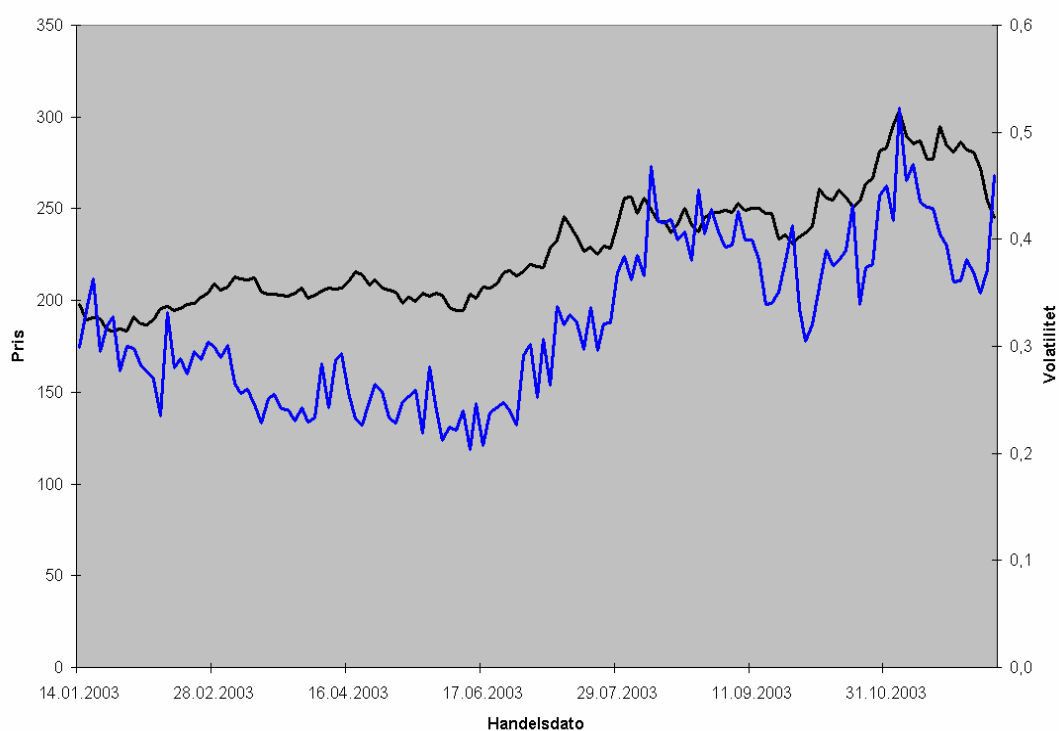


# Modellering av forwardkurver og spotpriser i elektrisitetsmarkedet



**Jon Hildor Fløgstad**

**Leif Arve Løken**

**2005**

Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse

## Forord

---

Denne rapporten er skrevet som del av fordypningsemnet Investering, finans og økonomistyring på sivilingeniør-/masterstudiumet Industriell økonomi og teknologiledelse ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU).

Under utarbeidelsen av denne rapporten har vi, for å komme frem til våre resultater og underbygge våre konklusjoner, utviklet flere Excelmodeller. Disse finnes i sin helhet på medfølgende CD-plate bakerst i rapporten.

Vi ønsker å takke vår veileder førsteamanuensis Stein-Erik Fleten ved NTNU for god veiledning og innsiktsfulle innspill gjennom hele prosessen. Oppgaven er skrevet i samarbeid med Elkem Energi AS, og vi ønsker også å takke Håvard Hvarnes og Thomas Dobbe for nyttig informasjon og gode tilbakemeldinger.

Trondheim 19.12.2005

---

Jon Hildor Fløgstad

---

Leif Arve Løken

## Sammendrag

---

Vi presenterer en enfaktormodell for modellering av fremtidige forwardkurver. Modellen brukes til å gi mulige utviklinger for spotprisen i tiden fremover.

Vi ser videre på hvilken volatilitetsfunksjon som best beskriver volatiliteten til de mest relevante kontraktene. Av tre testede funksjoner er det

$$\sigma = ae^{-b(u-t)} + c \sin\left(\frac{2\pi(d-t)}{365}\right) + e$$

som beskriver observerte data best. Dette gjelder både historisk og implisitt volatilitet, og dette skyldes i hovedsak det tidsavhengige sinusleddet. Funksjonen har noe ustabile parametere og bør kalibreres ofte, men dette gjelder også for de to andre funksjonene.

I vår analyse av implisitt volatilitet kommer det frem at dataene har stor spredning, men at mye av denne spredningen kan forklares med at volatiliteten til ulike kontrakter ligger på forskjellige nivå. Implisitt volatilitet er heteroskedastisk, der variansen avtar med tid til levering. Vi finner også at den implisitte volatiliteten ofte er høy når forwardprisen er høy.

Implisitt volatilitet er ofte høyere enn kumulativ historisk volatilitet, men dette varierer mye med tiden og mellom ulike kontrakter.

# Innholdsfortegnelse

---

<b>1</b>	<b>INNLEDNING</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>MARKEDET</b> .....	<b>2</b>
2.1	ELSPOT MARKEDET .....	2
2.2	DET FINANSIELLE MARKEDET.....	2
<b>3</b>	<b>FORWARDKURVEMODELLER</b> .....	<b>3</b>
3.1	TEORI .....	3
3.1.1	<i>Modellering av spotpriser</i> .....	3
3.1.2	<i>Forwardkurven</i> .....	3
3.1.3	<i>Forwardkurvemodellen</i> .....	4
3.1.4	<i>Volatilitet</i> .....	6
3.2	METODE.....	6
3.3	RESULTATER.....	7
<b>4</b>	<b>VOLATILITET I ELMARKEDET</b> .....	<b>8</b>
4.1	SESONGAVHENGIGHET .....	8
4.2	SAMUELSSON EFFEKT.....	9
<b>5</b>	<b>HISTORISK VOLATILITET</b> .....	<b>10</b>
5.1	TEORI .....	10
5.2	VOLATILITETSMODELLEN.....	11
5.2.1	<i>Data</i> .....	11
5.2.2	<i>Empiri</i> .....	11
5.2.3	<i>Metode</i> .....	11
5.3	RESULTAT .....	13
<b>6</b>	<b>IMPLISITT VOLATILITET</b> .....	<b>17</b>
6.1	TEORI .....	17
6.2	DATA .....	18
6.3	METODE.....	18
6.4	RESULTATER.....	19
<b>7</b>	<b>KONKLUSJON</b> .....	<b>28</b>
<b>8</b>	<b>DISKUSJON OG VIDERE ARBEID</b> .....	<b>29</b>
8.1	FORWARDKURVEMODELLER.....	29
8.2	VOLATILITET .....	29
<b>9</b>	<b>REFERANSELISTE</b> .....	<b>31</b>
	<b>VEDLEGG</b> .....	<b>33</b>

## Figurliste

---

Figur 1 - Glattet forwardkurve generert fra handlede kontrakter .....	4
Figur 2 - Volatilitetskurven fra Elkems volatilitetsfunksjon.....	6
Figur 3 - Modellert spotprisuvikling med prosentiler og gjennomsnittsverdi .....	7
Figur 4 - Systemprisen på Nord Pool i 2004 og 2005 .....	8
Figur 5 - Fyllingsgrader i norske kraftmagasiner i 2004 og 2005 .....	8
Figur 6 - Tid til levering, TTD.....	13
Figur 7 - Kurver fra de tre volatilitetsfunksjonene.....	15
Figur 8 - Historisk volatilitet for ENOYR-07 og volatilitetsfunksjonene .....	16
Figur 9 - Implisitt volatilitet i forhold til TTD .....	20
Figur 10 - Implisitt volatilitet og volatilitetsfunksjonene optimalisert mot historisk volatilitet ...	21
Figur 11 - Implisitt volatilitet og volatilitetsfunksjonene optimalisert mot implisitt volatilitet ....	21
Figur 12 - Volatilitetsfunksjoner optimalisert mot historisk og implisitt volatilitet.....	22
Figur 13 - Implisitt og kumulativ historisk volatilitet for FWYR-04 .....	23
Figur 14 - Implisitt og kumulativ historisk volatilitet for FWYR-05 .....	23
Figur 15 - Implisitt og kumulativ historisk volatilitet for ENOYR-06 .....	24
Figur 16 - Implisitt volatilitet for kontrakter med levering i 2004 .....	24
Figur 17 - Implisitt volatilitet for kontrakter med levering i 2005 .....	25
Figur 18 - Implisitt volatilitet uten FWV1-04.....	25
Figur 19 - Implisitt volatilitet i forhold til pris på FWYR-04.....	26
Figur 20 - Implisitt volatilitet i forhold til pris på FWYR-05.....	26
Figur 21 - Implisitt volatilitet i forhold til pris på ENOYR-06.....	27

## Tabelliste

---

Tabell 1 - Kvadratavvik mellom historisk volatilitet og de ulike funksjonene .....	13
Tabell 2 - Parameterverdier for alle data .....	14
Tabell 3 - Parameterverdier for deldata I.....	14
Tabell 4 - Parameterverdier for deldata II.....	14
Tabell 5 - Kvadratavvik for modell med alle data .....	14
Tabell 6 - Kvadratavvik for modell med deldata I .....	14
Tabell 7 - Kvadratavvik for modell med deldata II .....	15
Tabell 8 - Optimaliserte parametere til Vol2-funksjonen .....	15
Tabell 9 - Fordeling av verdier for implisitt volatilitet .....	20
Tabell 10 - Kvadratavvik til funksjonene optimaliserte mot implisitt volatilitet .....	22

# 1 Innledning

---

Målet med arbeidet er å kartlegge volatilitetsstrukturer, da disse sammen med forwardkurven kan bidra til å forbedre beslutningsgrunnlaget for risikohåndtering, opsjonsprising, produksjonsplanlegging og investeringsbeslutning i elmarkedet.

Vi presenterer en enkel enfaktormodell der vi tar utgangspunkt i forwardkurve og en volatilitetsfunksjon. Videre analyserer vi historisk og implisitt volatilitetsdata for blant annet å finne en funksjon som beskriver dataene godt.

I analysen av volatiliteten bruker vi teori og empiri til å finne tre funksjoner som er tilpasset egenskapene til elmarkedet. De tre funksjonene er:

$$\text{Vol1: } \sigma = a((1 - c)e^{-b(u-t)} + c)$$

$$\text{Vol2: } \sigma = ae^{-b(u-t)} + c \sin\left(\frac{2\pi(d-t)}{365}\right) + e$$

Parametrene i disse funksjonene blir optimalisert til å best mulig gjengi de observerte volatilitetsverdiene. Vi finner at Vol2 er den funksjonen som best beskriver både historisk og implisitt volatilitet.

For implisitt volatilitet har vi, grunnet et noe tynt datagrunnlag, også benyttet oss av diagrammer i analysene. Her viser vi blant annet at det er en sammenheng mellom pris og implisitt volatilitet.

Både forwardkurvemodellen og volatilitetsmodellen er modulbaserte for å enkelt kunne foreta justeringer eller bytte ut deler av modellene. Dette gjør modellene mer brukervennlige og lette å endre.

Vi beskriver først markedet, ulike kontrakter og egenskapene til elmarkedet. Deretter beskriver vi kort hva som er prinsippene bak en forwardkurve og litt om volatilitetsstrukturen. Vi tar så for oss historisk og implisitt volatilitet. De ulike volatilitetsfunksjonene blir optimalisert opp mot disse to datasettene, og vi bruker videre diagrammer for å illustrere enkelte egenskaper og strukturer. Til slutt kommer vi med en kort konklusjon der vi ser på resultatene vi har kommet frem til, etterfulgt av diskusjon og forslag til videre arbeid.

## **2 Markedet**

---

Det norske kraftmarkedet ble i 1991 deregulert og muligheter for trading av kraft over et større geografisk område ble en realitet. Sverige fulgte etter og i 1996 var det mulig å handle kraft over landegrensene. Verdens første multinasjonale kraftmarked var dermed etablert. I dag er også Finland (1998) og Danmark (1999-2000) med i Nord Pool ASA.

Markedet er delt inn i tre, et balansemarked, Elbas, et spotmarked, Elspot, og et finansielt marked.

### **2.1 Elspot markedet**

På Elspot handles kraftkontrakter på timesbasis. Disse kontraktene genereres fra innmelding av produksjon og forbruk kl 12.00 dagen før levering. Dette er egentlig forwardkontrakter med én times leveringsperiode, men refereres til som spotpriser. Elbas blir brukt til handel på timeskontraktene som er inngått i Elspot. Dette er et tilnærmet sanntids-marked der man kan handle frem til en time før levering. Den gjennomsnittlige prisen over døgnet blir kalt systemprisen. Kapasitetsbegrensinger i nettet gjør at denne prisen ikke trenger å være den reelle prisen i det aktuelle geografiske området. Det vil i slike tilfeller være ulike områdepriser.

### **2.2 Det finansielle markedet**

Det finansielle markedet består av ulike kontrakter som forwards-, futures- og differansekontrakter, noe som muliggjør spekulering og hedging

Kontraktene som blir handlet på Nord Pool er standardiserte i volum, handelsperiode og leveringstid. Etersom spotprisen i kraftmarkedet egentlig er en forward, er forwardkontraktene egentlig swaps. Vi vil likevel videre bruke betegnelsen spot for kontrakter med levering neste døgn og forward for kontrakter utover dette.

Futureskontraktene har kort leveringstid. De leveres på dag, uke eller måned. Forwardkontraktene har leveringstid på kvartal og år. I denne rapporten vil vi betegne begge typer kontrakter som forwardkontrakter, ettersom finansielt oppgjør av kontraktene ikke har betydning for forwardkurvmodelleringen.

Differansekontrakter er forwarder på differansen mellom systempris og områdepriser. Disse vil ikke bli omtalt ytterligere.



## 3 Forwardkurvemodeller

---

Et av målene for prosjektet er å bruke forwardkurver til modellering av spotprisutvikling. Den eneste spotprisen man kan si noe om ved hjelp av dagens forwardkurve er spotprisen i dag,  $S(t)$ . Vi benytter oss av at  $S(t)=f(t,t)$ , der  $f(t,t)$  er forwardprisen i dag, det vil si startpunktet til dagens forwardkurve. Dersom man kan lage en forwardkurve som starter i tidspunkt  $t$ , vet man implisitt også spotprisen i tidspunkt  $t$ . Dette brukes videre i modellen der man bruker forwardkurve, volatilitetskurve og et stokastisk ledd til å simulere mulige spotprisutviklinger.

### 3.1 Teori

Ved å ta utgangspunkt i handlede kontrakter kan man utarbeide en forwardkurve som kan brukes til å prise kunstige kontrakter. Ved å kombinere denne med en volatilitetskurve og en stokastisk variabel kan man ved hjelp av HJM-modellen modellere endring i forwardkurven og dermed også finne mulige spotprisutviklinger.

#### 3.1.1 Modellering av spotpriser

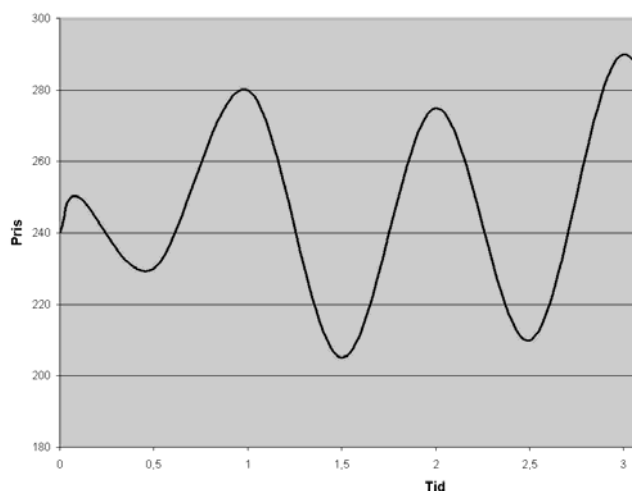
I følge Benth og Koekebakker (2005) er det to måter for stokastisk modellering av spotpriser. Man kan bruke en modell for å beregne underliggendes utvikling direkte. Dette kan bestemmes ut i fra et begrenset antall faktorer, slik som convenience yield, renter og utbytte. Alternativt kan man modellere den dynamiske utviklingen til derivater på underliggende ved hjelp av HJM-metoden (Heath, Jarrow og Morton, 1992). Prisene kan i følge HJM være påvirket av et ubegrenset antall faktorer. Prisutviklingen på derivatene kan videre brukes til å gi et estimat på prisutviklingen til underliggende.

I de fleste derivatmarkeder kan man estimere fremtidig spotpris med førstnevnte metode. Siden det som kjent ikke er mulig å lagre elektrisitet, vil denne metoden ikke kunne brukes direkte på elmarkedet. Det finnes i følge Clewlow & Strickland (2000) og Pilipovic (1998) flere måter å modellere spotprisen direkte på. Vi mener imidlertid at HJM er den mest hensiktsmessige metoden. Hovedgrunnen for dette er at HJM baserer seg på en forwardkurve som er gitt av markedet. Man trekker videre inn de faktorer man måtte ønske, og bruker disse til å justere forwardprisene. Alternativet er å basere seg på dagens spotpris, og simulere mulig utvikling fra denne.

#### 3.1.2 Forwardkurven

Forwardkurven er en kontinuerlig glattet kurve som viser prisen på forwardkontrakter. Denne kurven kan sees på som en samling av kunstige kontrakter med svært kort leveringstid.

For å lage denne forwardkurven baserer man seg på ikke-overlappende kontrakter som til sammen dekker hele det ønskede tidsrommet. Basert på at man ønsker å bruke de mest omsatte kontraktene, kan man for eksempel bruke dagskontrakter ut gjeldende uke, ukekontrakter ut måneden, og deretter månedskontrakter, kvartalskontrakter og årskontrakter to til tre år frem i tid. Dette gir diskrete periodepriser som så blir glattet for å gi en kontinuerlig forwardkurve som vist i Figur 1.



**Figur 1 - Glattet forwardkurve generert fra handlede kontrakter**

Det er langt flere kontrakter tilgjengelige i markedet enn de som inngår i denne kurven. Man vil eksempelvis kunne handle syv dagskontrakter i stedet for en ukeskontrakt. Prisen på ukeskontrakten vil da være vektet gjennomsnitt av prisen på dagskontraktene, grunnet arbitrasjemulighetene en annen pris ville medført. Med bakgrunn i dette kan man prise en forwardkontrakt med en vilkårlig leveringsperiode,  $F(t, T_1, T_2)$ , ved å beregne vektet gjennomsnittlig forwardpris.

Forwardkurven gir en pekepinn på forventet spotpris i tiden fremover. Dette blir blant annet brukt for å underbygge driftsbeslutninger innen produksjon og forbruk. Det er også ønskelig å vite hvordan kurven forandrer seg over tid.

### 3.1.3 Forwardkurvemodellen

Etter gjennomgang av ulike modeller har vi funnet den lognormale modellen til Benth og Koekebakker (2005) mest hensiktsmessig. Den baserer seg på HJM og tar utgangspunkt i følgende formel:

$$F(t, T_1, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \hat{w}(v; T_1, T_2) f(t, u) du$$

Der  $t$  er beregningstidspunkt,  $T_1$  og  $T_2$  er henholdsvis start- og sluttidspunkt for leveringsperioden,  $v$  er tidspunkt for finansielt oppgjør og  $\hat{w}(v; T_1, T_2)$  er vektingen som tar hensyn til hvilket tidspunkt kontraktene blir oppgjort finansielt. Målet er å modellere utviklingen til forwardkurven over tid, men kurven kan ikke modelleres direkte. Det en derimot kan modellere er endringen i de kunstige kontraktene. Endringen finnes med:

$$dF(t, T_1, T_2) = \bar{\sigma}(t, T_2)F(t, T_1, T_2)dW(t) - \int_{T_1}^{T_2} \partial_2 \bar{\sigma}(t, u) \frac{\hat{w}(\tau; T_1, T_2)}{\hat{w}(\tau; T_1, u)} F(t, T_1, u) du dW(t)$$

Vi bruker Black-76 (Bjersund, Rasmussen og Stensland, 2000) for å modellere volatiliteten, og får da en volatilitet som er uavhengig av tid til levering,  $u$ . Dette gir at den deriverte av volatiliteten med hensyn på leveringstid er null,  $\partial_2 \bar{\sigma}(t, u) = 0$ , og dermed at  $\bar{\sigma}(t, u) = \bar{\sigma}(t)$ . Dette gjør at det siste leddet i funksjonen forsvinner og endringen i prisen på kontraktene blir:

$$dF(t, T_1, T_2) = \bar{\sigma}(t)F(t, T_1, T_2)dW(t)$$

Å hevde at volatiliteten,  $\bar{\sigma}(t, u)$ , er uavhengig av tid til levering er en svært grov tilnærming. For å løse dette problemet mener Bjersund, Rasmussen og Stensland (2000) at en bedre tilnærming vil være:

$$\bar{\sigma}(t, T_2) - \int_{T_1}^{T_2} \partial_2 \bar{\sigma}(t, u) \frac{\hat{w}(\tau; T_1, T_2)}{\hat{w}(\tau; T_1, u)} \frac{F(t, T_1, u)}{F(t, T_1, T_2)} du \approx \int_{T_1}^{T_2} \hat{w}(u; T_1, T_2) \bar{\sigma}(t, u)$$

De viser videre at relativ endring i prisen til kontrakten er gitt av formelen:

$$\frac{dF(t, T_1, T_2)}{F(t, T_1, T_2)} = \bar{\sigma}(t, T_2)dW(t) - \int_{T_1}^{T_2} \partial_2 \bar{\sigma}(t, u) \frac{\hat{w}(\tau; T_1, T_2)}{\hat{w}(\tau; T_1, u)} \frac{F(t, T_1, u)}{F(t, T_1, T_2)} du dW(t)$$

Vi velger å gjøre den tilnærmingen at oppgjøret av kontraktene skjer ved levering. Dette gir oss at  $\hat{w}(u) = 1$  og  $\hat{w}(u; T_1, T_2) = 1/(T_2 - T_1)$ , og videre at funksjonen for endring av kontraktsprisene blir:

$$dF(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \bar{\sigma}(t, u) du F(t, T_1, T_2) dW(t)$$

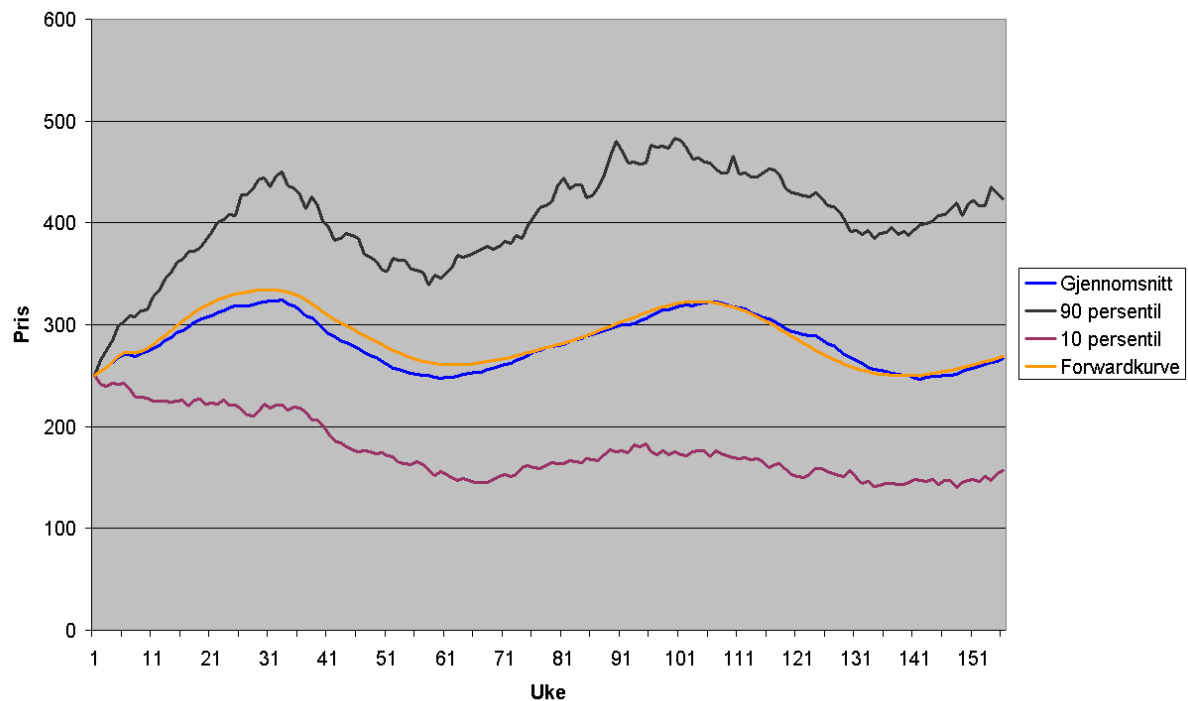
$dW(t)$  er en stokastisk variabel som er normalfordelt med  $\mu = 0$  og  $\sigma^2 = dt$ . Formelen viser endringen i forwardprisen basert på dagens pris, en volatilitetsfunksjon og et stokastisk ledd. Ved å gjøre dette for alle kontraktene kan vi lage en ny forwardkurve ut i fra:

$$F_{t+1} = F_t + dF_t$$

mellom forwardkurven og gjennomsnittlig spotprisutvikling. Ved å kjøre et større antall simuleringer vil gjennomsnittsverdien til de simulerte spotprisene bli tilnærmet lik forwardkurven. Dette følger av at det stokastiske leddet  $dW$  har forventningsverdi lik null.

### 3.3 Resultater

Denne modellen er ment som et verktøy for å forstå prosessen og for å få klarlagt hva som trengs for å lage en god modell. Resultatene bør derfor ikke brukes som beslutningsgrunnlag, men gir et grovt estimat på fremtidig spotprisutvikling. En mer omfattende modell vil derimot kunne brukes til risikohåndtering, produksjonsplanlegging og investeringsbeslutninger. Figur 3 viser forwardkurve, gjennomsnittlig spotpris og prosentiler fra en kjøring av modellen.

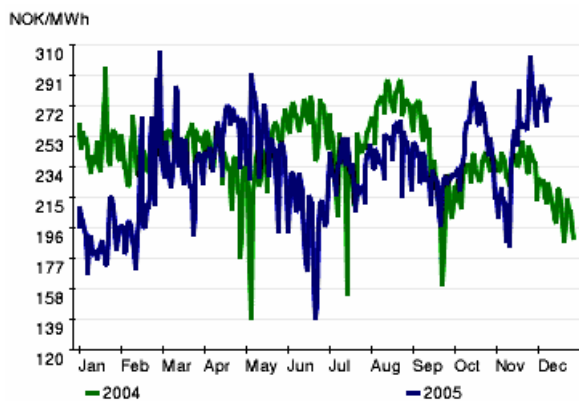


**Figur 3 - Modellert spotprisutvikling med prosentiler og gjennomsnittsverdi**

Som en ser av figuren vil ikke utfallsområdet mellom 10 og 90 prosentilene øke lineært med tiden. Dette kommer av at endring i forwardpris er en lineær funksjon av volatiliteten, og at denne er eksponentielt avtagende.

## 4 Volatilitet i elmarkedet

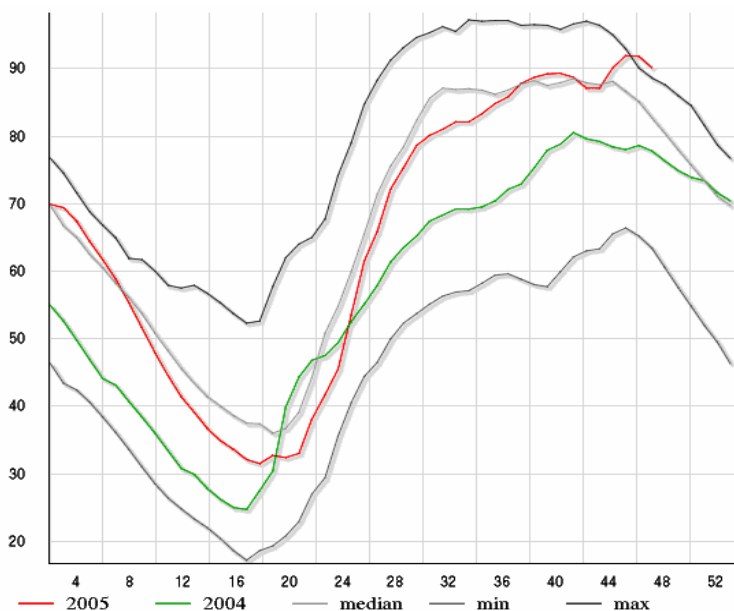
Volatiliteten i elmarkedet er særegen i forhold til både aksjemarkedet, varehandel og andre energimarkeder. I elmarkedet er volatiliteten signifikant høyere og har til tider høye topper (spikes) slik det går frem av Figur 4, som viser systemprisen på Nord Pool de siste to årene.



Figur 4 - Systemprisen på Nord Pool i 2004 og 2005

### 4.1 Sesongavhengighet

En annen viktig egenskap for volatiliteten i elmarkedet er at den har sterk sesongavhengighet. Dette kommer blant annet av at fyllingsgraden varierer sterkt gjennom året slik Figur 5 viser.



Figur 5 - Fyllingsgrader i norske kraftmagasiner i 2004 og 2005

På vinteren er kraftmagasinene til produsentene fulle. Nedbøren som kommer på denne årstiden kommer oftest som snø og blir lagret i snømagasiner. Dette gjør at produksjonsprisene er lite avhengige av nedbør og andre faktorer. Tidlig på sommeren er

magasinene derimot ofte nesten tomme. Eventuell nedbør, tørke eller andre faktorer vil da ha stor påvirkning på produksjonsvalgene. Dette vil videre, slik Figur 4 viser, gi utslag i store prisvariasjoner og altså høyere volatilitet om sommeren enn om vinteren.

#### **4.2 Samuelsson effekt**

Volatiliteten er høy for kontrakter med levering i nærliggende perioder, men avtar raskt og går mot en grenseverdi på lang sikt. Dette skyldes Samuelsson effekten, som gjør at volatiliteten øker når tiden til kontraktsinnløsning minker. Grunner til dette er at stadig mer relevant informasjon blir tilgjengelig og at kontrakter med kort tid til levering vil være sterkt påvirket av spotpris. Disse kontraktene omsettes også oftere, noe som bidrar til økt volatilitet (Eydeland og Wolyniec, 2003).

## 5 Historisk volatilitet

---

Volatilitetsfunksjonen som er brukt i forwardkurvemodellen baserer seg på empiriske data. Vi har i dag et bedre datagrunnlag for å si noe om dagens situasjon, enn det som ble lagt til grunn ved utarbeidelsen av tidligere funksjoner. Vi tester derfor denne funksjonen opp mot to andre volatilitetsfunksjoner. Basert på kvadratavvik mellom optimalisert funksjon og historisk volatilitet, samt stabilitet i parametere finner vi at Vol2 funksjonen er den beste av de tre.

### 5.1 Teori

Et vanlig mål på volatilitet er standardavvik, som blir beregnet fra følgende formel:

$$\sigma_X = \sqrt{E(X - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}$$

der  $X_i$  er variabel  $i$  og  $N$  er antall målinger. Det er vanlig å beregne årlig volatilitet, og volatilitet for andre tidsenheter kan enkelt korrigeres ved hjelp av at  $\sigma = \sigma_a \sqrt{t_i - t_{i-1}}$ , der  $\sigma_a$  er årlig volatilitet og  $t$  er tiden gitt i år. Det er verdt å merke seg at en ofte kun er interessert i virkedager, og at året da regnes til 250 dager.

Formlene beregner historisk volatilitet for en normalfordelt variabel. I finansverden antar man ofte at prisene er lognormalfordelte og dermed at logaritmene til avkastningene er normalfordelte (Eydeland og Wolyniec, 2003). Man kan da bruke følgende formel:

$$X_i = \frac{(\ln P_i - \ln P_{i-1})}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}}$$

Der  $P_i$  er observert pris nummer  $i$ . Dette gir da følgende mål på historisk volatilitet:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left( \frac{(\ln P_i - \ln P_{i-1})}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(\ln P_i - \ln P_{i-1})}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \right)^2}$$

Gjennomsnittlig historisk volatilitet vektet alle historiske data likt, og tar dermed ikke hensyn til verken sesongvariasjoner eller andre trender. For å få tidsavhengig volatilitet kan moving window metoden nyttes. Denne ser på prisendringene over en gitt tidsperiode, for eksempel 60 dager. Dette vinduet flyttes en og en dag frem og gir tidsspesifikk volatilitet:

$$\sigma(t_k) = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=k-m+1}^k \left( \frac{(\ln P_i - \ln P_{i-1})}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} - \frac{1}{m} \sum_{i=k-m+1}^k \frac{(\ln P_i - \ln P_{i-1})}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \right)^2}$$

der  $t_k$  er tidspunktet for beregning og  $m$  er lengden på vinduet.

## 6 Implisitt volatilitet

---

Ulempen med å bruke historisk volatilitet til å beskrive fremtiden er at den kun ser på historiske prisdata. For å få et bedre estimat på fremtidig utvikling kan man trekke inn informasjon om forventningene til markedet. Opsjonspriser kan nyttes som datagrunnlag for dette ved å regne ut hvilken volatilitet som er lagt til grunn for prisingen. Dette tilsvarer beregninger av implisitt volatilitet i aksjemarkedet. Det er verdt å merke seg at den implisitte volatiliteten avhenger av hvilken opsjonsprismetode en benytter. Vi baserer oss på Black'76, noe som gir en tidsuavhengig implisitt volatilitet.

I tillegg til de tre volatilitetsfunksjonene bruker vi også en del diagrammer i analysen. Vi finner at den implisitte volatiliteten blant annet avhenger av tid til levering, prisnivået til underliggende og kontraktstype.

### 6.1 Teori

Ut i fra de handlede opsjonene i markedet kan vi beregne implisitt volatilitet.

$$V_{opsjon}^{markets} = f(F_T, K, t, T, r, \sigma^{implisitt})$$

der  $V$  er prisen til den handlede opsjonen,  $F_T$  er pris på en forwardkontrakt med levering i tidspunkt  $T$ ,  $K$  er innløsningspris,  $t$  er tiden prisingen skjer,  $T$  er tid for innløsning,  $r$  er risikofri rente og  $\sigma^{implisitt}$  er implisitt volatilitet. Dersom megleren har brukt de samme forutsetningene og parametrene som blir brukt til å finne  $\sigma^{implisitt}$ , vil denne være samsvarende med volatiliteten megleren brukte i prissettingen. Risikojusteringer og annen informasjon om markedet vil derimot kunne påvirke meglerens prissetting, og dermed også den implisitte volatiliteten.

En vanlig metode for å finne denne volatiliteten er Black'76 (Bjerk Sund, Rasmussen og Stensland, 2000), og det er denne Elkem bruker. Black'76 er som følger:

$$\begin{aligned} V_t[1_\tau(f(\tau, T) - K)^+] &= E_t^*[e^{-r(\tau-t)}(f(\tau, T) - K)^+] \\ &= e^{-r(\tau-t)} f(t, T) N(d_1) - e^{-r(\tau-t)} K N(d_2) \end{aligned}$$

Der  $N^*$  er standard normal kumulativ sannsynlighetsfunksjon og

$$d_1 \equiv \frac{\ln(f(t, T) / K) + 0,5\sigma^2(\tau - t)}{\sigma\sqrt{\tau - t}}$$

$$d_2 \equiv d_1 - \sigma\sqrt{\tau - t}$$



$$\sigma \equiv \sqrt{\text{Var}_t^*[\ln(\frac{f(\tau, T)}{f(t, T)})]/(\tau - t)}$$

$\tau$  er siste handelsdag for opsjonen,  $E^*$  er risikonøytral forventning og  $\text{Var}^*$  er risikonøytral varians. For å bruke Black'76 må man altså ha forwardpris i tidspunkt  $t$ ,  $f(t, T)$ , og volatiliteten til underliggende. Ito's lemma gir videre:

$$\text{Var}_t^*[\ln(\frac{f(\tau, T)}{f(t, T)})] = \text{Var}_t^*[\int_t^\tau \frac{df(s, T)}{f(s, T)} ds]$$

Dette kan videre brukes til sammenligning mellom implisitt og historisk volatilitet.

## 6.2 Data

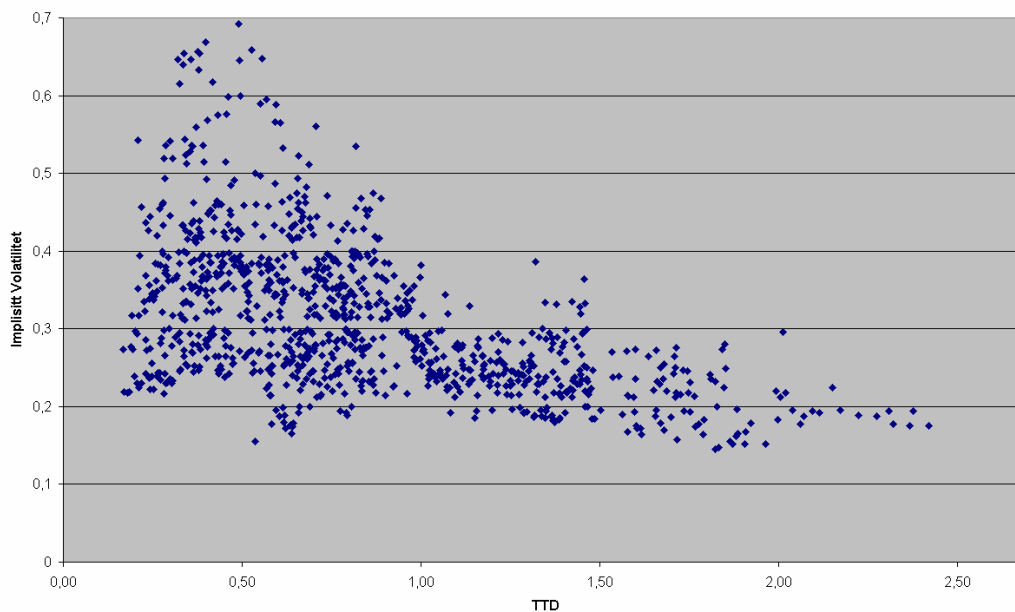
Det blir handlet svært få opsjoner på Nord Pool. Dette gjelder spesielt for opsjoner på forwarder med tid til levering over to år, mens det ikke handles opsjoner på ukes- og månedskontrakter i det hele tatt. De siste årene har handelen på opsjoner økt, noe som gir et brukbart datagrunnlag på implisitt volatilitet. Vi har fått 1212 registrerte verdier på implisitt volatilitet fra Elkem. Siden datagrunnlaget er så lite, sammenlignet med historisk volatilitet, har vi tatt med data lenger tilbake i tid. I tillegg har vi tatt med sesongkontrakter. Ved å ta med årskontrakter fra 2004 til 2006 og sesongkontrakter fra 2004 til 2005 har vi fått med 1027 verdier.

## 6.3 Metode

For å se om det er trender eller mønster i volatilitetsfordelingen utfører vi først en generell analyse av dataene. Etersom vi har et relativt tynt datagrunnlag velger vi å bruke diagrammer som analyseverktøy, i stedet for matematiske beregninger slik som korrelasjonskoeffisienter og lignende. Ved å visualisere dataene, for eksempel ved hjelp av scatter plot, kan en raskt få et overblikk og gjøre seg opp en formening om hvordan en best kan analysere dataene videre.

Det er også ønskelig å se hvordan volatilitetsfunksjonene vi har brukt tidligere oppfører seg i forhold til implisitt volatilitet. Verdiene for den implisitte volatiliteten kan imidlertid ikke direkte sammenlignes med verdiene fra de valgte volatilitetsfunksjonene. Black'76 ga følgende funksjon for implisitt volatilitet:

$$\sigma_{\text{implisitt}} = \sqrt{\text{Var}_t^*[\int_t^\tau \frac{df(s, T)}{f(s, T)} ds]/(\tau - t)}$$



**Figur 9 - Implisitt volatilitet i forhold til TTD**

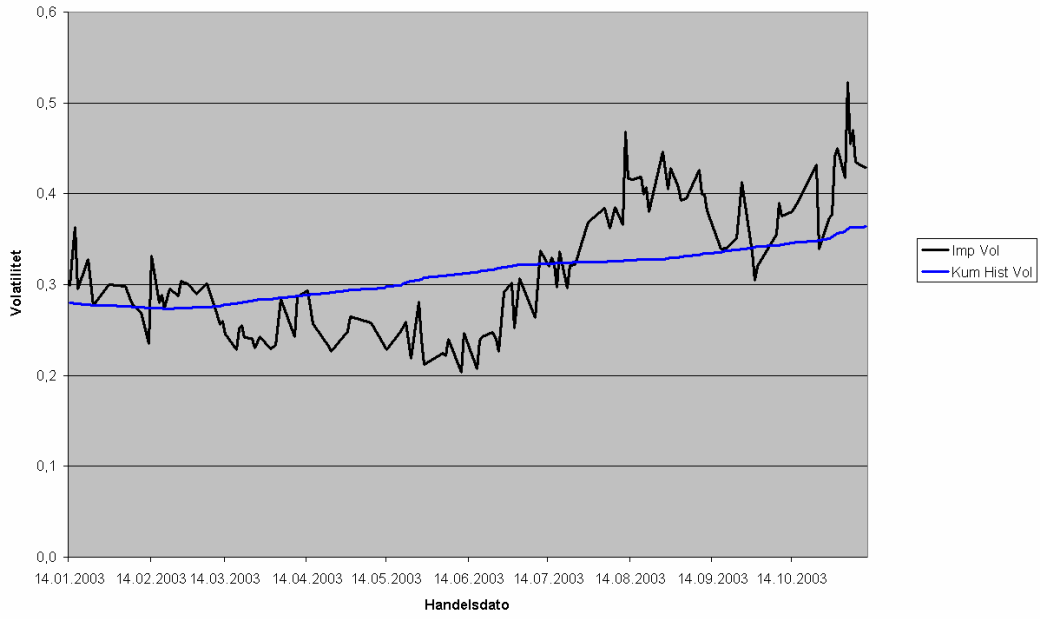
En ser av Tabell 9 at det også er en skjev fordeling av målinger i forhold til tid til levering. Etersom 70 % av målingene er på opsjoner med under et år til levering, er det også naturlig at det vil være størst spredning i disse dataene.

<b>TTD &lt; 0,5</b>	<b>0,5 ≤ TTD &lt; 1,0</b>	<b>1 ≤ TTD &lt; 1,5</b>	<b>1,5 ≤ TTD &lt; 2,0</b>	<b>2,0 ≤ TTD</b>
281	346	172	130	17

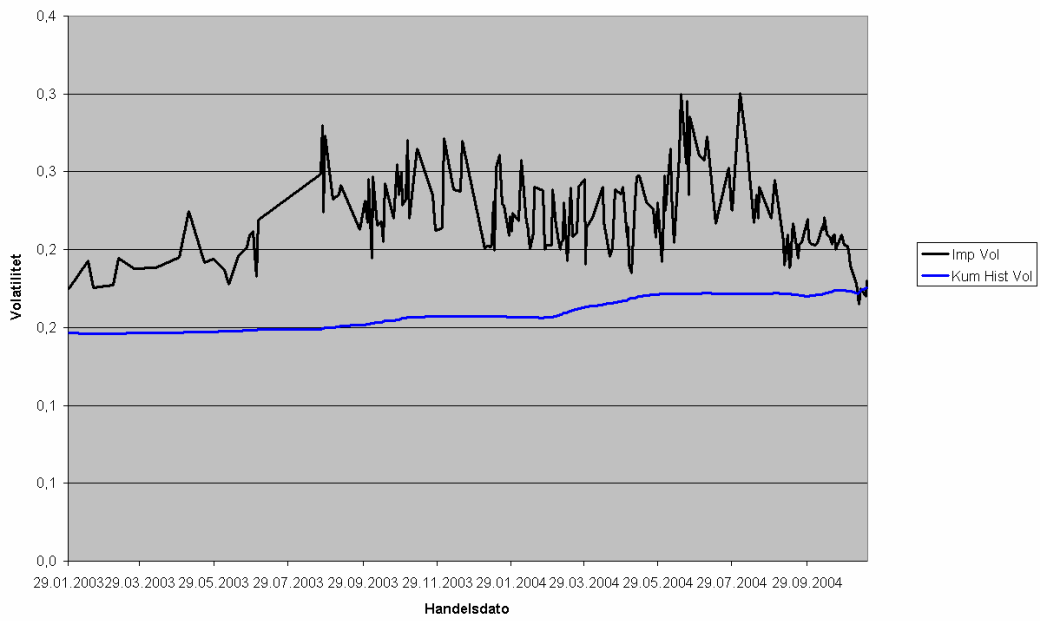
**Tabell 9 - Fordeling av verdier for implisitt volatilitet**

Det er som tidligere nevnt ønskelig å se på hvordan de ulike volatilitetsfunksjonene ligger i forhold til implisitt volatilitet.

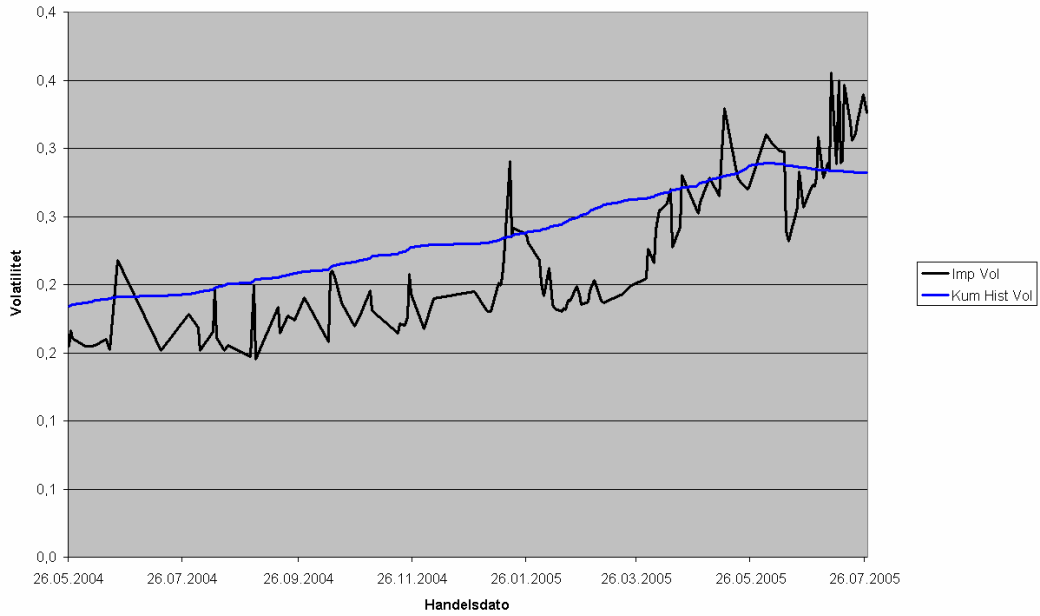
Figur 10 viser implisitt volatilitet i samme diagram som volatilitetsfunksjonene, der begge er optimalisert på historiske data. Hovedvekten av implisitt volatilitet ligger over volatilitetsfunksjonene.



**Figur 13 - Implisitt og kumulativ historisk volatilitet for FWYR-04**

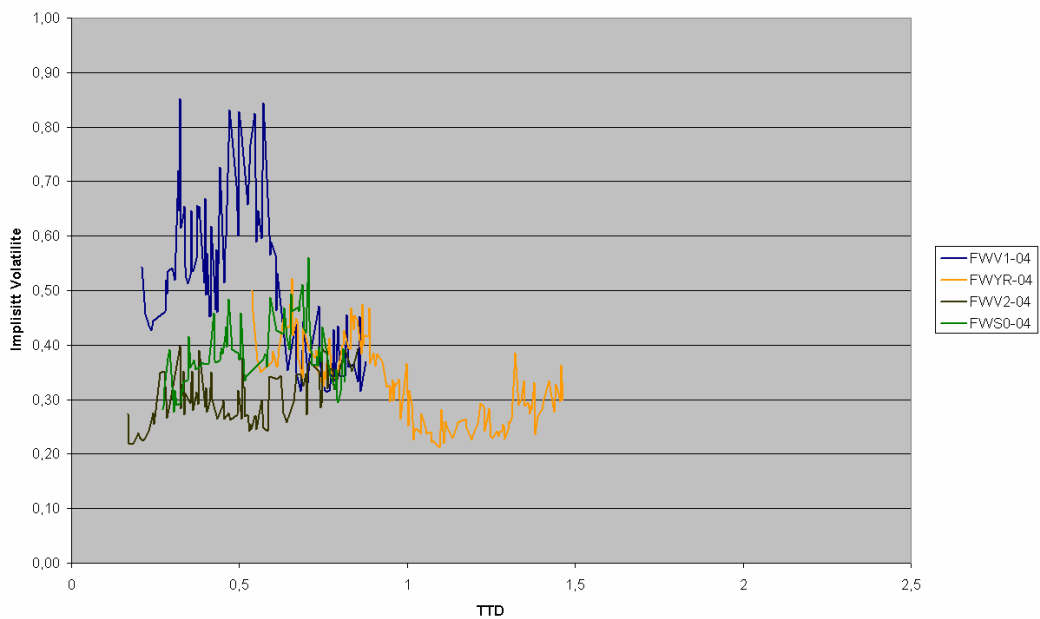


**Figur 14 - Implisitt og kumulativ historisk volatilitet for FWYR-05**

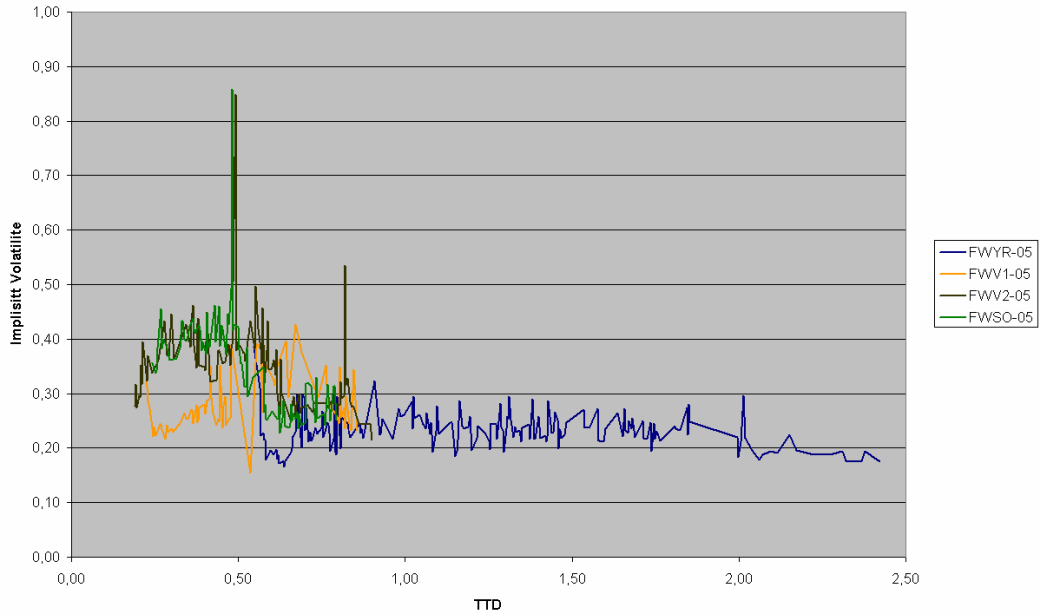


**Figur 15 - Implisitt og kumulativ historisk volatilitet for ENOYR-06**

Spredningen i implisitte volatilitet kan skyldes at volatiliteten til kontraktene ligger på ulike nivå. På Figur 16 og Figur 17 har vi skissert den implisitte volatiliteten til kontraktene hver for seg. Det går frem at FWV1-04 har betraktelig høyere volatilitet enn de resterende.

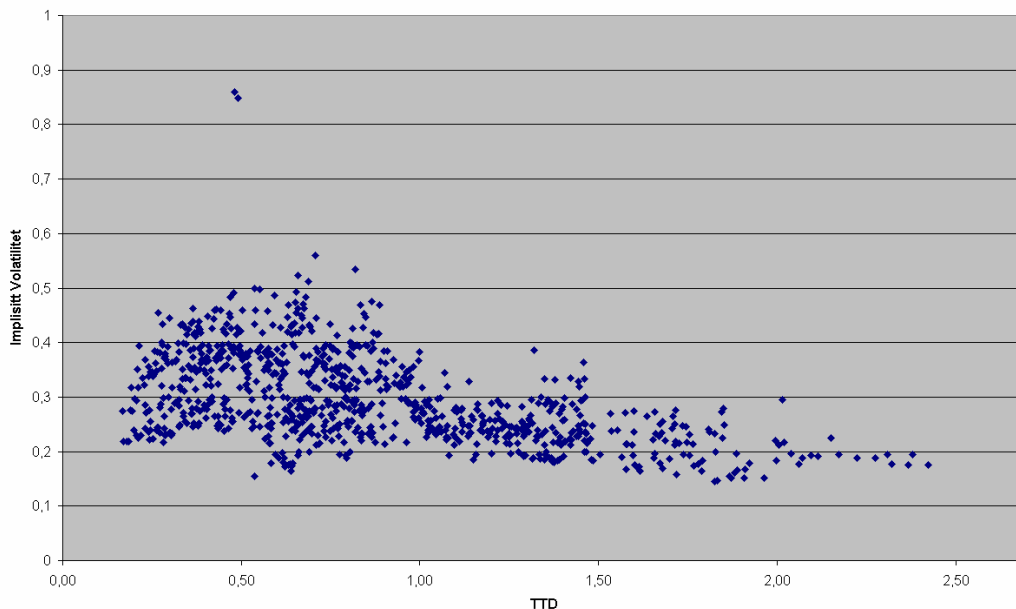


**Figur 16 - Implisitt volatilitet for kontrakter med levering i 2004**



**Figur 17 - Implisitt volatilitet for kontrakter med levering i 2005**

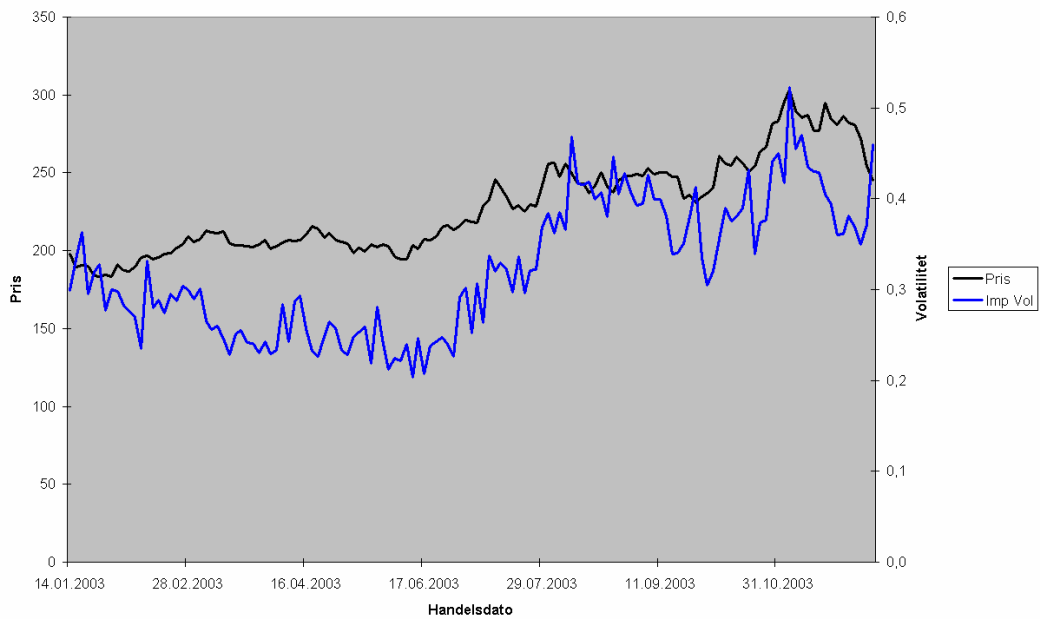
For å illustrere effekten en slik kontrakt gir, har vi plottet den implisitte volatilitetsfordelingen uten FWV1-04 i Figur 18. Det går tydelig frem at mesteparten av de høye volatilitetsverdiene kom fra denne kontrakten. En forklaring på den høye volatiliteten kan være at denne kontrakten ble handlet siste halvår av 2003 da det til tider var svært høy spotpris.



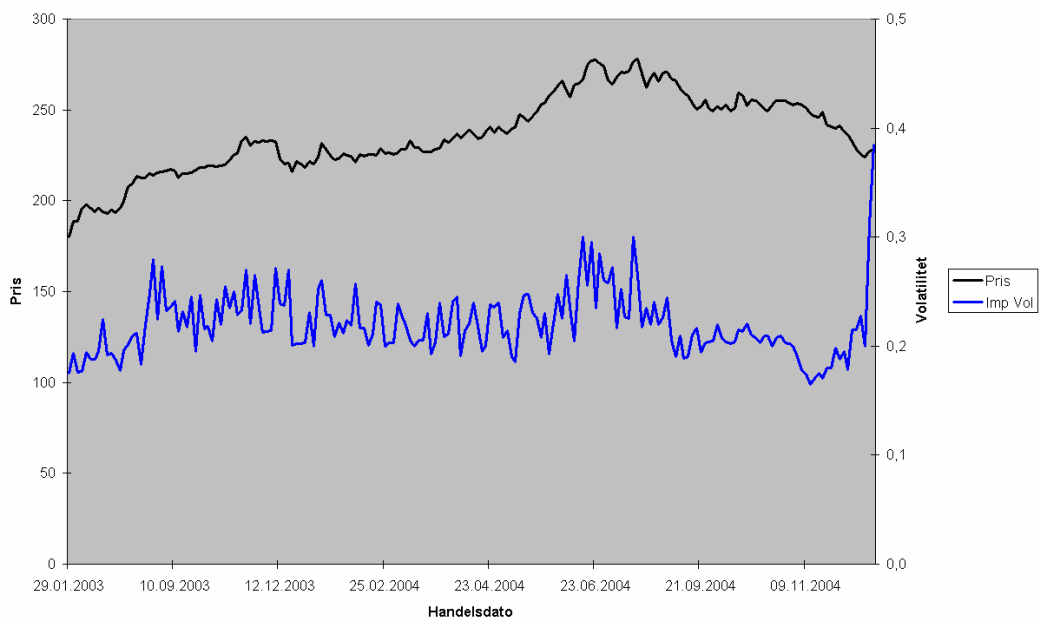
**Figur 18 - Implisitt volatilitet uten FWV1-04**

For å se i hvor stor grad den implisitte volatiliteten er høy når prisen er høy, har vi skissert disse i samme diagram. Figur 19, Figur 20 og Figur 21 viser dette for henholdsvis FWYR-04,

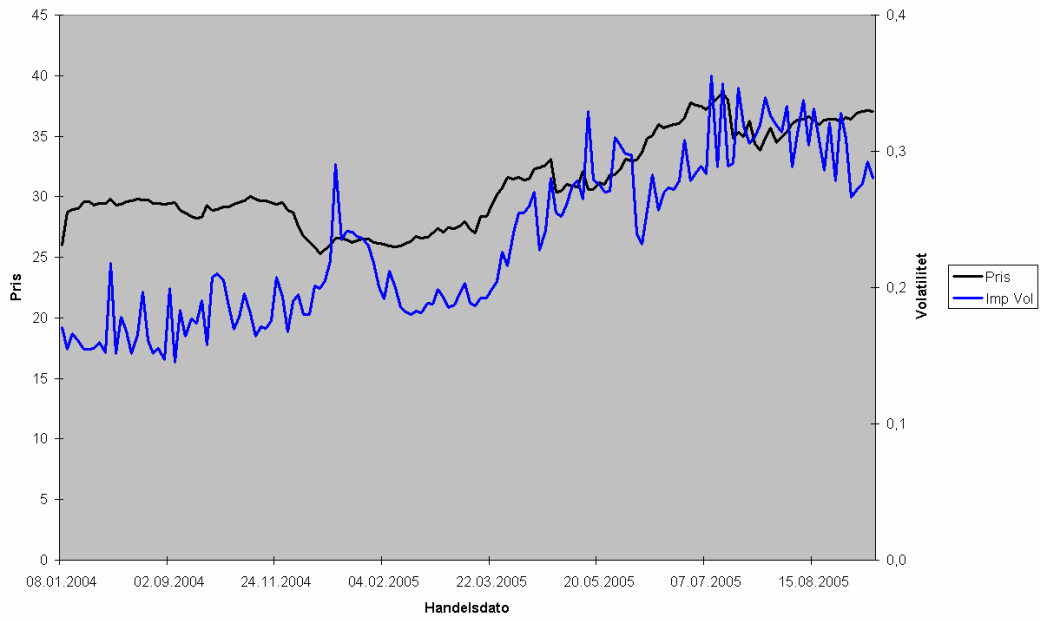
FWYR-05 og ENOYR-06. Her kommer det frem at høye priser ofte sammenfaller med høy implisitt volatilitet, men at dette ikke alltid er tilfelle.



**Figur 19 - Implisitt volatilitet i forhold til pris på FWYR-04**



**Figur 20 - Implisitt volatilitet i forhold til pris på FWYR-05**



**Figur 21 - Implisitt volatilitet i forhold til pris på ENOYR-06**

## 7 Konklusjon

---

Forwardkurvmodellen gir en grov tilnærming av utviklingen til spotprisen, og er i hovedsak ment som et verktøy for å kartlegge hvilke aspekter som er viktige i en slik modellering. Ved å videreutvikle denne modellen vil den derimot kunne gi nyttig prediksjon av prisutviklingen fremover.

De dataene som er tilgjengelig på implisitt volatilitet viser en stor spredning og antyder heteroskedastisitet, med avtagende varians ved økende tid til levering. Enkelte kontrakter, eksempelvis FWV1-04, har generelt høyere volatilitet enn andre, og bidrar derfor sterkt til den store spredningen.

Volatilitetskurvene til de ulike funksjonene er forholdsvis like når de er optimalisert mot implisitt og historisk volatilitet. Dette blir bekreftet når man viser implisitt og kumulativ historisk volatilitet i samme diagram. Vi har videre funnet at implisitt volatilitet ofte er høy når forwardprisen er høy.

Ved å kombinere historisk volatilitet med informasjon om implisitt volatilitet, vil man kunne utnytte den tilgjengelige informasjonen bedre. Hvordan disse skal vektlegges og behandles vil være svært avhengig av hva man skal bruke informasjonen til. Mulig bruksområde kan være opsjonsprising, risikohåndtering, produksjonsplanlegging og investeringsbeslutninger.



## 8 Diskusjon og videre arbeid

---

For å få et bedre beslutningsgrunnlag gjennom forwardkurvemodellen bør den utvides til en flerfaktormodell og/eller omgjøres til en markedsmodell. Vi mener at vår håndtering av en noe varierende vindusstørrelse, endring i handelsvaluta, beregning av TTD og utvalg av relevant data er tilfredsstillende. Noe som bør arbeides videre med er implementering av implisitt volatilitet og korrelasjon mellom ulike kontrakter i en markedsmodell.

De opsjonene som blir handlet på Nord Pool har i hovedsak en leveringstid mellom tre måneder og to år. Dette gjør at datagrunnlaget for implisitt volatilitet utenfor dette området er svært begrenset. Den implisitte volatiliteten er også i høy grad påvirket av meglers prisingsmetoder og preferanser.

Vi har i første omgang valgt å bruke Excel som modelleringsverktøy. Ved tunge simuleringer er dette lite tidseffektivt, men det fungerer greit for små modeller. Excel er også godt egnet for utarbeidelse og testing av mer komplekse modeller. Ved gjentatt kjøring av tunge modeller vil det derimot være fordelaktig å bruke matlab eller C++.

### 8.1 Forwardkurvemodeller

Å utvide forwardkurvemodellen til en flerfaktormodell vil medføre at en kan ta hensyn til flere elementer. Dette kan være korrelasjon mellom de ulike kontraktene, implisitt volatilitet, eller andre faktorer som påvirker utviklingen. Ved å ha med slike faktorer i forwardkurvemodellen vil en kunne få et bedre estimat på spotprisen.

En annen mulighet kan være en markedsmodell der man modellerer utviklingen av forwardkontraktene hver for seg eller i grupper. Eksempelvis med dag, uke og måned i en gruppe og kvartal og år i en annen.

### 8.2 Volatilitet

For å beregne historisk volatilitet har vi benyttet 60 dagers moving window. Et lenger vindu vil kunne skjule sesongvariasjonene, mens et kortere vindu vil gi et dårligere estimat. Ukeskontraktene blir ikke handlet i 60 dager, og historisk volatilitet for hver ukeskontrakt er derfor beregnet med et kortere vindu. Vi mener dette ikke skal ha særlig betydning på resultatet, da forventningsverdien vil være riktig selv om estimatet blir noe dårligere.

At man går fra kroner til euro har ingen innvirkning på resultatene vi har kommet frem til, ettersom vi beregner prosentvis prisendring. Svinginger i valutakurser har vi ikke tatt hensyn til, da vi mener dette har liten påvirkning på våre analyser. Endring i leveringsperioder fra sesong til kvartal kan derimot påvirke den observerte volatiliteten. Dette fordi det er sesongavhengighet, med et år som periode, i volatiliteten og at en overgang fra tredeligg til

firedeling av året gjør disse kontraktene lite sammenlignbare. Vi har av den grunn valgt å se bort fra sesongkontrakter ved beregning av historisk volatilitet. Det kan argumenteres for at man ikke behøver å fjerne sesongkontrakter i en modell med samme parametere for alle kontraktstyper. Vi har likevel valgt å gjøre dette, blant annet på grunnlag av sesongsvingningene til sinusleddet i Vol2 funksjonen. Grunnet et forholdsvis tynt datagrunnlag på implisitt volatilitet, har vi derimot valgt å ta med sesongkontrakter i disse beregningene.

At TTD blir beregnet ut i fra midten av leveringsperioden kan oppfattes som en grov tilnærming. Vi mener likevel at dette er et godt nok estimat til vårt bruk.

I våre beregninger av historisk volatilitet har vi kun tatt med de nyeste dataene. Ved å ta med alle eksisterende data ville resultatene antagelig blitt annerledes. Vi har gjort dette fordi elmarkedet er et ungt marked som stadig utvikler seg, og at eldre data har mindre verdi i beskrivelsen av fremtidig utvikling.

Modellen vår baserer seg på at volatiliteten er en funksjon som kun er avhengig av TTD og prisingstidspunkt. Den tar ikke hensyn til kontraktstype, overlappende kontrakter, hvilken ukedag kontraktene blir handlet, helligdager eller lignende. Av disse faktorene tror vi kontraktstypen vil ha mest innvirkning på volatiliteten. Et forslag til videre arbeid er å gi hver kontraktstype eller gruppe av kontrakter en egen volatilitetsfunksjon.

Analysene av implisitt volatilitet er gjennomført på et relativt tynt datagrunnlag. Det er svært få opsjoner tilgjengelig i markedet, og i tillegg er det lite handel på disse. Resultatene fra vår analyse må sees i sammenheng med dette.

Opsjonene blir ikke handlet på kontrakter med kortere tid til levering enn tre måneder, og det er også få omsatte opsjoner på kontrakter med lenger enn 2 år til levering. Dette vil kunne påvirke kurvetilpasningen til de ulike funksjonene. Vi mener likevel at funksjonene kan brukes innenfor dette området.

Ved bruk av implisitt volatilitet er det viktig å være klar over at en megler kan ta inn mange faktorer vi ikke har informasjon om. Dette vil kunne påvirke prisingen, som igjen vil gi utslag i den implisitte volatiliteten.

## 9 Referanseliste

---

- Amin, K., Pirrong, S.C., Ng, V. (1995). *Managing Energy Price Risk*. London: Risk Publications.
- Benth, F. E. (2004). "Det nordiske elektrisitetsmarkedet Nord Pool, prising og hedging". [http://www.cma.uio.no/documents/speaks/2004Benth\\_Norges-bank.pdf](http://www.cma.uio.no/documents/speaks/2004Benth_Norges-bank.pdf), aksessert 4. september 2005.
- Benth, F. E., Koekebakker, S. (2005). "Stochastic modeling and financial electricity contracts". [http://www.math.uio.no/eprint/pure\\_math/2005/24-05.pdf](http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2005/24-05.pdf), aksessert 20. august 2005
- Bjerkstrand, P., Rasmussen, H., Stensland, G. (2000). "Valuation and risk management in the Norwegian electricity market", *Discussion paper 20/2000, Norwegian School of Economics and Business Administration*.
- Clelow, L., Strickland, C. (1999). "Valuing energy options in a one factor model fitted to forward prices". *Working paper, School of Finance and Economics, Technical University of Sidney*.
- Clelow, L., Strickland, C. (2000). *Energy derivatives: pricing and risk management*. Lacima Publications.
- Eydeland, A., Wolyniec, K., (2003). *Energy and Power Risk Management*. John Wiley & Sons, Inc, s. 1-305.
- Fleten, S., Lemming, J. (2003). "Constructing forward price curves in electricity markets", *Energy Economics*.
- Fleten, S., Näsäkkälä, E. (2003). "Flexibility and technology choice in gas fired power plant investments". *Review of Financial Economics*
- Heath, D., Jarrow, R., Morton, A. (1992). "Bond pricing and the term structure of interest rates". *Econometrica*. s. 60, 77-106.
- Joshi, M., Stacey, A. "Implementations of the LIBOR market model". <http://www.quarchome.org>, aksessert 12. juni 2005.
- Keppo, J., Audet, N., Heiskanen, P., Vehvilinen, I. (2004). "Modeling electricity forward curve dynamics in the Nordic market. In Modelling Prices in Competitive Electricity Markets". *Wiley Series in Financial Economics*.

- Keppo, J., Näsäkkälä, E. (2005). "Electricity load pattern hedging with static forward strategies". *Managerial Finance, special issue on Energy Pricing and Risk Management, volume 31, number 6*, s. 116-137.
- Lucia, J., Schwartz, E.S. (2002). "Electricity Prices and Power Derivatives: Evidence from the Nordic power exchange". *Review of Derivatives Research, 5(1)*, s. 5-50.
- McDonald, R. L., (2003). *Derivatives Markets*. Addison Wesley, s. 19-50,161-194,657-683.
- Pilipovic, D. (1998). *Energy Risk; Valuing and Managing Energy Derivatives*. Mc Graw-Hill, New York.
- Rebonato, R. (1999). "On the simultaneous calibration of multi-factor log-normal interest-rate models to Black volatilities and to the correlation matrix". Working paper.
- Rebonato, R. (2003). "Term-Structure Models: A Review". *Royal Bank of Scotland Quantitative Research Centre Working Paper*.

## Vedlegg

---

Beregningene og resultatene denne rapporten baserer seg på kommer fra de tre Excelmodellene som ligger på CD-platen. Disse er oppbygd på en slik måte at også utenforstående enkelt kan gjøre endringer og oppdateringer. Hver modell er selvstendig og trenger ingen støtteprogram utover Excel. Alle data som brukes ligger i den enkelte modellen. Man behøver imidlertid Solver for å kjøre noen av makroene i modellene.

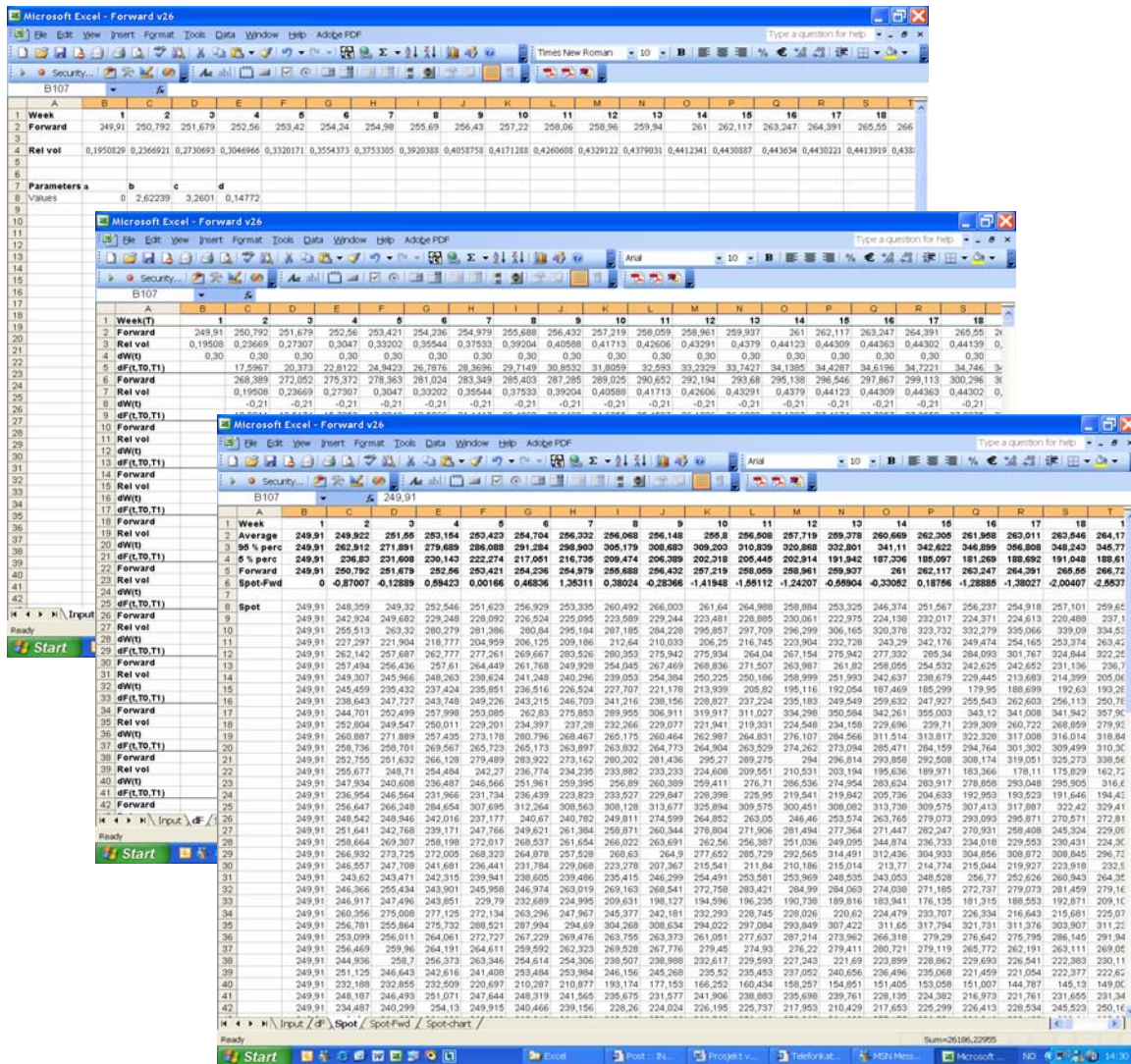
Som tidligere nevnt var dataene fra Nord Pool lite strukturerte. For å kunne hente ut de verdiene vi var interesserte i, til videre analyse, utviklet vi makroer. Disse ligger i de ulike modellene med en enkel brukerveiledning.

Modellene er delt opp i moduler, i form av ulike regneark. Hver enkelt verdi blir kun endret en plass og alle funksjoner som bruker denne verdien refererer da til samme celle. Ved å gjøre det på denne måten slipper en unødvendig dobbeltlagring og begrenser mulighetene for feil.

Under følger en kort beskrivelse av de tre modellene.

### **Forwardkurvmodellen**

Forwardkurvmodellen består av tre moduler, der brukeren kun trenger å oppdatere forwardkurve og eventuelt parametere i volatilitetsfunksjonen. Figur v1 viser en skisse av de ulike modulene i modellen.



Figur v1 - Modulene i forwardkurvemodellen

**Input:** Som navnet tilsier er det her den eksterne informasjonen til modellen blir hentet inn. Dataene som er nødvendig er forwardkurven og parametrene til volatilitetsfunksjonen. Dette arket inneholder også en knapp for kjøring av spot-simulering.

**dF:** Her blir nye forwardkurver generert ut i fra inputdata og et stokastisk ledd. Forward er gjeldende forwardkurve, ReiVol er volatiliteten som hentes fra Input, og dW er det stokastiske leddet. Ut i fra dette blir dF beregnet fra følgende formel:

$$dF = \text{Forward} * \text{ReiVol} * dW$$

Startpunktet fra hver forwardkurve blir kopiert ned til en egen rad nederst på arket, og viser estimert spotpris i det aktuelle tidspunktet. Samlet gir disse spotprisene en mulig utvikling av spotprisen over tid.

**Spot:** Hver enkelt av beregningene i dF blir så loggført og representerer en mulig spotprisutvikling. Samlingen av simuleringene gir et grunnlag for videre analyse. Vi har valgt

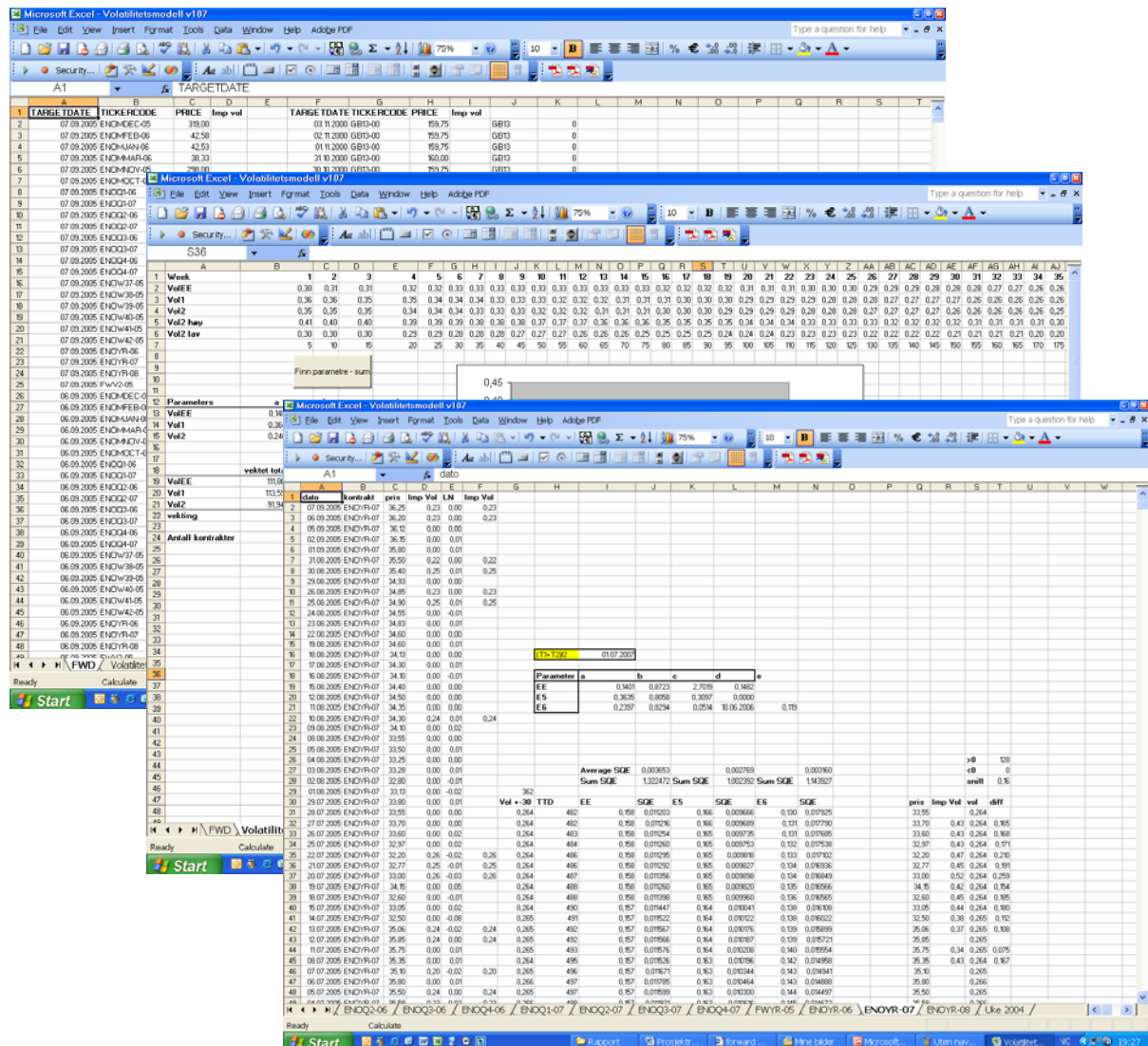


å finne gjennomsnitt, 10 og 90 persentiler og avviket spotprisen har i forhold til forwardkurven.

## Volatilitetsmodellene

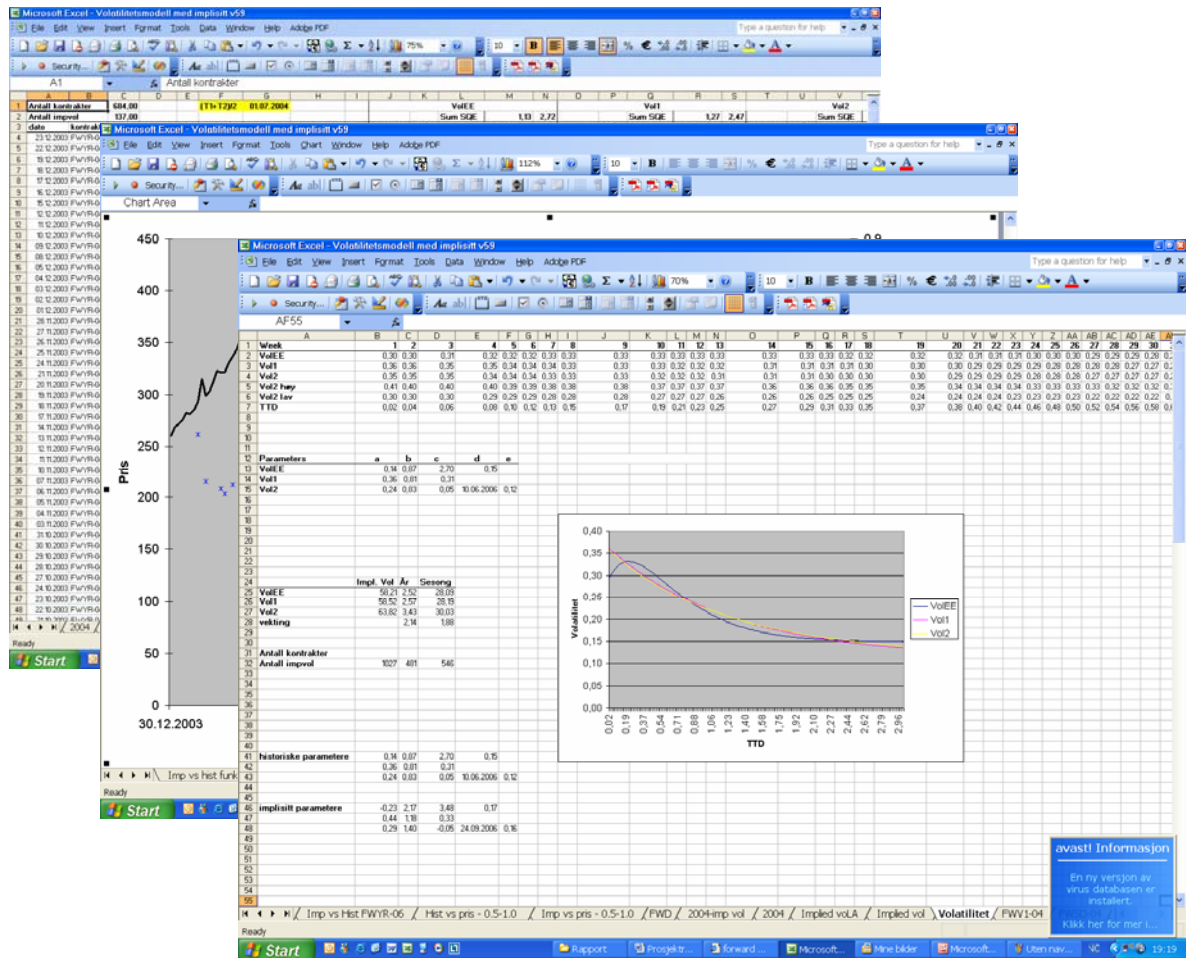
Det ble brukt to modeller til analyse av volatiliteten. En til bruk på historisk volatilitet og en til implisitt volatilitet. De to modellene har samme struktur.

De første arkene inneholder diagrammer. Deretter kommer Fwd-arket som inneholder rådata. Volatilitets-arket inneholder funksjonene, parametrene, kvadratavvikene og en enkel skisse av de ulike funksjonene. Arkene med kontraktsnavn inneholder strukturerte data på respektive kontrakter. Et slikt ark er vist fremst på Figur v2.



Figur v2 - Tre av modulene modellen for historisk volatilitet

Modellen for implisitt volatilitet inneholder en del flere diagrammer, også diagrammer som ikke er gjengitt i denne rapporten. Den inneholder også noen flere ark med data som støtter diagrammene.



Figur v3 - Tre av modulene modellen for implisitt volatilitet