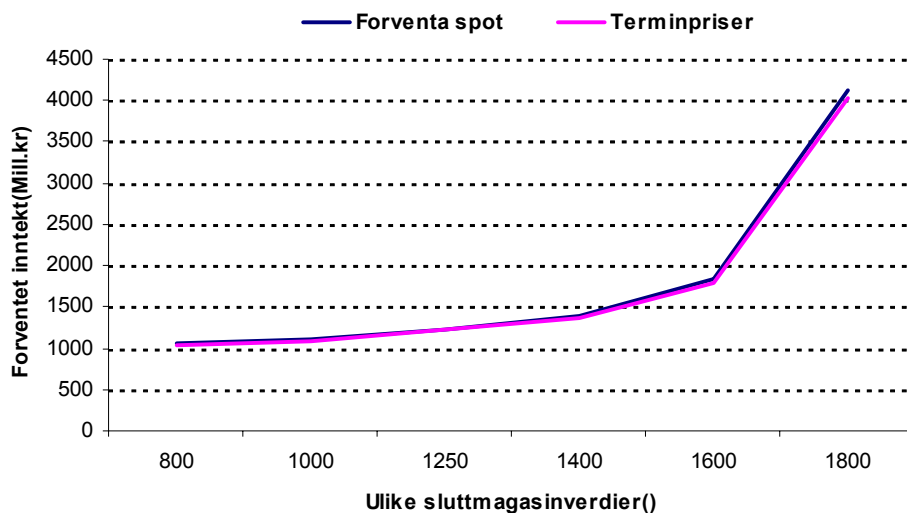
Som nevnt i kapittel 3.2.2, er defineringen av sluttmagasinverdi viktig i optimeringen. Våre simuleringer er foretatt med en planleggingshorisont på fire blokker av fire uker, og med så kort planleggingshorisont er sannsynligheten for at denne defineringen skal ha innvirkning på produksjonsplanen stor. Vi vil i dette kapittelet først vurdere i hvilken

grad modellen vår er begrenset av denne restriksjonen før en analyse av produksjonsplaner for ulike tidshorisonter vil gjennomgås.

6.3.1 Modellens håndtering av restriksjonen

I Figur 6.5 er det vist hvordan forventede inntekter varierer med hvilken verdi som settes som siktemagasin, for tilfellet med terminpris og forventet spotpris. I simuleringene er alt annet enn sluttmagasinet likt, og når tilsiget er likt og produksjonsplanen ikke viser noe overløp, skal en optimal optimeringsmodell gi tilnærmede like resultater. Vi ser imidlertid at inntektskurven er klart stigende med høyere siktemagasin. Kurvene for de to strategiene blir nærmest sammenfallende.

Ut ifra diskusjonen i kapittel 3.2., så skal en økende pris til sluttperioden medføre at en sparer vann i de andre periodene for å vente til den høye prisen i siste perioden. Med stor prisøkning i siste periode skulle en da forvente at totalinntekten blir større jo høyere sluttmagasinet er definert til å bli. Fra figur 6.1, ser vi at prisen både for terminpris og forventet spot øker i siste periode, men at økningen imidlertid er marginal. Når verdiøkningen for økende siktemagasin er så bratt, kan det tyde på at sluttverdifunksjonen $S(x_z, p_z)$ har store konsekvenser for resultatet, og at det ikke er produksjonen som har mest å si for maksimeringen av objektfunksjonen (ligning (5.1)). Dette kan indikere at funksjonen $S(x_z, p_z)$ ikke har den fallende tendensen for økt magasinnivå som Figur 5.1 antyder, og at produksjonsplanene som kommer fra optimeringen ikke blir riktige.



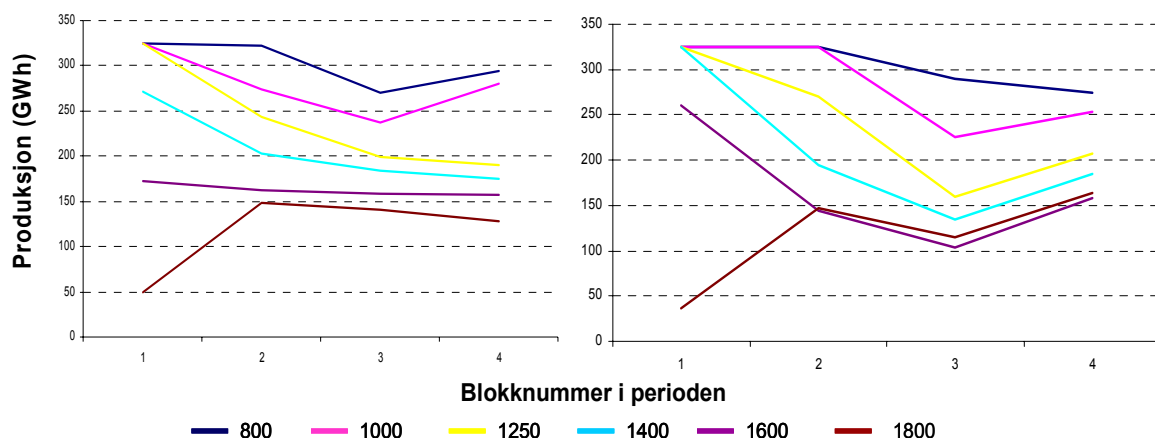
Figur 6.5 Fremstilling av forventede inntekter som funksjon av nivå på sluttmagasin. Rosa indikerer for terminpriser mens blå er for forventet spot.

Figur 6.5 kan imidlertid fortelle oss noe om i hvilket område for definering av magasininnvå modellen er mest sensitiv for denne restriksjonen. Grafen viser at det vil ha innvirkning for alle verdier i testintervallet, ettersom det eneste som varierer er sluttmagasinet. Våre simuleringer baserte seg på et sluttmagasin på 1250 GWh, og det ser vi er på den relativt flate delen av grafen. Med andre ord er det ikke så kritisk parameterdefinering som om vi hadde satt for eksempel 1700GWh.

På tross av dette, viser inntektsfunksjonene i figur 6.4 at det ikke er en optimal løsning å sette sluttmagasinet til en konstant nivå i denne modellen. En annen fremgangsmåte som kan gi en bedre modell slik at ikke denne spesifiseringen blir så avgjørende for resultatet, kan være å ha et glidende sluttmagasinnivå [Fosso, 2003].

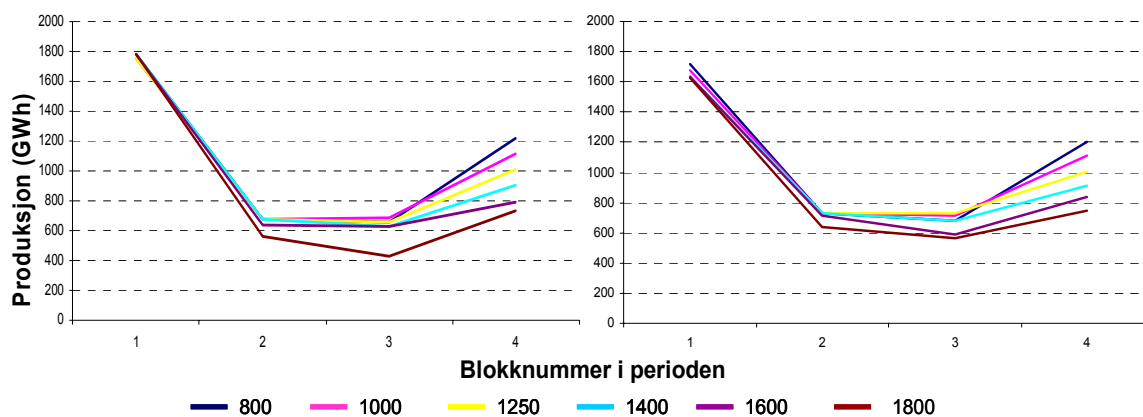
6.3.2 Produksjonsstrategien

Selv om nivået på inntekten er avhengig av sluttmagasinet er det kanskje vel så interessant å se på hvordan produksjonsplanene innvirkes av denne defineringen, og om det her kan være en forskjell mellom bruk av forventet spot og terminpriser. Figur 6.6 viser imidlertid at utfallsrommet for produksjonsstrategiene er relativt like. Forskjellen er stor i starten av planleggingsperioden og så minker den etter hvert. Det som allikevel er verdt å merke seg er at det er for de høye verdiene av sluttmagasinet, altså der restriksjonen er mest utslagsgivende, at forskjellen i produksjonsstrategi er størst. Dette er de to nederste kurvene i figurene som indikerer produksjon ved sluttmagasin på henholdsvis 1600 og 1800 GWh.



Figur 6.6 Produksjonsstrategi for ulike verdier av sluttmagasinet. Ved bruk av terminpriser til høyre og forventet spot til venstre.

I figur 6.7 er det vist en tilsvarende oversikt med sesong som periodelengde og her kommer viktigheten av planleggingshorisonten godt frem. Vi ønsker å ha så liten usikkerhet som mulig i den nærmeste fremtiden. Med bruk av lenger planleggingshorisont, ser vi fra figuren at strategien i første periode er lite avhengig av hvilket sluttmagasinnivå en har valgt. Forskjellen mellom markedprisalternativet og forventa spot er i denne sammenheng minimal.



Figur 6.7 Produksjonsstrategi for ulike verdier av sluttmagasinet med sesongmodell. Ved bruk av terminpriser til høyre og forventa spot til venstre

7 Evaluering og utbedring av modellen

Modellen presentert i denne oppgaven er en del forenklet i forhold til det som er presentert av teori og om hvordan dagens optimeringsverktøy er modellert. Det betyr at de resultater som har fremkommet må ses i lys av dette.

En av modellsvakheterne, som allerede er påpekt i kapittel 6.3, er spesifisering av sluttmagasinet i enden av planleggingsperioden. Dette gir uheldige konsekvenser fordi optimal strategi vil forsøke å oppnå dette sluttmagasinet i enden av planleggingsperioden uansett om dette er den beste løsningen i forhold til prisene. I dagens modeller legges slutten av planleggingshorisonten så langt fram i tid at verdien av sluttmagasinet ikke har noen innvirkning på de beslutninger som gjøres om dagens produksjonsstrategi. Det er derfor naturlig å trekke inn lignende løsninger i videreføring av modellen.

I tillegg går det fram av diskusjonen i kapittel 6.3.1 at sluttverdifunksjonen som brukes i modellen ikke er helt riktig. Forventet inntekt som modellen beregner er sterkt avhengig av hva slags sluttmagasin som defineres, slik at man får for høy forventet inntekt ved spesifisering av høyt sluttmagasin. Dette kan bedres på ved å justere sluttverdifunksjonen slik at forventet inntekt ikke i så stor grad er avhengig av magasinnivå i enden av planleggingsperioden.

Samtidig har vi ikke diskontert inntektene i de forskjellige periodene i denne modellen. For å få riktige inntekter med bruk av forventet spot og markedspriser vil diskonteringsfaktoren bli forskjellig ved disse to alternativene. Hvis vi skulle ha gjort dette er man nødt til å estimere markedsprisen på risiko, noe som har vist seg å gi forskjellige resultater (se kapittel 4.1.4).

I modelleringen har vi godt ut i fra at pris og tilsig er perfekt negativt korrelert. Analysen av denne korrelasjonen i kapittel 3.4.4 viser at den klart er til stede og i en eventuell utvikling av modellen vil det være naturlig å modellere en slik korrelasjon. Dette krever imidlertid sterkere optimeringsverktøy enn solveren i Exel som vi har brukt i denne oppgaven. For fremtidig videreføring ville for eksempel bruk AMPL og CPLEX vært et godt alternativ for å håndtere den økningen av scenarier en slik utvidelse vil medføre. Dette ble også tenkt benyttet i denne oppgaven, men på grunn av problemer med lisensfilen ved instituttet, fikk vi ikke tilgang til dette verktøyet.

En annen svakhet i modellen er behandling av volatilitet i de ulike periodene. Med vår modellering blir prisene forventningsrette i hver periode, men sammenhengen mellom prisene fra den ene perioden til den andre er ikke konsistent. Det får konsekvenser for produksjonen i hver node, slik at selv om pristreet er rekombinerende så vil ikke produksjonstreet være det.

Modellen er bygd opp rundt de samme prinsipper som dagens optimeringsmodeller som brukes av bedriftene ute i markedet. Vi har ved bruk av vår enkle modell sett at produksjonsstrategien kan variere avhengig av om man bruker forventede spotpriser eller markedspriser i optimeringen. Ved utvikling av nye optimeringsmodeller vil det være hensiktsmessig å fokusere på bruk av markedspriser i optimeringen slik at informasjonen i markedet blir best mulig ivaretatt i produksjonsplanleggingen.

8 Referanser

Audet, N., Heiskanen, P., Keppo J., Vehvilainen, I. (2002), "*Modelling of electricity forward curves dynamics*" forthcoming in the Modeling Prices in Competitive Electricity Markets, (edited by D. W. Bunn), Wiley Series in Financial Economics

Bjerkstrand, P., Rasmussen, H., Stensland, G. (2000), "*Valuation and Risk management in the Norwegian Electricity Market*", Discussion Paper 20/2000, Norwegian School of Economics and Business Administration

Bernseter K. (2003), "*Risikopremien i kraftmarkedet*". Hovedoppgave utført ved industriell økonomi og teknologiledelse, NTNU, våren 2003

Bjorndal, N., Skogen, A. (2002) Hovedoppgave utført ved Industriell økonomi og teknologiledelse, NTNU, våren 2002

Bjørkvoll, T., Fleten, S.-E., Nowak, M., Thomasgard, A., Wallace, S.W. (2001) "*Power generation planning and Risk management in a liberalized market*" IEEE Porto Power Tech Proceedings, pp 426-431

Botterud, A., Arnob K., Bhattacharyya, A.K., and Ilic, M., (2002) "*Futures and spot prices – an analysis of the Scandinavian electricity market*", North American Power Symposium (NAPS 2002), Tempe AZ, USA, October 2002

Brealey R.A., Myers, S.C., (2003) "*Principles of corporate finance*", 6th ed., McGrawhill, New York, USA

Clewlow, L., Strickland, C. (2000), "*Energy Derivatives: Pricing and Risk Management*", Lacima Publications, London, England

Danthine, J.P., og Donaldson, J.B (2002) "*Intermediate financial theory*", Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ

Dixit, A.K., Pindyck, R.S. (1994) "*Investment under uncertainty*" Princeton University Press, Princeton, New Jersey

Flatabø, N., Haugstad, A., Mo, B., og Fosso, O.B., (2002) "*Hydro Scheduling in Competitive Electricity Markets, An Overview*". Workshop, Trondheim, 27-28 May 2002

Fleten, S.-E (2000) "*Portfolio management emphasizing electricity market applications A stochastic programming approach*", Dr.ing avhandling, NTNU, Trondheim

Fleten, S.-E., Wallace, og Ziemba(2002) "*Hedging Electricity Portfolios via Stochastic Programming*" Descision Making Under Uncertainty; Energy and Power, pp 71-93, Springer –Verlag, New York

Fleten, S-E., Lemming, J., (2003), *Constructing forward price curves in electricity markets*, Energy Economics, Volume 25 (2003), pp 409-424

Fleten, S-E (2003b), veiledningsmøte NTNU, November 2003

Fosso, B.O, Gjeldsvik, Haugstad, Mo og Wangensteen (1999), *Generation scheduling in a deregulated system, The Norwegian case*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 14, No.1, February 1999

Fosso, B.O(2003), Forelesning i faget Kraftmarkeder og risikostyring, høst 2003

Haneberg, E.(NHE) Telefon- og mailkorrespondanse med Hydrolog Eivind Haneberg fra Norsk Hydro Energi, November 2003

Haugstad, A., Gjeldsvik, A., Røynstrand, J., Fosso, O.B., Huse, E.S., Warland, G., (2001) "*En samkjøringsmodell basert på stokastisk dual dynamisk programmering*", TR A5496, SINTEF energiforskning oktober 2001

Hull, J. C. (2003), "*Options, Futures & Other Derivatives*", 4th ed., Prentice Hall International, Inc., Upper Saddle River, NJ

Johnsen, T.A.(2001) "*Demand, generation and price in the Norwegian market for electric power*", Energy Economics, Volume 23 (2001), pp 227-251

Koekebakker, S., Ollmar,F., (2001) "*Forward curve dynamics in the Nordic electricity market*" Discussion Paper 21 (2001), Institutt for foretaksøkonomi, Norges Handelshøyskole

Longva, E. (SSF) møte med Erik Longva markedsdivisjonen, Statkraft SF, 01.10.2003

Lucia, J.J., Schwartz, E., (2002) "*Electricity prices and power derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange*", Review of Derivatives Research 5, pp 5-50

McDonald, R.L., (2003) "*Derivatives markets*", Pearson Education, Inc., Boston, MA

Mo, Haugstad, (1996) "*Individuelle vannverdier i Vansimtap*", TR A4496, EFI Sintefgruppen, Trondheim

Mo B., Gjeldsvik A, Grundt A.(2001) "*Integrated Risk Management of Hydro Power Sceduling and Contract Management*" IEEE transactions on power systems, vol. 16, no. 2, mai 2001

Mun, J. (2002) "Real option analyses- tools and techniques for valuing strategic investments and decisions", John Wiley & Son, Inc., Hoboken, New Jersey

Nord Pool a, FTP-server med tilgang til historiske markedstall

Nord Pool (2002), Årsrapport for 2002,

Olaussen, E., Roald, L(1996), "Kvalitetskontroll av tilsigserier", TR A4393, EFI Sintefgruppen, Trondheim

Pereira M, Campodónico N, Kelman R (1999) "*Application of stochastic dual DP and extensions to hydrothermal scheduling*", PRSI Technical report 012/99.

Rubenstein, M., (1994) "*Implied trinomial trees*" *The Journal of Finance*", Vol 49, No. 3, pp 771-818

Seppi, D.J (2003) "*Risk-Neutral Stochastic Commodity Derivative Pricing: An introduction and Survey*", kapittel 1i "*Real Options and Energy Management Using Options Methodology to Enhance Capital Budgeting Decisions*", Ronn E.I (Editor), Risk Books

Wallace S.W, Fleten, S.-E., (2003), "*Stochastic programming models in energy*", handbooks in OR&MS, vol.10, Elsevier Science B.V, pp 637-677

Wangensteen, I.,(2003) ,forelesning i faget "Kraftmarkeder og risikostyring", NTNU, høsten 2003

Wangensteen, I. (2001), "*SIE1065 Kraftmarkeder*", kapittel 4 "Driftsplanlegging", kapittel 9 "Risiko" og kapittel 5 "Nord Pool", undervist ved NTNU, Trondheim, våren 2001

Websider:

www.nordpool.com

www.oslobors.no

www.nve.no

www.ssb.no

Andre kilder:

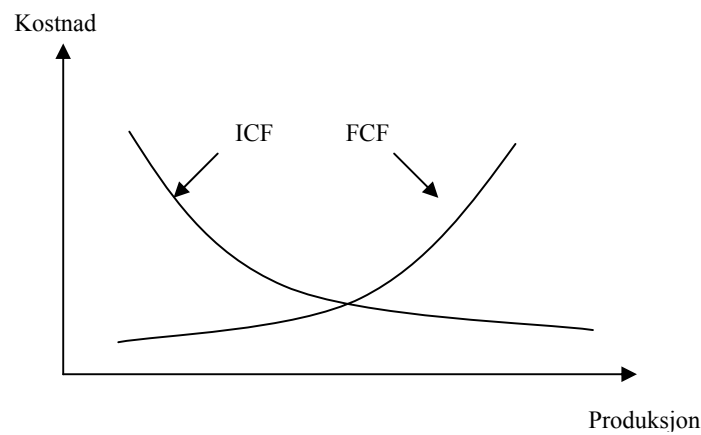
Norsk hydro Energi v/Grete Westerberg: Systemdata og tilsigserie

M3-kraft v/Espen Brevik: Implisitte volatiliteter

SKMEnergy AS v/Ole Rismark: Spotprognoser

VEDLEGG 1: SDDP algoritme

Algoritmen tar i bruk Bellmanns prinsipp Dixit og Pindyck, (1994) og deler opp optimeringsproblemet i subproblemer hvor man i hvert tidssteg optimerer summen av nåværende og fremtidig tilstand. Dette kan illustreres som i Figur 1.



Figur 1 Det ett stegs optimeringsproblemet består av å minimere summen av ICF (immediate cost function) og FCF (future cost function).

Pereira et al(1999) formulerer problemet som et minimeringsproblem, og setter det opp som et standard LP-problem. Med et gitt magasinnivå v_t og en fremtidig kostnadsfunksjon $\alpha_{t+1}(v_{t+1})$ vil dette problemet se slik ut når man står i tidssteg T:

$$z_T = \text{Min } c_T(u_T) + \alpha_{T+1}(v_{T+1}) \quad (1.1) \quad \text{Dualverdier}$$

subject to

$$v_{T+1} = v_T - u_T - s_T + a_T \quad (1.2) \quad \pi_h$$

$$v_{T+1} \leq v_{maks} \quad (1.3) \quad \pi_v$$

$$u_T \leq u_{maks} \quad (1.4) \quad \pi_u$$

z_t : Total kostnad forbundet med produksjon i perioden t og fremtidig produksjon.

$c_t(u_t)$: Kostnaden forbundet med produksjonen t .

$\alpha_{t+1}(v_{t+1})$: Fremtidig kostnad forbundet med produksjon (FCF).

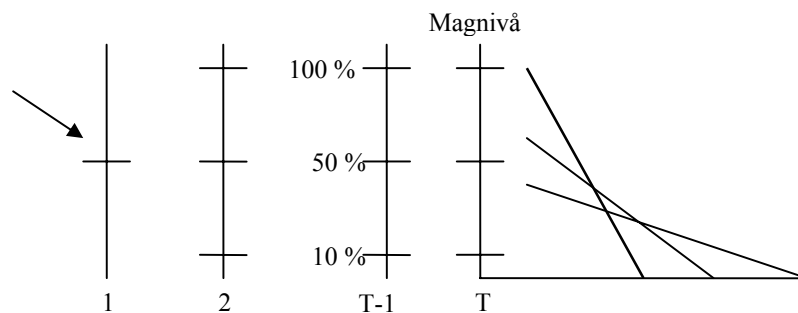
v_t : Reservoirnivå i starten av periode t .

u_t : Produksjon i perioden t .

a_t : Tilsig til magasinet i periode t .

π : Dualverdier for beskrankningene i LP-problemet.

For at man skal kunne bruke algoritmen defineres $\alpha_{T+1}(v_{T+1}) = 0$. Samtidig defineres ulike magasinnivåer ($1 \dots M$) i tilstand T. Figur 2 viser disse definerte magasinnivåene som 100 %, 50 % og 10 %.



Figur 2 Illustrasjon for hvordan den stykkvis lineære funksjonen for FCF beregnes ved bruk av SDDP.

Ut fra hvert definert magasinnivå løses ett stegs problemet i periode T, og man får ut de minimale kostnadene referert til hvert magasinnivå. I tillegg kan dualverdien til beskrankningen av vannbalansen (ligning (1.2)) beregnes. Det er disse dualverdiene for hvert definert magasinnivå SDDP utnytter for å etablere FCF når man står i tidssteg T-1. Dualverdien kan defineres som:

$$\pi_h = \frac{\partial z_T}{\partial v_T} \quad (1.5)$$

Den viser hvor stor marginal endring vi får i kostnadene ved en marginal endring i magasinnivået i periode T. Dette er et uttrykk for vannverdien for dette bestemte magasinnivået i periode T. Dualverdiene for ulike magasinnivå i tidspunkt T utgjør den stykkevis lineære funksjonen for de fremtidige kostnadene i figur 2.

Dermed vil optimeringsproblemet i tidssteg T-1 kunne uttrykkes som et LP-problem:

$$\begin{aligned} z_{T-1} = \text{Min } & c_{T-1}(u_{T-1}) + \alpha_T \\ & \text{s.t} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$v_T = v_{T-1} - u_{T-1} - s_{T-1} + a_{T-1} \quad (1.7)$$

$$v_T \leq v_{maks} \quad (1.8)$$

$$u_{T-1} \leq u_{maks} \quad (1.9)$$

$$\alpha_T \geq \phi_T^n v_T + \delta_T^n \quad \text{for } n = 1 \dots N \quad (1.10)$$

I dette LP-problemet er de fremtidige kostnadene representert ved α_T og de lineære beskrankningene i ligning (1.10), hvor N er antall lineære segmenter. Hvert lineære segment utledes av dualverdien ved hjelp av disse likningene:

$$\phi_T^n = \sum_{k=1}^K p_k \cdot \pi_{hT} \quad (1.11)$$

$$\delta_T^n = \sum_{k=1}^K p_k \cdot \alpha_T^k (v_T^m) - \phi_T^m \cdot v_T^m \quad (1.12)$$

Her er det k ulike tilsigsscenarier med sannsynligheten p_k for hvert magasinpunkt v_t . Ved bruk av rekursive algoritmen til SDDP kan man beregne hvilken handling som vil gi minst kostnader ved $T=0$.

Fullstendig algoritme for SDDP

Sett antall lineære segmenter N lik antall definerte magasinnivåer M.
Definere den fremtidige kostnadsfunksjonen for den siste tilstanden til å ha verdien 0.
($\phi_{T+1}^n = 0$ og $\delta_{T+1}^n = 0$).

for $t = T, T-1, \dots, 1$

for hvert magasinnivå $v_t = v_t^m = \{v_t^m, m = 1, \dots, M\}$

for hvert tilsigsscenario $a_t = a_t^1, \dots, a_t^k, \dots, a_t^K$

løs det ett steps planleggingsproblemet med magasinnivå v_t^m og tilsig a_t^k :

$$\alpha_t^k (v_t^m) = \text{Min } c_t(u_t) + \alpha_{t+1}$$

subject to

$$v_{t+1} = v_t^m - u_t - s_t + a_t^k$$

$$v_{t+1} \leq v_{maks}$$

$$u_t \leq u_{maks}$$

$$\alpha_{t+1} \geq \varphi_{t+1}^n v_{t+1} + \delta_{t+1}^n \quad \text{for } n = 1 \dots N$$

neste

finn stigningstallet og konstantleddet til det mte lineære segmentet i den fremtidige kostnadsfunksjonen i den forrige tilstanden ved hjelp av dualverdien til LP-problemet.

$$\varphi_T^n = \sum_{k=1}^K p_k \cdot \pi_{hT}$$

$$\delta_t^m = \sum_{k=1}^K p_k \cdot \alpha_t^k(v_t^m) - \varphi_t^m \cdot v_t^m$$

neste

neste

Vedlegg 2: Beskrivelse av simuleringsscenariene

Scenario nr	Beskrivelse
0	Mest mulig realistiske data. Det er benyttet blokker som planleggingsperioden og med start uke 17, 2001.
1	Prisen er her satt vilkårlig med markedspris fallende og spotpris økende utvikling. Bruker "riktige" volatiliteter.
2	Prisen er her satt vilkårlig med terminpris økende og spotpris fallende utvikling. Bruker "riktige" volatiliteter.
3	De forventede prisene ble justert opp med 10 % i alle periodene i forhold til scenario 0. Alt annet likt
4	Justerte prisrekka fra spotprognosen med forventningsverdien til terminprisene, men beholdt prognosens volatiliteter
<u>Scenario 5-9 beskriver sammen med 0-scenariet de ulike sluttmagasinnivåene vi testet for. Andre data som i scenario 0</u>	
5	Sluttmagasin: 800 GWh
7	Sluttmagasin: 1400 GWh
8	Sluttmagasin: 1600 GWh
9	Sluttmagasin: 1800 GWh
10	Her er det benyttet data med uke 40, 2001 som utgangspunkt. Alle dataene er dermed justert i forhold til scenario 0. Planleggingsperioden er fortsatt på blokknivå.
11	I dette scenariet er det benyttet sesong som periodelengde. Det medfører helt nytt sett med data. Volatiliteten for terminprisene er her de implisitte, mens det for spotpris fortsatt er benyttet volatilitet ut ifra spotprognosen.

Ulike verdier av sluttmagasin med sesong som periodelengde

Det er her oppsummert resultatene ved å justere sluttmagasin på samme måte som scenario 5-9, men når sesonger er benyttet som periodelengde. Først er det vist med terminpriser og så kommer resultatene med forventet spotpriser

Vedlegg 3 :Resultater

Forklaring til tabellene;

Periode	periodenummer i planleggingsperioden. Varierer mellom sesong og blokk
Tilslig-H	Høyt tilslig. Det som er definert som høyt ut ifra tilsligsserien.75 persentilen i GWh
Tilslig-L	Lavt tilslig. Det som er definert som lavt ut ifra tilsligsserien.25 persentilen i GWh
E[Prod]	Forventa produksjon i perioden i GWh
E[pris]	Forventa pris i perioden i øre/KWh
E[Mag]	Forventa magasinstatus ved slutten av perioden i GWh
Vol	volatiliteten som beskriver prisrekka i %
E[inntekt]	Forventa inntekt i hele perioden (i Mkr)
SluttMag	siktenivået som slutmagasinet skal være ved slutten av planleggingsperioden
StartMag	Nivået på magasinet ved starten av planleggingsperioden-kjent nivå(GWh)

scenario 0													
Markedspriser							Forventa spotpriser						
Periode	Tilsig-H	Tilsig-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol	Periode	Tilsig-H	Tilsig-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	364,17	121,46	325,00	21,14	267,82	0,62	1	364,17	121,46	325,00	20,61	267,82	0,17
2	1093,17	608,26	270,15	19,51	848,38	0,46	2	1093,17	608,26	243,75	20,62	874,78	0,22
3	766,64	341,40	159,74	18,93	1242,66	0,39	3	766,64	341,40	197,66	19,82	1231,14	0,35
4	349,19	150,34	207,33	19,14	1285,09	0,35	4	349,19	150,34	193,07	19,88	1287,83	0,34
Totalt	2573,17	1221,45	962,23				Totalt	2573,17	1221,45	959,48			
E[inntekt]	652,36						E[inntekt]	676,81					
SluttMag	1250,00						SluttMag	1250,00					
StartMag	350,00						StartMag	350,00					
scenario 1													
Markedspriser							Forventa spotpriser						
Periode	Tilsig-H	Tilsig-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol	Periode	Tilsig-H	Tilsig-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	364,17	121,46	325,00	22,27	267,82	0,62	1	364,17	121,46	162,50	18,11	430,32	0,17
2	1093,17	608,26	305,47	20,69	813,06	0,46	2	1093,17	608,26	162,50	19,74	1118,53	0,22
3	766,64	341,40	229,46	19,62	1137,62	0,39	3	766,64	341,40	228,56	20,88	1443,99	0,35
4	349,19	150,34	132,05	18,06	1255,33	0,35	4	349,19	150,34	300,78	22,55	1392,97	0,34
Totalt	2573,17	1221,45	991,98				Totalt	2573,17	1221,45	854,34			
E[inntekt]	643,41						E[inntekt]	745,73					
SluttMag	1250,00						SluttMag	1250,00					
StartMag	350,00						StartMag	350,00					

scenario 2													
Markedspriser							Forventa spotpriser						
Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol	Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	364,17	121,46	95,99	18,05	496,83	0,62	1	364,17	121,46	325,00	22,07	267,82	0,17
2	1093,17	608,26	220,95	19,61	1126,60	0,46	2	1093,17	608,26	274,39	20,63	844,14	0,22
3	766,64	341,40	229,62	20,69	1451,00	0,39	3	766,64	341,40	233,06	19,68	1165,10	0,35
4	349,19	150,34	300,56	22,28	1400,20	0,35	4	349,19	150,34	142,57	18,22	1272,29	0,34
Totalt	2573,17	1221,45	847,11				Totalt	2573,17	1221,45	975,02			
E[inntekt]	733,04						E[inntekt]	640,23					
SluttMag	1250,00						SluttMag	1250,00					
StartMag	350,00						StartMag	350,00					

scenario 3													
Markedspriser							Forventa spotpriser						
Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol	Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	364,17	121,46	325,00	23,32	267,82	0,62	1	364,17	121,46	325,00	22,74	267,82	0,17
2	1093,17	608,26	264,02	21,59	854,51	0,46	2	1093,17	608,26	241,81	22,82	876,72	0,22
3	766,64	341,40	160,19	21,01	1248,34	0,39	3	766,64	341,40	197,70	22,01	1233,04	0,35
4	349,19	150,34	210,18	21,33	1287,93	0,35	4	349,19	150,34	192,76	22,14	1290,03	0,34
Totalt	2573,17	1221,45	959,39				Totalt	2573,17	1221,45	957,28			
E[inntekt]	725,56						E[inntekt]	755,08					
SluttMag	1250,00						SluttMag	1250,00					
StartMag	350,00						StartMag	350,00					

scenario 4													
Markedspriser							Forventa spotpriser						
Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol	Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	364,17	121,46	325,00	21,14	267,82	0,62	1	364,17	121,46	325,00	21,14	267,82	0,17
2	1093,17	608,26	270,15	19,51	848,38	0,46	2	1093,17	608,26	235,88	19,52	882,65	0,22
3	766,64	341,40	159,74	18,93	1242,66	0,39	3	766,64	341,40	196,11	18,93	1240,56	0,35
4	349,19	150,34	207,33	19,14	1285,09	0,35	4	349,19	150,34	198,01	19,13	1292,31	0,34
Totalt	2573,17	1221,45	962,23				Totalt	2573,17	1221,45	955,00			
E[inntekt]	652,36						E[inntekt]	656,77					
SluttMag	1250,00						SluttMag	1250,00					
StartMag	350,00						StartMag	350,00					

scenario 5													
Markedspriser							Forventa spotpriser						
Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol	Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	364,17	121,46	325,00	21,14	267,82	0,62	1	364,17	121,46	325,00	20,61	267,82	0,17
2	1093,17	608,26	325,00	19,51	793,53	0,46	2	1093,17	608,26	321,71	20,62	796,83	0,22
3	766,64	341,40	290,01	18,93	1057,54	0,39	3	766,64	341,40	269,76	19,82	1081,08	0,35
4	349,19	150,34	274,54	19,14	1032,76	0,35	4	349,19	150,34	294,14	19,88	1036,70	0,34
Totalt	2573,17	1221,45	1214,55				Totalt	2573,17	1221,45	1210,61			
E[inntekt]	471,99						E[inntekt]	489,97					
SluttMag	800,00						SluttMag	800,00					
StartMag	350,00						StartMag	350,00					

scenario 6													
Markedspriser							Forventa spotpriser						
Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol	Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	364,17	121,46	325,00	21,14	267,82	0,62	1	364,17	121,46	325,00	20,61	267,82	0,17
2	1093,17	608,26	325,00	19,51	793,53	0,46	2	1093,17	608,26	274,46	20,62	844,07	0,22
3	766,64	341,40	225,95	18,93	1121,60	0,39	3	766,64	341,40	236,77	19,82	1161,31	0,35
4	349,19	150,34	252,71	19,14	1118,66	0,35	4	349,19	150,34	280,26	19,88	1130,82	0,34
Totalt	2573,17	1221,45	1128,65				Totalt	2573,17	1221,45	1116,50			
E[inntekt]	526,69						E[inntekt]	547,306					
SluttMag	1000,00						SluttMag	1000,00					
StartMag	350,00						StartMag	350,00					

scenario 7													
Markedspriser							Forventa spotpriser						
Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol	Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	364,17	121,46	325,00	21,14	267,82	0,62	1	364,17	121,46	271,26	20,61	321,56	0,17
2	1093,17	608,26	194,57	19,51	923,96	0,46	2	1093,17	608,26	202,53	20,62	969,74	0,22
3	766,64	341,40	134,98	18,93	1343,00	0,39	3	766,64	341,40	184,40	19,82	1339,36	0,35
4	349,19	150,34	184,40	19,14	1408,36	0,35	4	349,19	150,34	175,34	19,88	1413,77	0,34
Totalt	2573,17	1221,45	838,96				Totalt	2573,17	1221,45	833,54			
E[inntekt]	797,60						E[inntekt]	830,31					
SluttMag	1400,00						SluttMag	1400,00					
StartMag	350,00						StartMag	350,00					

scenario 8													
Markedspriser							Forventa spotpriser						
Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol	Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	364,17	121,46	260,62	21,14	332,20	0,62	1	364,17	121,46	172,25	20,61	420,57	0,17
2	1093,17	608,26	144,75	19,51	1038,16	0,46	2	1093,17	608,26	162,50	20,62	1108,78	0,22
3	766,64	341,40	103,79	18,93	1488,40	0,39	3	766,64	341,40	158,81	19,82	1503,99	0,35
4	349,19	150,34	158,73	19,14	1579,43	0,35	4	349,19	150,34	157,23	19,88	1596,52	0,34
Totalt	2573,17	1221,45	667,88				Totalt	2573,17	1221,45	650,79			
E[inntekt]	1235,96						E[inntekt]	1288,78					
SluttMag	1600,00						SluttMag	1600,00					
StartMag	350,00						StartMag	350,00					

scenario 9													
Markedspriser							Forventa spotpriser						
Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol	Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	364,17	121,46	36,49	21,14	556,32	0,62	1	364,17	121,46	49,01	20,61	543,80	0,17
2	1093,17	608,26	147,31	19,51	1259,73	0,46	2	1093,17	608,26	148,90	20,62	1245,62	0,22
3	766,64	341,40	114,51	18,93	1699,24	0,39	3	766,64	341,40	140,14	19,82	1659,49	0,35
4	349,19	150,34	163,92	19,14	1785,08	0,35	4	349,19	150,34	128,35	19,88	1780,90	0,34
Totalt	2573,17	1221,45	462,24				Totalt	2573,17	1221,45	466,41			
E[inntekt]	3512,89						E[inntekt]	3654,83					
SluttMag	1800,00						SluttMag	1800,00					
StartMag	350,00						StartMag	350,00					

scenario 10													
Markedspriser							Forventa spotpriser						
Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol	Periode	Tilsg-H	Tilsg-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	322,83	115,70	0,00	18,55	1739,27	0,62	1	322,83	115,70	325,00	21,14	1414,27	0,33
2	141,17	66,73	76,61	19,23	1766,61	0,46	2	141,17	66,73	243,75	19,52	1274,46	0,17
3	81,95	43,62	316,57	19,98	1512,82	0,39	3	81,95	43,62	72,12	18,93	1265,13	0,11
4	66,60	29,48	325,00	21,86	1235,86	0,35	4	66,60	29,48	169,16	19,13	1144,01	0,08
Totalt	612,55	255,52	718,18				Totalt	612,55	255,52	810,03			
E[inntekt]	600,69						E[inntekt]	544,60					
SluttMag	1140,00						SluttMag	1140,00					
StartMag	1520,00						StartMag	1520,00					

scenario 11													
Markedspriser							Forventa spotpriser						
Periode	Tilsg-høy	Tilsg-lav	forventapr	Forventa i	Forventa r	volatilitetet	Periode	Tilsg-høy	Tilsg-lav	forventapr	Forventa i	Forventa r	volatilitetet
1	3057,79	1401,51	1629,65	19,7641	950	0,46	1	3057,79	1401,51	1776,65	20,7261	802,995	0,30
2	562,27	235,251	731,73	19,7855	617,03	0,36	2	562,27	235,251	672,918	19,7904	528,838	0,21
3	233,599	89,1567	702,411	19,5077	75,9977	0,32	3	233,599	89,1567	650,452	19,4954	39,764	0,40
4	3057,79	1401,51	1014,67	19,6675	1290,71	0,26	4	3057,79	1401,51	996,533	19,0853	1272,88	0,62
Totalt	6911,45	3127,42	4078,46				Totalt	6911,45	3127,42	4096,56			
E[inntekt]	1235,92						E[inntekt]	1204,51					
SluttMag	1250						SluttMag	1250					
StartMag	350						StartMag	350					

Resultater med ulik spesifisering av sluttmagasin, med sesong som periodelengde

Terminpriser

Periode	Tilslig-H	Tilslig-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	3057,79	1401,51	1716,18	19,50	863,47	0,46
2	562,27	235,25	731,73	19,51	530,50	0,36
3	233,60	89,16	683,65	18,93	8,23	0,32
4	3057,79	1401,51	1205,77	18,75	1032,11	0,26
Totalt	6911,45	3127,42	4337,33			
E[inntekt]	1037,57					
SluttMag	800,00					
StartMag	350,00					

Periode	Tilslig-H	Tilslig-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	3057,79	1401,51	1631,83	19,50	947,82	0,46
2	562,27	235,25	731,73	19,51	614,85	0,36
3	233,60	89,16	680,54	18,93	95,69	0,32
4	3057,79	1401,51	915,39	18,75	1409,95	0,26
Totalt	6911,45	3127,42	3959,49			
E[inntekt]	1359,64					
SluttMag	1400,00					
StartMag	350,00					

Periode	Tilslig-H	Tilslig-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	3057,79	1401,51	1676,86	19,50	902,79	0,46
2	562,27	235,25	731,73	19,51	569,82	0,36
3	233,60	89,16	713,14	18,93	18,06	0,32
4	3057,79	1401,51	1110,68	18,75	1137,02	0,26
Totalt	6911,45	3127,42	4232,41			
E[inntekt]	1092,30					
SluttMag	1000,00					
StartMag	350,00					

Periode	Tilslig-H	Tilslig-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	3057,79	1401,51	1631,83	19,50	947,82	0,46
2	562,27	235,25	717,12	19,51	629,46	0,36
3	233,60	89,16	589,78	18,93	201,05	0,32
4	3057,79	1401,51	839,51	18,75	1591,19	0,26
Totalt	6911,45	3127,42	3778,25			
E[inntekt]	1791,52					
SluttMag	1600,00					
StartMag	350,00					

Periode	Tilslig-H	Tilslig-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	3057,79	1401,51	1631,83	19,50	947,82	0,46
2	562,27	235,25	731,73	19,51	614,85	0,36
3	233,60	89,16	728,45	18,93	47,78	0,32
4	3057,79	1401,51	1001,58	18,75	1275,84	0,26
Totalt	6911,45	3127,42	4093,59			
E[inntekt]	1217,00					
SluttMag	1250,00					
StartMag	350,00					

Periode	Tilslig-H	Tilslig-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	3057,79	1401,51	1629,65	19,50	950,00	0,46
2	562,27	235,25	639,21	19,51	709,55	0,36
3	233,60	89,16	563,01	18,93	307,91	0,32
4	3057,79	1401,51	746,16	18,75	1754,70	0,26
Totalt	6911,45	3127,42	3578,04			
E[inntekt]	4017,20					
SluttMag	1800,00					
StartMag	350,00					

Forventa spotprognoser

Periode	Tilslig-H	Tilslig-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	3057,79	1401,51	1776,65	20,73	802,99	0,26
2	562,27	235,25	672,92	19,79	528,84	0,16
3	233,60	89,16	660,90	19,51	29,31	0,21
4	3057,79	1401,51	1216,54	19,35	1042,42	0,50
Totalt	6911,45	3127,42	4327,01			
E[inntekt]	1051,56					
SluttMag	800,00					
StartMag	350,00					

Periode	Tilslig-H	Tilslig-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	3057,79	1401,51	1776,65	20,73	802,99	0,26
2	562,27	235,25	672,93	19,79	528,83	0,16
3	233,60	89,16	632,18	19,51	58,02	0,21
4	3057,79	1401,51	900,99	19,35	1386,68	0,50
Totalt	6911,45	3127,42	3982,75			
E[inntekt]	1383,53					
SluttMag	1400,00					
StartMag	350,00					

Periode	Tilslig-H	Tilslig-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	3057,79	1401,51	1749,08	20,73	830,57	0,26
2	562,27	235,25	672,92	19,79	556,41	0,16
3	233,60	89,16	688,47	19,51	29,31	0,21
4	3057,79	1401,51	1118,92	19,35	1140,04	0,50
Totalt	6911,45	3127,42	4229,40			
E[inntekt]	1107,17					
SluttMag	1000,00					
StartMag	350,00					

Periode	Tilslig-H	Tilslig-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	3057,79	1401,51	1776,65	20,73	803,00	0,26
2	562,27	235,25	634,05	19,79	567,71	0,16
3	233,60	89,16	626,08	19,51	103,01	0,21
4	3057,79	1401,51	789,51	19,35	1543,14	0,50
Totalt	6911,45	3127,42	3826,29			
E[inntekt]	1827,25					
SluttMag	1600,00					
StartMag	350,00					

Periode	Tilslig-H	Tilslig-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	3057,79	1401,51	1749,08	20,73	830,57	0,26
2	562,27	235,25	672,92	19,79	556,41	0,16
3	233,60	89,16	656,21	19,51	61,57	0,21
4	3057,79	1401,51	1006,84	19,35	1284,38	0,50
Totalt	6911,45	3127,42	4085,06			
E[inntekt]	1236,20					
SluttMag	1250,00					
StartMag	350,00					

Periode	Tilslig-H	Tilslig-L	E[Prod]	E[pris]	E[Mag]	Vol
1	3057,79	1401,51	1776,65	20,73	802,99	0,26
2	562,27	235,25	561,24	19,79	640,52	0,16
3	233,60	89,16	427,19	19,51	374,70	0,21
4	3057,79	1401,51	736,74	19,35	1788,62	0,50
Totalt	6911,45	3127,42	3501,82			
E[inntekt]	4113,31					
SluttMag	1800,00					
StartMag	350,00					

Vedlegg 4: Prisrekker

PRISBEVEGELS	Uke 17,Sesong		Uke17, Blokk		Uke40, Blokk	
	Markedspris	Forventa Spot	Markedspris	Forventa Spot	Markedspris	Forventa Spot
opp	25,43	24,68	24,62	21,56	21,61	23,07
ned	14,10	16,78	17,65	19,66	15,49	19,22
ned-ned	13,47	15,84	15,01	18,17	14,80	17,70
ned-opp	19,18	19,57	19,22	20,54	18,94	19,47
opp-ned	19,18	19,57	19,22	20,54	18,94	19,47
opp-opp	27,32	24,18	24,60	23,23	24,25	21,43
ned-ned-ned	10,71	9,09	13,48	14,57	14,22	17,26
ned-ned-opp	15,45	14,36	16,71	17,72	17,64	18,34
ned-opp-ned	15,45	14,36	16,71	17,72	17,64	18,34
ned-opp-opp	22,29	22,67	20,72	21,55	21,87	19,49
opp-ned-ned	15,45	14,36	16,71	17,72	17,64	18,34
opp-ned-opp	22,29	22,67	20,72	21,55	21,87	19,49
opp-opp-ned	22,29	22,67	20,72	21,55	21,87	19,49
opp-opp-opp	32,15	35,79	25,69	26,21	27,11	20,72
ned-ned-ned-ned	9,82	2,97	12,63	13,43	14,43	17,49
ned-ned-ned-opp	13,70	6,61	15,40	16,20	17,58	18,29
ned-ned-opp-ned	13,70	6,61	15,40	16,20	17,58	18,29
ned-ned-opp-opp	19,11	14,70	18,77	19,54	21,43	19,11
ned-opp-ned-ned	13,70	6,61	15,40	16,20	17,58	18,29
ned-opp-ned-opp	19,11	14,70	18,77	19,54	21,43	19,11
ned-opp-opp-ned	19,11	14,70	18,77	19,54	21,43	19,11
ned-opp-opp-opp	26,66	32,67	22,88	23,56	26,13	19,98
opp-ned-ned-ned	13,70	6,61	15,40	16,20	17,58	18,29
opp-ned-ned-opp	19,11	14,70	18,77	19,54	21,43	19,11
opp-ned-opp-ned	19,11	14,70	18,77	19,54	21,43	19,11
opp-ned-opp-opp	26,66	32,67	22,88	23,56	26,13	19,98
opp-opp-ned-ned	19,11	14,70	18,77	19,54	21,43	19,11
opp-opp-ned-opp	26,66	32,67	22,88	23,56	26,13	19,98
opp-opp-opp-ned	26,66	32,67	22,88	23,56	26,13	19,98
opp-opp-opp-opp	28,74	57,10	27,89	28,42	31,85	20,89

Vedlegg 5: Testing av prisprognoser og tilsigserie

Deskriptiv statistikk for spotprognosene. Tabellene viser deskriptiv statistikk for spotpriser på blokknivå og på sesongnivå for uke 17 og på blokknivå for spotprognose fra uke 40.

Uke 17 - Blokk

	SPOT			LN-SPOT		
Blokk	Skjeivhet	Kurtosis	P-verdi	Skjeivhet	Kurtosis	P-verdi
1	-0,5	-0,2	0,16	-0,6	-0,05	0,12
2	-0,6	1,33	0,05	-0,8	1,73	0,02
3	-0,9	-0,25	0	-0,1	0,08	0
4	-1,52	2,88	0	-1,78	3,91	0

Uke 17 - Sesong

	SPOT			LN-SPOT		
Periode	Skjeivhet	Kurtosis	P-verdi	Skjeivhet	Kurtosis	P-verdi
SO-01	0,5	5,2	0	-1,0	0,9	0
V2-01	4,5	22,0	0	0,25	1,4	0,09
V1-02	2,5	5,3	0	2,1	3,7	0
SO-02	0,5	5,3	0	-0,8	1,5	0

Uke 40 - Blokk

	SPOT			LN-SPOT		
Blokk	Skjeivhet	Kurtosis	P-verdi	Skjeivhet	Kurtosis	P-verdi
1	-2,6	7,6	0	-2,8	8,9	0
2	-1,7	5,9	0	-1,9	6,9	0
3	0,1	-0,7	0,57	0,07	-0,7	0,59
4	0,7	0,34	0,05	0,63	0,20	

Matematiske definisjoner:

Forventningsverdi: $\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

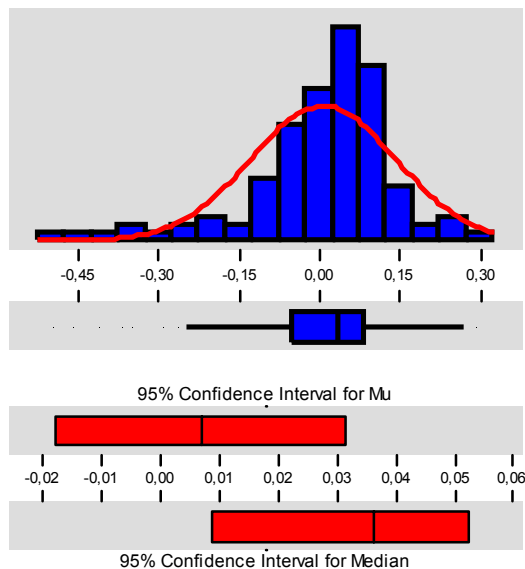
Variansen: $Var = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$

Skeivhet: $\alpha_3 = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3}$

Kurtosis: $\alpha_4 = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4}$

Testing av normalitet og lognormalitet for endring i prisen på sesong og uke:

Descriptive Statistics



Variable: dLnS-Sesong

Anderson-Darling Normality Test

A-Squared: 3,580
P-Value: 0,000

Mean 0,006741
StDev 0,135459
Variance 1,83E-02
Skewness -1,31231
Kurtosis 2,87188
N 120

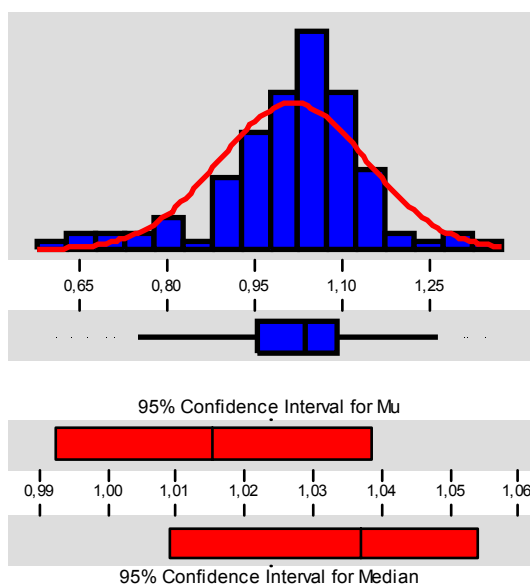
Minimum -5,0E-01
1st Quartile -4,8E-02
Median 0,036395
3rd Quartile 0,086895
Maximum 0,296800

95% Confidence Interval for Mu
-1,8E-02 0,031226

95% Confidence Interval for Sigma
0,120219 0,155160

95% Confidence Interval for Median
0,009094 0,052765

Descriptive Statistics



Variable: dS-Sesong

Anderson-Darling Normality Test

A-Squared: 2,071
P-Value: 0,000

Mean 1,01547
StDev 0,12750
Variance 1,63E-02
Skewness -7,0E-01
Kurtosis 1,63100
N 120

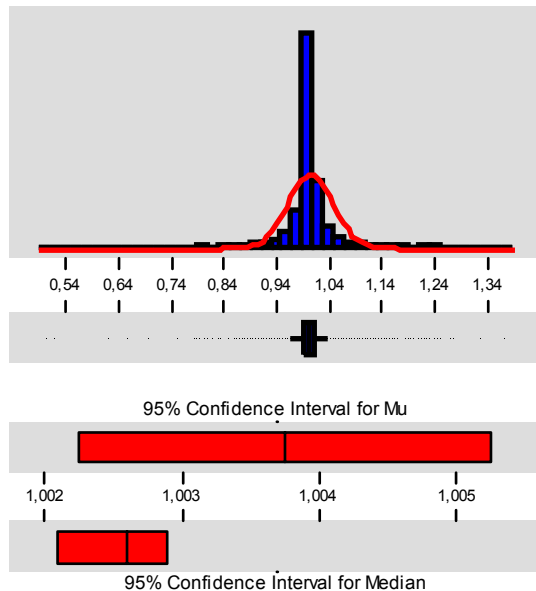
Minimum 0,60900
1st Quartile 0,95293
Median 1,03710
3rd Quartile 1,09075
Maximum 1,34560

95% Confidence Interval for Mu
0,99242 1,03851

95% Confidence Interval for Sigma
0,11315 0,14604

95% Confidence Interval for Median
1,00911 1,05418

Descriptive Statistics



Variable: dS-uke

Anderson-Darling Normality Test

A-Squared: 260,210
P-Value: 0,000

Mean 1,00375
StDev 0,04309
Variance 1,86E-03
Skewness -4,5E-01
Kurtosis 23,2781
N 3179

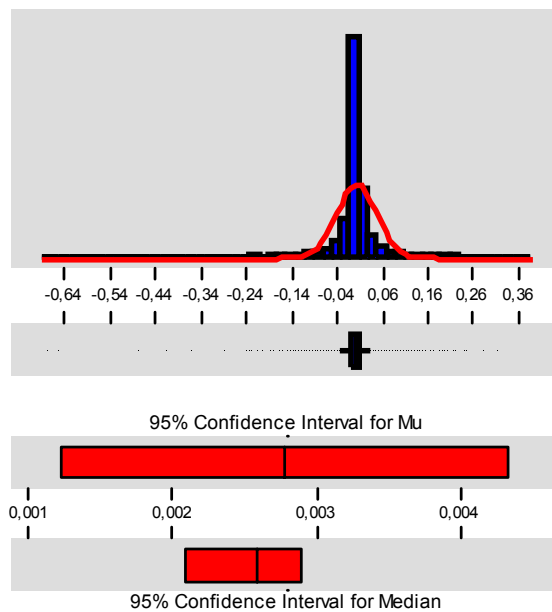
Minimum 0,50804
1st Quartile 0,99481
Median 1,00260
3rd Quartile 1,01197
Maximum 1,37493

95% Confidence Interval for Mu
1,00225 1,00525

95% Confidence Interval for Sigma
0,04206 0,04418

95% Confidence Interval for Median
1,00210 1,00290

Descriptive Statistics



Variable: dLnS-uke

Anderson-Darling Normality Test

A-Squared: 272,793
P-Value: 0,000

Mean 2,78E-03
StDev 4,46E-02
Variance 1,99E-03
Skewness -2,62515
Kurtosis 45,1962
N 3179

Minimum -6,8E-01
1st Quartile -5,2E-03
Median 0,002600
3rd Quartile 0,011900
Maximum 0,318400

95% Confidence Interval for Mu
0,001232 0,004333

95% Confidence Interval for Sigma
0,043526 0,045720

95% Confidence Interval for Median
0,002100 0,002900

VEDLEGG 6: Testing av tilsigserier

Deskriptiv statistikk tilsigserier ukenivå:

Uke	Test tilsig			Test Ln(tilsig)		
	Kurtosis	Skjevhet	P-verdi	Kurtosis	Skjevhet	P-verdi
17	3,482	1,800	0	-0,46	0,1	0,021
18	1,655	1,403	0	-0,46	-0,41	0,031
19	2,514	1,479	0	-0,041	-0,71	0,072
20	-0,007	0,080	0,046	3,24	-1,24	0,04
21	0,244	0,548	0,097	0,244	0,548	0,097
22	-0,340	0,550	0,122	-0,64	-0,14	0,85
23	-0,820	0,122	0,337	0,24	-0,56	0,48
24	-0,811	0,233	0,367	-0,34	-0,44	0,35
25	-0,64	0,499	0,026	-0,17	-0,24	0,681
26	-0,84	0,47	0,006	-0,89	-0,092	0,21
27	-0,47	0,374	0,472	-0,33	-0,51	0,189
28	-0,008	0,530	0,202	1,3	-0,87	0,19
29	3,824	1,46	0,002	1,41	-0,66	0,023
30	-0,078	0,587	0	-0,5	-0,17	0,26
31	1,53	1,32	0,004	0,49	-0,48	0,82
32	2,318	1,346	0	0,007	-0,47	0,26
33	4,877	1,779	0	0,71	-0,56	0,31
34	4,323	1,802	0	0,99	-0,42	0,73
35	2,777	1,524	0	3,89	-1,0	0,25
36	2,518	1,504	0	1,29	-0,69	0,36
37	-0,072	0,402	0,056	0,088	-0,38	0,73
38	0,779	0,713	0,092	-0,24	-0,63	0,045
39	2,886	1,623	0	0,25	-0,53	0,38
40	1,445	1,350	0	0,078	-0,26	0,576
41	0,34	0,83	0,04	1,21	-0,43	0,41
42	5,0	1,88	0	-1,31	-0,22	0,28
43	5,0	1,87	0	0,64	-0,92	0,31
44	1,17	1,3	0	0,007	-0,35	0,55
45	1,51	1,44	0	-0,29	-0,78	0,44
46	2,97	1,34	0,01	-0,17	-0,51	0,32
47	-0,01	0,8	0,01	-0,34	-0,44	0,35
48	6,2	2,2	0	0,57	-0,24	0,29
49	15,6	3,5	0	0,078	-0,56	0,61
50	3,9	1,87	0	-0,17	-0,24	0,681
51	0,32	0,47	0,24	0,67	-0,71	0,26
52	0,52	0,12	0,92	0,36	-0,82	0,44

Forventingsverdi og standardavvik for tilsig på blokknivå i GWh.

Blokk	Start uke 17		Start uke 40	
	Forventning	Standardavvik	Forventning	Standardavvik
1	272	194	241	159
2	879	315	116	64
3	571	302	70	42
4	272	162	38	18