

# Forwardkurvmodeller i det nordiske elektrisitetsmarkedet

Jon Hildor Fløgstad

Leif Arve Løken

2006





Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse

**MASTEROPPGAVE**

for

**STUD.TECHN. JON HILDOR FLØGSTAD OG STUD.TECHN. LEIF ARVE LØKEN**

<b>Fagområde</b>	<b>Investering, finans og økonomistyring</b> Accounting and Finance
<b>Utleveringsdato</b>	15.01.2006
<b>Tittel</b>	<b>Forwardkurvmodeller i kraftmarkedet</b> Forward Curve Models in the Electricity Market
<b>Formål</b>	Bedring av beslutningsgrunnlaget for risikohåndtering, opsjonsprising, produksjonsplanlegging og investeringsbeslutninger, gjennom en analyse av handlede kontrakter i forwardmarkedet på Nord Pool

**Følgende hovedpunkter skal behandles:**

1. Se på mulighetene for å etablere en markedsmodell for forwardkontrakter i kraftmarkedet. Denne modellen kan gjøre nytte av flere faktorer som påvirker prisutviklingen til kraftkontrakter.
2. Utføre en analyse av implisitt volatilitet fra opsjoner på forwardkontrakter handlet på Nord Pool.

Olav Fagerlid  
prodekan

Stein-Erik Fleten  
faglærer



# HOVEDOPPGAVE

Vår semester 2006

Student Jon Hildor Fløgstad  
Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse

## ERKLÆRING

Jeg erklærer herved på ære og samvittighet at jeg har utført ovennevnte hovedoppgave selv og uten noen som helst ulovlig hjelp

---

Sted

---

dato

---

Signatur

Besvarelsen med tegninger m.v. blir i henhold til Forskrifter om eksamen § 3.5, NTNU's eiendom. Arbeidene - eller resultater fra disse - kan derfor ikke utnyttes til andre formål uten etter avtale med de interesserte parter.



# HOVEDOPPGAVE

Vår semester 2006

Student Leif Arve Løken  
Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse

## ERKLÆRING

Jeg erklærer herved på ære og samvittighet at jeg har utført ovennevnte hovedoppgave selv og uten noen som helst ulovlig hjelp

---

Sted

---

dato

---

Signatur

Besvarelsen med tegninger m.v. blir i henhold til Forskrifter om eksamen § 3.5, NTNU's eiendom. Arbeidene - eller resultater fra disse - kan derfor ikke utnyttes til andre formål uten etter avtale med de interesserte parter.





# Forord

Denne diplomoppgaven er skrevet som avsluttende del av sivilingeniørstudiet innen Industriell økonomi og teknologiledelse ved Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse på Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet.

Under utarbeidelsen av denne oppgaven har vi, for å komme frem til våre resultater og underbygge våre konklusjoner, utviklet flere modeller. Disse finnes på medfølgende CD bakerst i oppgaven.

Først og fremst ønsker vi å takke vår veileder førsteamanuensis Stein-Erik Fleten ved NTNU for god veiledning og innsiktsfulle innspill gjennom hele prosessen. Vi ønsker også å takke våre medstudenter for et stimulerende arbeidsmiljø og konstruktive innspill og diskusjoner. Til slutt ønsker vi å takke Håvard Hvarnes for nyttig informasjon og gode tilbakemeldinger.

Trondheim 12. juni 2006

Jon Hildor Fløgstad

Leif Arve Løken



# Sammendrag

Det nordiske elektrisitetsmarkedet er komplekst, med sterk variasjon i pris og volatilitet. Vi fokuserer på tre modeller som vi mener er godt egnet til modellering av priser og volatilitet i dette markedet. Disse er HJM-modellen til Benth og Koekebakker, tofaktormodellen til Schwartz og Smith og SABR-modellen til Hagan, Kumar, Lesniewski og Woodward. Vi kommer frem til at SABR-modellen implementert som en markedsmodell med tre modningsintervall gir best estimat på fremtidig utvikling.

Vår modell baserer seg på en forward- og en volatilitetskurve. Forwardkurven inneholder i utgangspunktet all tilgjengelig relevant informasjon i markedet, og er dermed et godt utgangspunkt for modelleringen. Vi foreslår videre en volatilitetsfunksjon som tar hensyn til de viktigste egenskapene til elektrisitetsmarkedet. Etersom volatiliteten varierer velger vi å benytte stokastisk volatilitet. Ved å bruke en lognormal modell der pris- og volatilitetsendringene er korrelert, får vi med sesongsvingningene til volatiliteten på en enkel og effektiv måte.

De ulike kontraktstypene har varierende egenskaper. Vi velger derfor å benytte oss av en markedsmodell som grupperer kontraktene i modningsintervall med grunnlag i kontraktstypene uke/måned, kvartal og år.

Implisitt volatilitet er basert på meglernes forventninger til markedet. Grunnet blant annet risikjusteringer under prising av opsjoner, velger vi å ikke benytte oss av disse dataene direkte. Vi anbefaler imidlertid å være observant på store endringer i implisitt volatilitet, da dette kan være en indikasjon på endringer i markedet.

Modellen gir gode estimat på fremtidige volatilitets- og prisutviklinger. Den er enkel å implementere og bruke, og gir god støtte i produksjonsplanlegging, investeringsanalyse og risikovurdering.



# Innhold

<b>1</b>	<b>Innledning</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Beskrivelse av markedet og teori</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Elektrisitetmarkedet</b>	<b>5</b>
2.1	Nord Pool AS . . . . .	5
2.1.1	Elspot og Elbas . . . . .	5
2.1.2	Det finansielle markedet . . . . .	5
2.2	Elektrisitetprisenes utvikling . . . . .	6
2.2.1	Påvirkningsfaktorer . . . . .	6
2.2.2	Sesongavhengighet . . . . .	7
2.2.3	Volatilitet . . . . .	7
2.3	Forwardkontraktene . . . . .	8
2.4	Sammenheng mellom forwardkontraktene . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Modellering av forwardkurver</b>	<b>11</b>
3.1	Forwardkurven . . . . .	11
3.2	Forwardkurvmodeller . . . . .	12
3.2.1	HJM modellen til Benth og Koekebakker . . . . .	12
3.2.2	Tofaktor modellen til Schwartz og Smith . . . . .	13
3.2.3	SABR modellen til Hagan m.fl. . . . .	13
3.3	Anvendelse av forwardkurvmodeller . . . . .	14
3.3.1	Volatilitetskurver . . . . .	14
3.3.2	Forwardkurver . . . . .	15
3.3.3	Spotpriser . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Analyse av datamateriale</b>	<b>17</b>
4.1	Volatilitet . . . . .	17
4.2	Regresjonsanalyse . . . . .	17
4.3	Korrelasjon . . . . .	17

<b>II</b>	<b>Data, modellering og resultater</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Beskrivelse av datagrunnlaget</b>	<b>21</b>
5.1	Datautvalg . . . . .	21
5.2	Spotprisene . . . . .	21
5.3	Forwardprisene . . . . .	22
5.4	Implisitt volatilitet fra handlede opsjoner . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Oppbygning av modell</b>	<b>27</b>
6.1	Valg av modell . . . . .	27
6.2	Forwardkurven . . . . .	28
6.3	Inndelingen til markedsmodellen . . . . .	28
6.4	Volatilitet . . . . .	29
6.4.1	Volatilitetsfunksjoner . . . . .	29
6.4.2	Valg av volatilitetsfunksjoner . . . . .	30
6.4.3	Stabilitet i parametrene . . . . .	33
6.5	Volatiliteten til volatiliteten . . . . .	35
6.6	$\beta$ -verdier . . . . .	35
6.7	Korrelasjon . . . . .	36
6.7.1	Korrelasjon mellom kontraktstypene . . . . .	36
6.7.2	Korrelasjon mellom forwardpris og volatilitet . . . . .	37
6.8	Implisitt volatilitet . . . . .	38
6.8.1	Sammenligning av historisk- og implisitt volatilitet . . . . .	39
6.8.2	Bruk av implisitt volatilitet . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Resultater</b>	<b>41</b>
7.1	Volatilitetskurven . . . . .	41
7.2	Forwardkurven . . . . .	43
7.3	Spotprisen . . . . .	44
<b>III</b>	<b>Konklusjon, diskusjon og videre arbeid</b>	<b>47</b>
<b>8</b>	<b>Konklusjon</b>	<b>49</b>
<b>9</b>	<b>Diskusjon og videre arbeid</b>	<b>51</b>
<b>IV</b>	<b>Tillegg</b>	<b>57</b>
<b>A</b>	<b>Glatting av forwardkurve</b>	<b>I</b>
<b>B</b>	<b>Utledning av HJM-modellen</b>	<b>III</b>
<b>C</b>	<b>Volatilitetsteori</b>	<b>V</b>
<b>D</b>	<b>Analyse av store datamengder</b>	<b>IX</b>

*INNHOLD*

xv

<b>E Korrelasjon</b>	<b>XIII</b>
<b>F Spotprismodellering</b>	<b>XIX</b>
<b>G Analyse av volatilitetsfunksjoner</b>	<b>XXI</b>
<b>H Implisitt volatilitet</b>	<b>XXVII</b>





# Figurer

2.1	Spotpris mellom 1993 og 2006 . . . . .	6
2.2	Produksjonskostnad for de ulike produksjonsmetodene . . . . .	7
2.3	Historisk volatilitet til spotpris . . . . .	8
2.4	Volatilitetesutviklingen til ENOQ1-06 . . . . .	8
2.5	Gjennomsnittlig volatilitet for ulike prisnivå . . . . .	9
3.1	Glattet forwardkurve generert fra handlede kontrakter . . . . .	12
5.1	Spotprisutvikling fra 1993 til 2006 . . . . .	22
5.2	Prisutviklingen til fire forwardkontrakter . . . . .	23
5.3	Observert volatilitet til hele datagrunnlaget . . . . .	23
5.4	Observert volatilitet til årskontraktene . . . . .	24
5.5	Pris på kvartalskontrakter for 2006 . . . . .	24
5.6	Implisitt volatilitet i forhold til TTD . . . . .	25
5.7	Implisitt volatilitet fra kvartalskontrakter i forhold til TTD . . . . .	26
5.8	Implisitt volatilitet fra årskontrakter i forhold til TTD . . . . .	26
6.1	Formen til de ulike volatilitetsfunksjonene . . . . .	30
6.2	Reelt, $V_1$ , og aritmetisk, $V_2$ , gjennomsnitt . . . . .	31
6.3	Optimaliserte volatilitetsfunksjoner for TTD1 . . . . .	32
6.4	Optimaliserte volatilitetsfunksjoner for TTD2 . . . . .	32
6.5	Optimaliserte volatilitetsfunksjoner for TTD3 . . . . .	33
6.6	Optimalisert Vol2-funksjon for TTD2 . . . . .	34
6.7	Spotpris fra juni 2002 til januar 2006 . . . . .	35
6.8	Kumulativ historisk- og implisitt volatilitet . . . . .	39
7.1	Volatilitetskurve til bruk i modelleringen . . . . .	42
7.2	Simulerte volatilitetskurver fra 5000 simuleringer . . . . .	42
7.3	Fordelingen til volatiliteten om 1,5 år etter 26 simuleringsteg . . . . .	43
7.4	Fordelingen til $\ln(\alpha)$ og en normalfordelingskurve . . . . .	43
7.5	Simulerte forwardkurver fra 5000 simuleringer . . . . .	44
7.6	Fordelingen til forwardprisen om 2 år etter 26 simuleringsteg . . . . .	44
7.7	Fordelingen til $\ln(f)$ og en normalfordelingskurve . . . . .	45
7.8	Modellert spotprisutvikling fra 5000 simuleringer . . . . .	45

7.9	Fordeling til estimert spotpris om 2 år etter 26 simuleringssteg . . . . .	46
A.1	Glattet forwardkurve med bid-ask spread . . . . .	I
D.1	Regresjonsanalyse med regresjonslinje og feilledd . . . . .	X
E.1	Ekstremverdi kan medføre lav korrelasjon . . . . .	XIV
E.2	Ekstremverdi kan medføre høy korrelasjon . . . . .	XV
G.1	Volatilitetsfunksjoner for Vol1 i TTD1 . . . . .	XXII
G.2	Volatilitetsfunksjoner for Vol2 i TTD1 . . . . .	XXII
G.3	Volatilitetsfunksjoner for Vol3 i TTD1 . . . . .	XXIII
G.4	Volatilitetsfunksjoner for Vol1 i TTD2 . . . . .	XXIII
G.5	Volatilitetsfunksjoner for Vol2 i TTD2 . . . . .	XXIV
G.6	Volatilitetsfunksjoner for Vol3 i TTD2 . . . . .	XXIV
G.7	Volatilitetsfunksjoner for Vol1 i TTD3 . . . . .	XXV
G.8	Volatilitetsfunksjoner for Vol2 i TTD3 . . . . .	XXV
G.9	Volatilitetsfunksjoner for Vol3 i TTD3 . . . . .	XXVI

# Innledning

Det nordiske elektrisitetsmarkedet er særegent og komplekst. Prisene påvirkes av et utall faktorer som det er vanskelig å modellere utviklingen til. Det er derfor vanlig å benytte stokastiske modeller som modellerer prisene uten å ta eksplisitt hensyn til de enkelte påvirkningsfaktorene. Aktørene i markedet etterspør nye og bedre metoder for estimering av prisutvikling og risiko. Pålitelig informasjon om fremtidig utvikling vil gi god støtte til risikovurdering, produksjonsplanlegging og investeringsanalyse.

Vårt mål er å finne en bedre måte for modellering av volatilitet og priser i elektrisitetsmarkedet. Det er viktig at en slik modell tilfredsstillende de spesielle egenskapene som kjennetegner kraftmarkedet. Vi legger vekt på å utvikle en allsidig modell med vidt bruksområde.

Mange av modellene som brukes til modellering av elektrisitetsprisen utvikling er hentet fra rente-, aksje- og råvaremarkeder. I det finansielle markedet beregnes ofte forwardprisen ut fra spotpris, risikonøytral rente og convenience yield. Denne metoden fungerer ikke like godt i kraftmarkedet ettersom elektrisitet ikke kan lagres. Det er derfor vanlig å beregne fremtidige prisutviklinger med utgangspunkt i forwardkurven, da denne inneholder all kjent relevant informasjon i markedet.

Ideen med å modellere forwardkontraktene basert på forwardkurven kan spores tilbake til Blacks formel for opsjonsprising [Black76]. Man bruker en geometrisk brownsk bevegelse for å modellere endring i forwardpris. Heath, Jarrow og Morton [Heath92] har utviklet en generell formel for modellering av endring i forwardpris ved hjelp av et driftsledd og geometriske brownske bevegelser. Benth og Koekebakker [Benth05b] tilpasser denne til elektrisitetsmarkedet ved blant annet å fjerne driftleddet. Det finnes også andre metoder for modellering av endring i forwardpriser, for eksempel jump-diffusion prosesser [Nagarajan99]. Disse tar utgangspunkt i at det kan forekomme prissprang, og modellerer dette ved hjelp av poisson-prosesser. Andre velger å benytte seg av mean-reversion. Mean-reversion modellen til Heston tar utgangspunkt i at volatiliteten på lang sikt vil trekke mot en grenseverdi [Heston93]. Schwartz og Smith [Schwartz00] presenterer en tofaktormodell, som benytter mean reversion i priser på kort sikt og usikkerhet i priser på lang sikt. Regime-switching modeller definerer et antall tilstander der prisutviklingen modelleres ulikt i hver tilstand [Gourieroux01]. Hagan, Kumar, Lesniewski og Woodward [Hagan02] benytter en stokastisk  $\alpha\beta\rho$ -modell som blant annet tar hensyn til korrelasjon mellom pris og volatilitet.

Basert på en gjennomgang av de ulike modellene velger vi å modellere utviklingen til forward- og volatilitetskurven ved hjelp av den stokastiske  $\alpha\beta\rho$ -modellen til Hagan m.fl. Etersom egenskapene til de forskjellige kontraktstypene er så forskjellige, velger vi å implementere modellen som en markedsmodell med tre modningsintervall med henholdsvis 0 til 26, 27 til 78 og 79 til 156 uker til levering. Videre finner vi den volatilitetsfunksjonen som best beskriver den historiske volatiliteten i hvert modningsintervall. Samlet danner disse en volatilitetskurve, som sammen med en forwardkurve er grunnlaget for modelleringen. En slik tilnærming til modellering av prisutviklinger i elektrisitetsmarkedet er ikke tidligere gjennomført. Modellen samsvarer godt med de observerte egenskapene til elektrisitetsmarkedet. Den gir også en god oversikt over hvordan de ulike delene er sammensatt og hvordan de utvikler seg over tid. Alle delene av modellen har en logisk tolkning, noe som bedrer brukervennligheten og gjør kvalitetssikring enklere.

Modelleringen gir informasjon om utviklinger for volatilitetskurven, forwardkurven og spotprisen. Fra modelleringen av volatiliteten kan man hente ut informasjon om utviklingen til volatilitetskurven over tid, samt hvordan sannsynlighetsfordelingen kan være. Denne informasjonen gir nyttig støtte ved risikovurderinger. På tilsvarende måte som for volatilitetskurven, kan man hente ut informasjon om utviklingen til forward- og spotpriser. Slik informasjon er viktig ved produksjonsplanlegging, investeringsanalyse og VaR.

Vi starter med å beskrive det nordiske kraftmarkedet i del I. Her kommer vi inn på teorier og ulike modeller som brukes til modellering av elektrisitetsprisenes utvikling. Videre beskrives datagrunnlaget, oppbygningen av vår modell og anvendelsesområder i del II. Del III inneholder en kort konklusjon og diskusjon rundt resultater og forutsetninger. Hvert kapittel starter med en kort beskrivelse av innhold og hovedmomenter.

# Del I

## Beskrivelse av markedet og teori



## Elektrisitetsmarkedet

Store deler av elektrisiteten i Norden blir omsatt på kraftbørsen Nord Pool. Volatiliteten til elektrisitetsprisene er høy og varierer med både tid til levering (TTD<sup>1</sup>) og handelsdato. Det handles ulike typer forwardkontrakter i det finansielle markedet, med ulik handels- og leveringsperiode.

### 2.1 Nord Pool AS

Det norske kraftmarkedet ble deregulert i 1991 og muligheter for handel av kraft over et større geografisk område ble dermed en realitet. Sverige fulgte etter, og i 1996 var det mulig å handle kraft over landegrensene. Verdens første multinasjonale kraftmarked var dermed etablert. I dag er også Finland (1998) og Danmark (1999-2000) med i Nord Pool AS. Markedet er delt inn i tre, et balansemarked, Elbas, et spotmarked, Elspot, og et finansielt marked.

#### 2.1.1 Elspot og Elbas

På Elspot handles kraftkontrakter på timesbasis. Disse kontraktene genereres ut i fra innmelding av produksjon og forbruk kl 12.00 dagen før levering. Dette er egentlig forwardkontrakter med en times leveringsperiode, men refereres til som spotpriser. Elbas blir brukt til handel på timeskontraktene som er inngått i Elspot. Dette er et tilnærmet sanntids-marked der man kan handle frem til en time før levering. Den teoretiske prisen, basert på all innmeldt produksjon og forbruk, blir kalt systempris og refereres ofte til som spotpris. Kapasitetsbegrensinger i nettet gjør at denne prisen ikke trenger å være den reelle prisen i de ulike geografiske områdene. Det vil i slike tilfeller være ulike områdepriser.

#### 2.1.2 Det finansielle markedet

Det finansielle markedet består av ulike kontrakter, forwards-, futures- og differansekontrakter, noe som muliggjør spekulering og sikringshandel<sup>2</sup>. Kontraktene som blir handlet på Nord Pool er standardisert i volum, handelsperiode og leveringsperiode. Etersom

<sup>1</sup>Time to delivery - tiden fra handelsdato til leveringsdato.

<sup>2</sup>Hedging

spotprisen i kraftmarkedet egentlig er en forwardpris, vil det vi kaller forwardkontrakter egentlig være en type swaps. Vi vil likevel videre bruke betegnelsen spot for kontrakter med levering neste døgn og forward for kontrakter utover dette. Futureskontrakter har kort leveringstid, dag, uke og måned. Forwardkontraktene har leveringstid på kvartal og år. I denne oppgaven vil vi betegne begge typer kontrakter som forwardkontrakter, ettersom finansielt oppgjør av kontraktene ikke har betydning for forwardkurvemodelleringen. Differansekontrakter er forwardkontrakter på differansen mellom systempris og områdepriser.

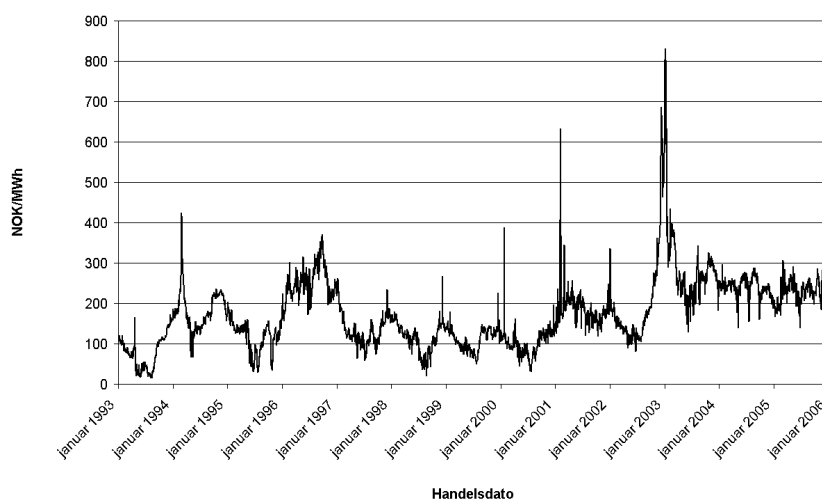
Elektrisitet har ikke de samme fysiske egenskaper som andre råvarer. En forwardkontrakt på elektrisitet innebærer levering av en jevn mengde elektrisk energi over en gitt tidshorisont. Elektrisiteten blir derfor ikke levert i bulk på et gitt tidspunkt, slik som de fleste andre råvarer.

## 2.2 Elektrisitetprisenes utvikling

Elektrisitetsprisene, både spot- og forwardprisene, blir direkte og indirekte påvirket av svært mange faktorer, noe som gjør modelleringen vanskelig. En av egenskapene til elektrisitetsprisene er sesongsvingninger. Volatiliteten til elektrisitetsprisene er også kompleks med Samuelson-effekt og økt volatilitet ved unormalt høye priser.

### 2.2.1 Påvirkningsfaktorer

Utviklingen til elektrisitetsprisene påvirkes av flere faktorer, der nedbør og temperatur er viktige ettersom de i sterk grad påvirker produksjon og etterspørsel. Andre faktorer som direkte eller indirekte påvirker prisnivået er blant annet avgiftsnivå, andre energipriser og magasinernes fyllingsgrad. I følge blant andre Bunn [Bunn03] er ikke elektrisitetsprisene nødvendigvis lik direkte marginalkostnader for produksjon, og en må derfor ha en vesentlig mer kompleks modellering enn i enkelte råvaremarkeder. Prisene varierer sterkt og figur 2.1 viser den store variasjonen i spotprisen fra 1993 til 2006.

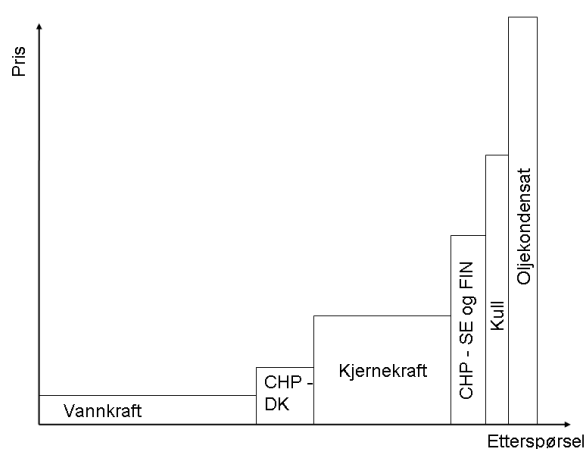


Figur 2.1: Spotpris mellom 1993 og 2006



### 2.2.2 Sesongavhengighet

En viktig egenskap til elektrisitetsprisene er sesongavhengighet. Det er betydelig høyere pris i februar enn for eksempel i august. En forklaring på denne egenskapen er at produksjonskostnadene øker kraftig med produksjonsmengden av elektrisitet. Dette kommer av at man vil basere seg på vannkraft når etterspørselen er lav, da disse har en svært lav produksjonskostnad. Etter hvert som etterspørselen øker vil en måtte ta i bruk andre produksjonsmetoder som har en høyere produksjonskostnad, og prisen vil derfor stige. Det kommer frem av figur 2.2 at sammenhengen mellom produksjonsmengde og pris er tilnærmet eksponentiell. I det nordiske markedet vil etterspørselen være sesongavhengig med høy etterspørsel på vinteren. Dette vil medføre en høyere pris på denne årstiden.



Figur 2.2: Produksjonskostnad for de ulike produksjonsmetodene

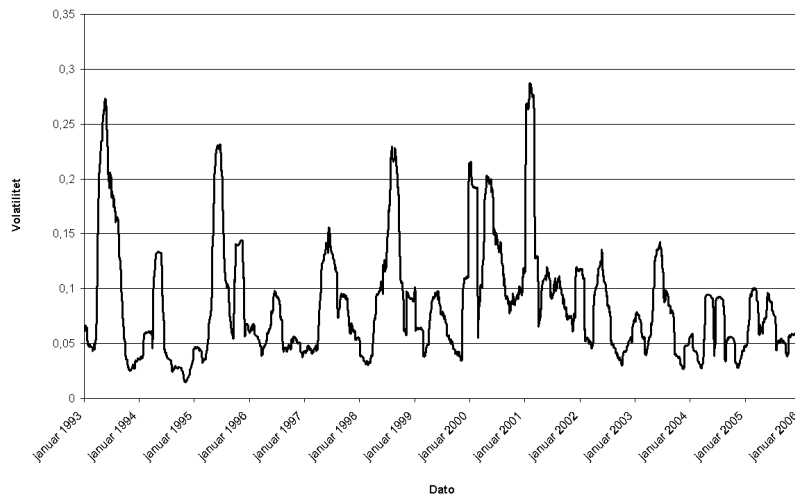
### 2.2.3 Volatilitet

Prisutviklingene i elektrisitetsmarkedet er særegen i forhold til både aksjemarkedet, varehandel og andre energimarkeder. Volatiliteten er signifikant høyere og varierer også betydelig med tiden slik det går frem av figur 2.3, som viser volatiliteten til spotprisen på Nord Pool de 14 siste årene.

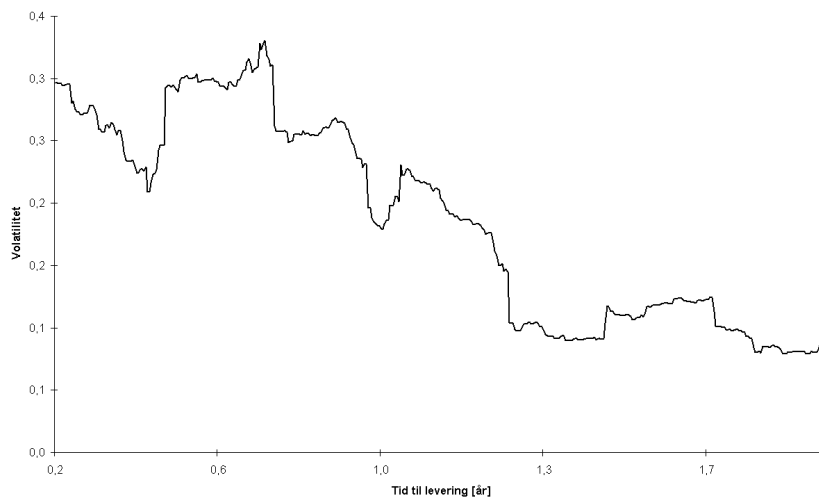
Volatiliteten er høy for kontrakter med levering i nærliggende perioder, men avtar raskt og går mot en grenseverdi på lang sikt. Dette kan forklares ut i fra Samuelson-effekten, som sier at volatiliteten øker når tiden til kontraktsinnløsning minker. Denne effekten kan man se på figur 2.4, som viser volatiliteten til en tilfeldig kontrakt. Grunnen er at stadig mer relevant informasjon blir tilgjengelig og at kontrakter med kort tid til levering vil være sterkt påvirket av spotprisen. Disse kontraktene blir også mer omsatt, noe som bidrar til økt volatilitet [Eydeland03] og [Kaminski04]. At volatiliteten avtar med økende tid til levering innebærer at forwardprisene vil trekke mot<sup>3</sup> forwardkurven på lang sikt.

Figur 2.5 viser gjennomsnittlig volatilitet for ulike prisnivåer på forwardkontrakter. Ved priser under 300 NOK/MWh er volatiliteten tilnærmet stabil. 92 % av prismålingene

<sup>3</sup>Mean reversion.



Figur 2.3: Historisk volatilitet til spotpris

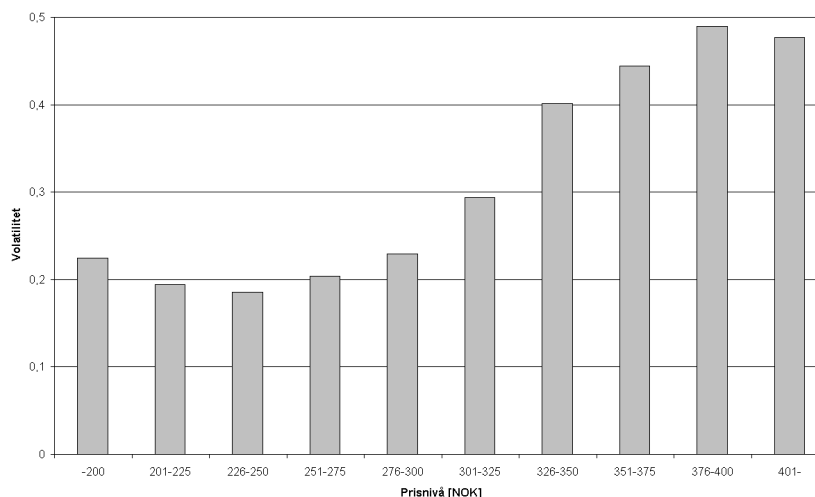


Figur 2.4: Volatilitetesutviklingen til ENOQ1-06

ligger under denne verdien, noe som kan indikere at ved normale priser vil gjennomsnittsvolatiliteten være forholdsvis stabil. Ved priser over 300 NOK/MWh øker volatiliteten betraktelig. Dette viser at volatiliteten øker når prisenivået blir unormalt høyt. Elektrisitetprisene har sesongsvingninger, der prisene er høye til samme tider av året hvert år. Volatiliteten vil derfor også få en viss sesongsvingning gjennom året.

## 2.3 Forwardkontraktene

De forskjellige forwardkontraktene har svært ulike egenskaper. Dette gjelder spesielt i forhold til handels- og leveringsperiode. Handelsperioden er tiden kontrakten kan kjøpes og selges gjennom Nord Pool, mens leveringsperioden er tidsperioden elektrisiteten blir levert. Det er fem typer forwardkontrakter som handles på Nord Pool, dags-, ukes-, måneds-,



Figur 2.5: Gjennomsnittlig volatilitet for ulike prisnivå

kvartals<sup>4</sup>- og årskontrakter. Kontraktene gir jevn levering av 1 MW gjennom hele perioden. En årskontrakt blir tilgjengelig når det er tre år til levering og handles helt frem til levering, mens en ukeskontrakt kun handles to måneder før levering. Tabell 2.1 viser at det er svært store forskjeller i handels- og leveringsperiodene til de ulike kontraktstypene. Ved å dele kontraktstypene inn i grupper, der kontrakter med like egenskaper samles, vil en kunne få en modell som beskriver prisutviklingen til kontraktene bedre enn om en ser alle under ett. En vil derfor kunne oppnå et bedre estimat på utviklingen til en gitt kontrakt dersom modelleringen av denne baserer seg på utvalgte kontraktstyper.

Kontraktstype	Handelsperiode	Leveringsperiode
Dag	1 uke	1 dag
Uke	2 mnd	1 uke
Måned	6 mnd	1 mnd
Kvartal	3 år	3 mnd
År	3 år	1 år

Tabell 2.1: Handels- og leveringsperiode for de ulike forwardkontraktene

De siste tre årene er det registrert 15000 dagspriser på forwardkontrakter. Den store datamengden gjør at man vil ha et godt datagrunnlag selv om man deler dataene inn i grupper.

I følge arbeidet til blant andre Bunn og Karakatsani [Bunn03] og Audet, Heiskanen, Keppo og Vehvilinen [Audet04] er forwardprisene lognormalfordelt.

## 2.4 Sammenheng mellom forwardkontraktene

Mange mener at korrelasjonen mellom forwardkontrakter med ulik tid til levering er lavere i elektrisitetsmarkedet enn i andre markeder. I følge Pilipovic [Pilipovic98] og Koekebakker

<sup>4</sup>Sesongkontrakter blir omtalt som kvartalskontrakter.

og Ollmar [Koekebakker01] har elektrisitetspriser det de kaller en splittet personlighet. Det vil si at det til en viss grad vil være forskjellige faktorer som påvirker utviklingen til kontrakter med ulik leveringsperiode.

Et eksempel på dette kan være at en norsk kraftprodusent planlegger å bygge et stort gasskraftverk som vil være ferdigstilt i 2008. Dette vil da kunne påvirke prisene på forwardkontrakter med levering fra og med 2008, ettersom man da vil ha en økt produksjonskapasitet. Prisene på kontrakter med levering før 2008, vil være tilnærmet upåvirket av denne utbyggingen siden man ikke kan lagre elektrisitet. Hadde dette derimot vært oljemarkedet, ville man allerede i dag forvente en prisreduksjon på oljen som følge av den økte produksjonskapasiteten i 2008. Dette skyldes at det da kan lønne seg å redusere lagerbeholdningen jevnt i tiden frem mot den forventede produksjonsøkningen.

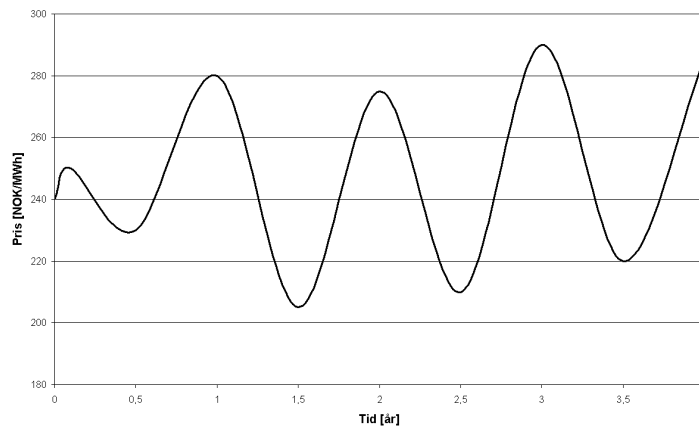
## Modellering av forwardkurver

Ved modellering av fremtidige priser i elektrisitetsmarkedet forwardkurvemodeller å foretrekke. Disse modellene bruker en glattet forwardkurve enten som basis for modellen eller til kalibrering av modellen. Vi beskriver tre slike modeller, HJM-modellen til Benth og Koekebakker [Benth05b], tofaktormodellen til Schwartz og Smith [Schwartz00] og den stokastiske  $\alpha\beta\rho$ -modellen, kalt SABR, til Hagan, Kumar, Lesniewski og Woodward [Hagan02]. Modellene kan videre implementeres som markedsmodeller med mer eller mindre atskilt modellering av de ulike modningsintervallene. Slike forwardkurvemodeller kan brukes til modellering av utviklingen til volatilitet, forwardkurver og spotpris.

### 3.1 Forwardkurven

Forwardkurven er en kontinuerlig glattet kurve, og kan sees på som en samling av kontrakter med svært kort leveringstid. For å lage denne forwardkurven baserer man seg på ikke-overlappende kontrakter som til sammen dekker hele det ønskede tidsrommet. Basert på at man ønsker å bruke de mest omsatte og likvide kontraktene, kan man for eksempel bruke dagskontrakter ut gjeldende uke, ukeskontrakter ut måneden, og deretter månedskontrakter, kvartalskontrakter og årskontrakter to til tre år frem i tid. Dette gir diskrete periodepriser som så blir glattet for å gi en kontinuerlig forwardkurve som vist i Figur 3.1. En utledning om hvordan denne utarbeides finnes i Tillegg A.

Det er langt flere kontrakter tilgjengelige i markedet enn de som inngår i denne kurven. Man vil eksempelvis kunne handle syv dagskontrakter i stedet for en ukeskontrakt. Prisen på ukeskontrakten vil da være et vektet gjennomsnitt av prisen på de tilhørende dagskontraktene, grunnet arbitrasjemulighetene en annen pris ville medført. Med bakgrunn i dette kan man prise en forwardkontrakt,  $F(t, T_1, T_2)$ , i et gitt tidspunkt,  $t$ , med leveringsperiode fra  $T_1$  til  $T_2$  ved å beregne et vektet gjennomsnitt av forwardpriser i denne perioden. Forwardkurven inneholder i utgangspunktet all relevant informasjon som er kjent i markedet. Den blir derfor blant annet brukt til å underbygge driftsbeslutninger innen produksjon og forbruk, og det er derfor ønskelig å vite hvordan kurven forandrer seg over tid.



Figur 3.1: Glattet forwardkurve generert fra handlede kontrakter

## 3.2 Forwardkurvemodeller

Vi har valgt å se nærmere på tre ulike forwardkurvemodeller. Vi ser først på enfaktor-modellen til Benth og Koekebakker som bygger på HJM-modellering. Videre ser vi på den noe mer kompliserte tofaktormodellen til Schwartz og Smith og SABR-modellen til Hagan, Kumar, Lesniewski og Woodward.

### 3.2.1 HJM modellen til Benth og Koekebakker

Benth og Koekebakker [Benth05b] presenterer en lognormal forwardkurvemodell<sup>1</sup>. Dette er en HJM-modell<sup>2</sup> som er tilpasset elektrisitetsmarkedet. Vi har tatt utgangspunkt i enfaktormodellen, men den kan også utvides til en flerfaktormodell.

Modellen gir endring i pris på en forwardkontrakt med levering fra  $T_1$  til  $T_2$ ,  $dF(t, T_1, T_2)$ , på følgende måte:

$$dF(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \sigma(t, u) du F(t, T_1, T_2) dW(t) \quad (3.1)$$

der  $\sigma(t, u)$  er volatilitet som er avhengig av prisingstidspunkt,  $t$ , og leveringstidspunkt,  $u$ , og  $dW(t)$  er en standard geometrisk brownsk bevegelse. Volatiliteten blir integrert over leveringsperioden og dividert på leveringstiden for å finne gjennomsnittlig volatilitet til forwardkontrakten. Formelen viser endring i forwardpris basert på dagens forwardpris, en volatilitetsfunksjon og et stokastisk ledd.

Ved å ta utgangspunkt i forwardkurven, dele denne i ønskede tidsintervaller og simulere endringene i disse intervallene med formel 3.2 kan man modellere en ny mulig forwardkurve. Gjentatte simuleringer gir mulige utviklinger til forwardkurven.

$$F_{t+1} = F_t + dF_t \quad (3.2)$$

<sup>1</sup>En utledning av denne finnes i Tillegg B.

<sup>2</sup>Heath, Jarrow og Morton [Heath92].

Simuleringen tar utgangspunkt i at volatiliteten er avhengig av tid til levering, og det er derfor vanlig å bruke en volatilitetskurve som input i modellen. Bakgrunnen for dette er at en konstant volatilitet vil være en svært grov tilnærming.

### 3.2.2 Tofaktor modellen til Schwartz og Smith

Schwartz og Smith [Schwartz00] har laget en tofaktormodell for prising av fysiske varer. Denne modellen tillater mean reversion i priser på kort sikt og usikkerhet i priser på lang sikt. Modellen baserer seg på spot- og forwardpriser.

Spotprisen antas å bestå av to stokastiske faktorer,  $\ln(S_t) = \chi_t + \xi_t + f(t)$ , der  $\chi_t$  er prisavviket på kort sikt,  $\xi_t$  er likevektspris og  $f(t)$  er et tidsavhengig ledd som tar hensyn til sesongvariasjoner i pris. Korttidsavviket,  $\chi_t$ , forventes å trekke mot null i Ornstein-Uhlenbeck prosessen

$$d\chi_t = -\kappa\chi_t dt + \sigma_\chi dz_\chi \quad (3.3)$$

og likevektsnivået,  $\xi_t$ , antas å følge den brownske bevegelsen

$$d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dz_\xi \quad (3.4)$$

$dz_\chi$  og  $dz_\xi$  er korrelerte inkremitter av standard brownske bevegelser, med korrelasjonen  $dz_\chi dz_\xi = \rho_{\chi\xi} dt$ . Endringene i pris på kort sikt,  $\chi_t$ , viser midlertidige endringer i pris og er forventet å returnere mot null med en rate som bestemmes av mean-reversion<sup>3</sup> koeffisienten,  $\kappa$ . Endringer i likevektsprisen,  $\xi_t$ , representerer prisendringer som forventes å vedvare. Vi har her to konstante volatilitetsparametre,  $\sigma_\chi$  og  $\sigma_\xi$ , som er henholdsvis kortsiktig og langsiktig volatilitet.

For å finne koeffisientene i denne modellen benyttes et Kalmanfilter. Dette er en forholdsvis avansert metode der de ulike parametrene finnes ut i fra bestemte input-faktorer. Denne metoden er opprinnelig utviklet for handelsvarer som kan leveres i bulk, men kan også justeres til bruk i elektrisitetsmarkedet. Resultatene fra en slik estimering er enkelt observerbare, men underliggende faktorer som nyttes og mellomregningene som gjøres er lite tilgjengelige. Det vil på grunnlag av dette være vanskelig å etterprøve tallverdiene fra optimaliseringen. Ved bruk av Kalmanfilteret er det viktig at inputverdiene mates inn riktig. For å oppnå dette grupperes ofte inputdataene i datasett. Dette kan medføre tap av viktig informasjon under optimaliseringen. Kalmanfilteret for denne typen modeller forutsetter linearitet i prisingsuttrykket, men det finnes metoder for også å bruke dette på ulinearitet. Som tidligere nevnt har forwardprisene i elektrisitetsmarkedet en spesiell volatilitetsstruktur.

### 3.2.3 SABR modellen til Hagan m.fl.

Hagan, Kumar, Lesniewski og Woodward [Hagan02] presenterer en modell som modellerer endring i forwardpris og volatilitetsstruktur, der de tar hensyn til korrelasjonen mellom disse.

Utviklingen til forwardprisene modelleres med en Markov<sup>4</sup> prosess og benytter seg av brownske bevegelser. Den tar også hensyn til at de fleste markeder både har rolige og

<sup>3</sup>Verdien forventes å trekke mot et likevektsnivå etter hvert som tiden går.

<sup>4</sup>En Markov prosess er en stokastisk prosess der bestemmelsen av neste tilstand kun er avhengig foregående tilstand.

kaotiske perioder, noe som tilsier at også volatiliteten er stokastisk og ikke konstant. For å likevel ha en relativt enkel modell benyttes en stokastisk  $\alpha\beta\rho$ -modell, også kjent som SABR-modellen.

Modellen baserer seg på følgende forventninger

$$dF = \alpha F^\beta dW_1 \quad (3.5)$$

$$d\alpha = v\alpha dW_2 \quad (3.6)$$

og at forwardprisen,  $F$ , og volatiliteten,  $\alpha$ , er korrelert,  $dW_1 dW_2 = \rho dt$ .  $v$  er et mål på volatiliteten til  $\alpha$ .

$\beta$  kan i utgangspunktet ha alle verdier mellom 0 og 1, der verdiene 0.0, 0.5 og 1.0 er mye brukt. West [West05] argumenterer for at man kan bruke alle verdier for  $\beta$ , mellom 0 og 1, men at man gjennom estetiske og fornuftsmessige vurderinger ofte kommer frem til en av de tre overnevnte verdiene. Dette fordi disse verdiene gir en logisk og godt beskrivende tolkning av modellen.  $\beta=0$  representerer en stokastisk normalfordelt modell,  $\beta=0,5$  representerer en stokastisk CIR-modell<sup>5</sup> og  $\beta=1$  en stokastisk lognormalfordelt modell. Bestemmelsen av  $\beta$  kan baseres på observasjoner av opsjonspriser og volatiliteter, men det kan være vanskelig å konkludere ut fra slike observasjoner grunnet mye støy.  $\beta$  blir derfor ofte bestemt med grunnlag i en kvalitativ vurdering av markedet modellen skal brukes på.

Det er også mulig å estimere  $\beta$ -verdien. Man kan bruke Semi-ikkeparametrisk ARMA-GARCH modellering for å generere momenter. Videre brukes Efficient method of moments for å generere parameterverdier [Kloeden92]. For å få stabile parametere kreves imidlertid opptil 200.000 simuleringer. Dette er en lite intuitiv metode som både er vanskelig å forstå og krevende å bruke.

$\alpha$  er en volatilitetslignende parameter som er med på å modellere bevegelsene i forwardkurven. Denne parameteren vil ha ulik betydning avhengig av valg av  $\beta$ -verdi.

Gjentatte simuleringer vil, på samme måte som ved bruk av HJM-modellen, gi mulige utviklinger til forwardkurven.

### 3.3 Anvendelse av forwardkurvemodeller

En forwardkurvemodell gir nyttig informasjon til aktørene i markedet, og kan blant annet brukes til å modellere utviklingen til volatilitetskurver, forwardkurver og fremtidig spotpris. Dette kan brukes som beslutningsstøtte i produksjonsplanlegging, investeringsanalyse, trading og risikohåndtering.

#### 3.3.1 Volatilitetskurver

Volatilitetskurven er et viktig mål på risiko for mange aktører i markedet. Det er derfor interessant å modellere hvordan denne endrer seg med tiden. Dette er mulig dersom man har en modell som inkluderer stokastisk volatilitet. Kjennskap til sannsynlig utfallsrom for volatilitetskurven gir støtte ved prising av derivater.

<sup>5</sup>Cox, Ingersoll og Ross [Cox85], modell som ofte benyttes til rentemodellering.



### 3.3.2 Forwardkurver

Modellering av forwardkurven kan på samme måten som for volatilitetskurven, være et verktøy for aktører i elektrisitetsmarkedet. Modelleringen gir mulig utvikling og dermed utfallsrom på forwardkurven over tid. Denne kan videre integreres over ønskede tidsperioder for å finne mulige priser på forwardkontrakter. Enkelte derivater og porteføljer kan være svært sensitive til endringer i forwardkurven, og denne typen modellering kan da være nyttig i blant annet risikovurdering og prising.

### 3.3.3 Spotpriser

Fremtidig spotpris er en type informasjon svært mange har interesse av. Spotprisen påvirker alt fra store finansielle aktører, eksempelvis Hydro og Elkem, til små private husholdninger. Gode estimat på utfallsrommet til fremtidig spotpris er derfor ettertraktet i markedet.

Det er i hovedsak to måter for stokastisk modellering av spotpriser til handelsvarer; direkte modellering eller forwardkurve modellering. Forwardkurvemodellering er den metoden som egner seg best til modellering av spotpriser i elektrisitetsmarkedet. Dette skyldes i hovedsak at elektrisitet ikke kan lagres. En mer detaljert diskusjon angående valg av modell er gitt i Tillegg F.

For å finne spotprisutvikling baserer man seg på forwardkurvemodelleringen og at startpunktet på forwardkurven vil være spotprisen i det aktuelle tidspunktet,  $f(t, t) = S(t)$ . En forwardkurve som starter i tidspunkt  $t$  gir dermed spotprisen i tidspunkt  $t$ .



## Analyse av datamateriale

Ved analyse av store datamengder er volatilitet, regresjonsanalyse og korrelasjon ofte brukt. En kort forklaring av disse følger, mens en dypere forklaring og utledning av hvordan de ulike måltallene beregnes finnes i Tillegg C, D og E.

### 4.1 Volatilitet

Det er vanlig å basere seg på historiske priser ved beregning av volatilitet. Ved å bruke moving window får man en volatilitet som er tidsavhengig. For å få med ytterligere informasjon om fremtidsforventningene til markedet, kan implisitt volatilitet benyttes. Historisk volatilitet kan sammenlignes med implisitt volatilitet dersom en bruker kumulativ historisk volatilitet.

### 4.2 Regresjonsanalyse

Ved analyse av store datamengder er regresjonsanalyse en effektiv og relativt enkel metode. Minste kvadraters metode kan brukes som et verktøy i regresjonsanalysen ved optimalisering av parametrene i de ulike funksjonene. Det er også vanlig å teste stabiliteten til parametrene for å finne den funksjonen som er best egnet til beskrivelse av datagrunnlaget over tid. Ved regresjonsanalyse bør en ta hensyn til fordelingen til feilleddene, ekstremverdier og ulineære sammenhenger.

### 4.3 Korrelasjon

Korrelasjon måler den lineære sammenhengen mellom to variable, og sier noe om hvordan de beveger seg i forhold til hverandre. Konfidensintervallet til korrelasjonskoeffisienten er nyttig for å si noe om nøyaktigheten til målingene.

Ved bearbeiding av korrelasjonsdataene er det viktig å ta hensyn til at korrelasjonskoeffisientene ikke er additive, og at de må konverteres før en for eksempel beregner gjennomsnitt. Korrelasjonsberegningene blir senere i oppgaven brukt til generering av korrelerte stokastiske ledd.



## **Del II**

# **Data, modellering og resultater**



## Beskrivelse av datagrunnlaget

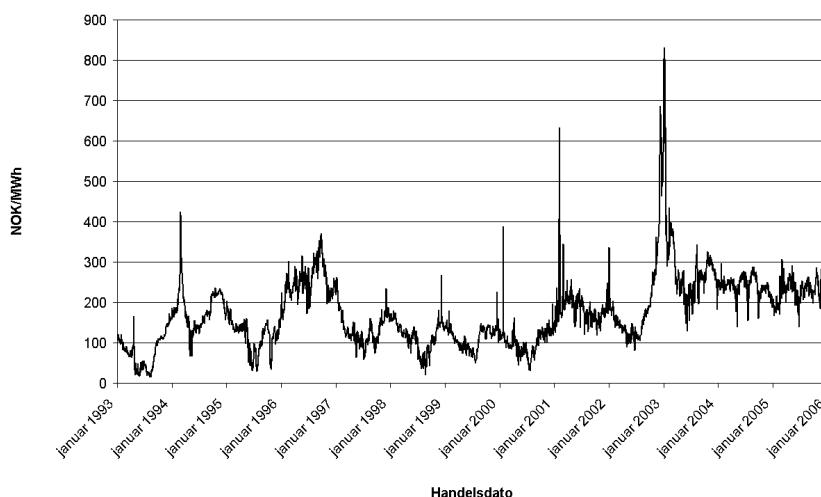
Dataene vi bruker er i hovedsak kontrakts- og opsjonspriser fra 2004 til 2006. Målingene viser store svingninger i både pris og volatilitet. Dette gjelder også for implisitt volatilitet, som i tillegg inneholder enkelte ekstremverdier.

### 5.1 Datautvalg

Alle forwardpriser som er analysert i denne oppgaven er daglige priser fra Nord Pool. Vi har valgt å bruke ukes-, måneds-, kvartals- og årskontrakter. Dagskontraktene er en del av forwardkurven, men på grunn av svært kort handelsperiode brukes ikke dagskontraktene i videre modellering. Under valg av datamateriale må man gjøre en avveining mellom å ha størst mulig datamengde og mest mulig relevant data. På grunnlag av at elektrisitetsmarkedet er i stadig utvikling og at vi har god tilgang på nyere data, velger vi å bruke kontrakter med levering fra 2004 til 2006. Kontraktene som er analysert er handlet i perioden 2. januar 2001 til 31. desember 2005. Innen for dette tidsintervallet er det ukiskontrakter med levering i 2004, månedskontrakter for 2004 og 2005, kvartalskontrakter for 2005 og 2006 samt årskontrakter med levering i 2004, 2005 og 2006. Dette gir oss i overkant av 12000 priser på forwardkontrakter. Implisitt volatilitet er hentet fra samme tidsperiode, mens spotprisene er hentet fra 1993 til 2006.

### 5.2 Spotprisene

Spotprisen i elektrisitetsmarkedet har som tidligere nevnt spesielle egenskaper. Den har blant annet større prissvingninger sammenlignet med andre råvarer, noe som medfører høyere volatilitet. På figur 5.1 ser en at prisnivået varierer mye i enkelte perioder. Dette gjør seg spesielt gjeldende rundt årsskiftene 2001/2002 og 2003/2004. Det kan være verdt å merke seg at siden midten av 2003 har prisen vært mer stabil enn foregående år. Dette trenger imidlertid ikke være representativt for fremtiden. Dersom vi for eksempel får en ny vinter med lave temperaturer og lite nedbør vil man kunne få tilsvarende prissprang.



Figur 5.1: Spotprisutvikling fra 1993 til 2006

### 5.3 Forwardprisene

Analysene våre baserer seg i hovedsak på forwardkontrakter. Tabell 5.1 viser noen nøkkeltall for de kontraktene vi benytter. Som det kommer frem i tabellen varierer forwardprisene mellom 134 og 420 NOK/MWh, og har et gjennomsnitt på 241,3 NOK/MWh. Videre ser vi at de ulike kontraktstypene ikke har store strukturelle forskjeller i prisenivå.

	Uke	Måned	Kvartal	År	Totalt
Antall	3311	2883	3759	2194	12147
Gjennomsnitt	247,2	260,1	239,5	210,6	241,3
Minimum	163,6	134,0	149,5	150,9	134,0
Maksimum	387,5	420,0	366,4	308,4	420,0
10 prosentil	203,0	197,0	191,5	169,4	183,3
90 prosentil	278,0	322,0	292,8	266,0	293,9

Tabell 5.1: Deskriptive måltall for forwardprisene

Ettersom kontraktstypene har ulike egenskaper er det lite hensiktsmessig å beskrive alle dataene under ett. På figur 5.2 har vi skissert prisutviklingen til fire tilfeldige kontrakter. Her ser vi at kvartals- og årskontraktene har jevnere prisutvikling enn kontrakter med kortere leveringsperiode.

Volatiliteten til enkeltkontraktene varierer mye med tiden. Volatilitetsmønsteret er også varierende for de ulike kontraktstypene. Figur 5.3 viser at det er svært vanskelig å se en sammenheng mellom volatilitet og tid til levering<sup>1</sup>. På grunnlag av manglende struktur i volatiliteten er det vanskelig å si noe generelt om fordelingen.

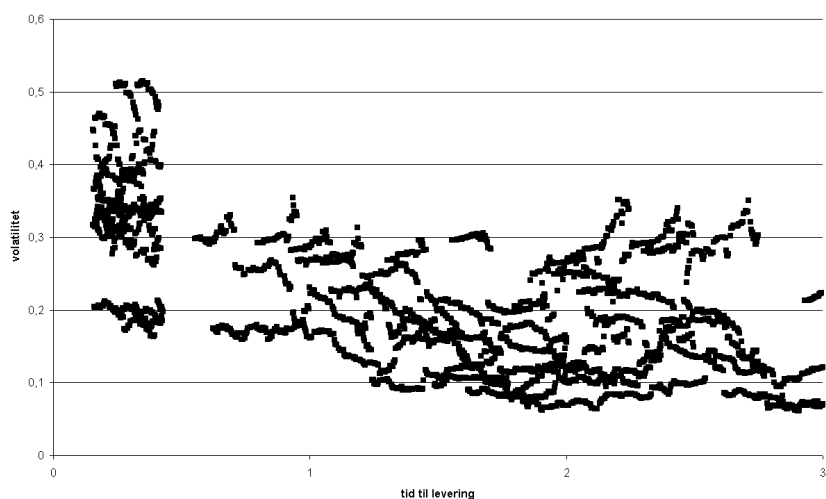
Dersom man ser på de ulike kontraktstypene hver for seg, er det enklere å se strukturen og egenskapene til volatiliteten. Figur 5.4 viser volatiliteten til to årskontrakter i

<sup>1</sup>Årsaken til at det ikke er målinger for alle tidsperioder på figuren, eksempelvis for tid til levering fra 0.4 til 0.6 år, er at leveringstidspunktet beregnes som midten av leveringsperioden.





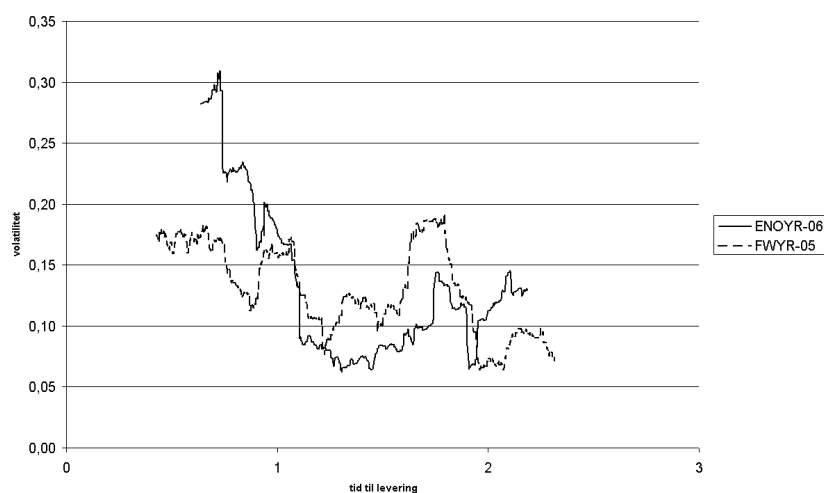
Figur 5.2: Prisutviklingen til fire forwardkontrakter



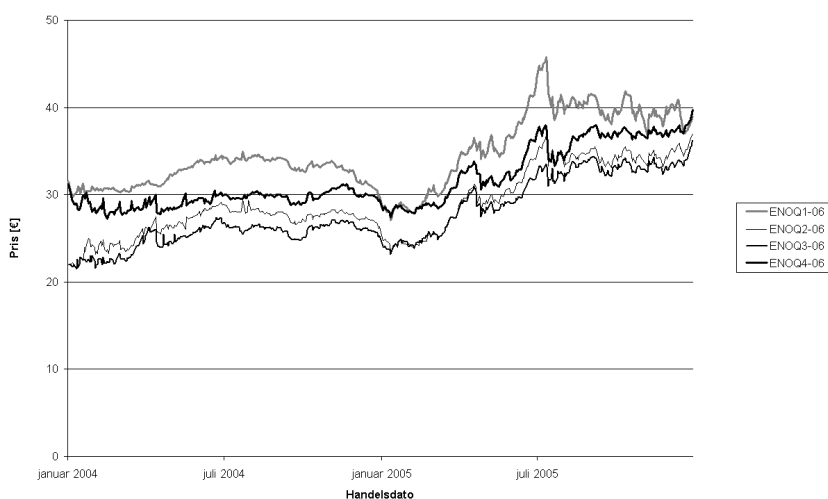
Figur 5.3: Observert volatilitet til hele datagrunnlaget

datagrunnlaget. Det kommer tydelig frem av figurene 5.3 og 5.4 at volatiliteten ikke har noen entydig trend, men at det er mulig å se at volatiliteten er avtagende ved økt tid til levering, slik samuelsoneffekten tilsier.

Spotprisen har sterke sesongsvingninger. Prisen på en forwardkontrakt er i utgangspunktet risikonøytral forventet gjennomsnittlig spotpris over leveringsperioden. Sesongsvingningene i spotprisen vil derfor påvirke prisnivået til den enkelte forwardkontrakt, men ikke medføre sesongsvingninger i prisen på en enkeltkontrakt. Figur 5.5 viser prisutviklingen til kvartalskontrakter med levering i 2006. Det er tydelig at det er ulike prisnivåer på de forskjellige kontraktene, avhengig av leveringsperiode, men at det ikke er sesongsvingninger i kontraktsprisene.



Figur 5.4: Observert volatilitet til årskontraktene



Figur 5.5: Pris på kvartalskontrakter for 2006

## 5.4 Implisitt volatilitet fra handlede opsjoner

Det blir handlet svært få, om noen, opsjoner på Nord Pool. Det blir derimot handlet opsjoner OTC<sup>2</sup> som blir clearet<sup>3</sup> av Nord Pool. Disse handlene er grunnlaget for analysen av implisitt volatilitet. En slik analyse er ikke tidligere gjennomført på det nordiske markedet.

Handlede opsjoner på årskontrakter for 2004, 2005 og 2006 og kvartalskontrakter for 2005 og 2006 gir totalt 766 verdier på implisitt volatilitet. Antall handlede opsjoner per handelsdato varierer mellom 1 og 33, med et gjennomsnitt på 7,1 handler per dag. Tabell

<sup>2</sup>Over The Counter - Handler direkte mellom to aktører i markedet.

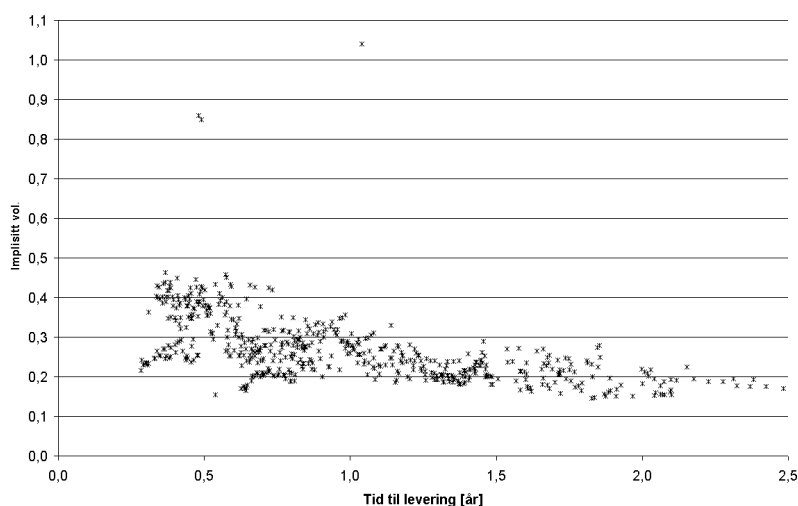
<sup>3</sup>En tredje part går inn som garantist for levering og betaling av handelen.

5.2 viser ytterligere nøkkeltall fra vårt datamateriale på implisitt volatilitet.

	Kvartal	År	Totalt
Antall	284	482	766
Gjennomsnitt	0,33	0,26	0,28
Minimum	0,15	0,15	0,15
Maksimum	0,86	1,34	1,34
10 prosentil	0,24	0,18	0,19
90 prosentil	0,42	0,36	0,40

Tabell 5.2: Deskriptive måltall for implisitt volatilitet

Ved å se på den implisitte volatiliteten i forhold til tid til levering (TTD), figur 5.6, kan en se den relativt usystematiske fordelingen av dataene. Figuren antyder at implisitt volatilitet er heteroskedastisk, der variansen til implisitt volatilitet er avtagende med økt tid til levering.



Figur 5.6: Implisitt volatilitet i forhold til TTD

Det er tre ekstremverdier som skiller seg ut i forhold til de andre verdiene. Fra en nærmere vurdering, med grunnlag i kumulativ historisk volatilitet og prisutvikling, konkluderer vi med at dette er verdier som er lite representative<sup>4</sup>. Disse tre verdiene er derfor ikke tatt med i det videre arbeidet.

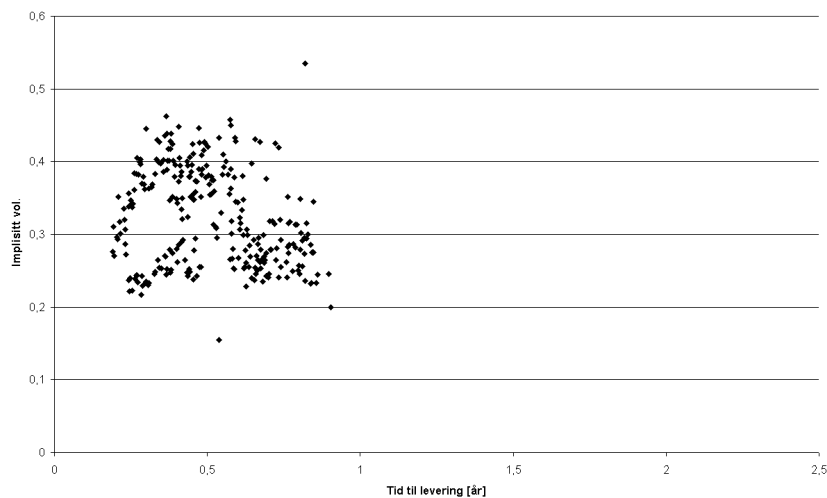
En ser av tabell 5.3 at det også er en skjev fordeling av målinger i forhold til tid til levering og kontraktstype. Det er kun opsjoner på årskontrakter som blir handlet med mer enn et år til levering, bare opsjoner på kvartalskontrakter som har kortere enn et halvt år til levering, og det handles ikke opsjoner på ukes- og månedskontrakter. For opsjoner på kontrakter med tid til levering på over to år er det bare 28 observasjoner. Den skjeve fordelingen er noe en bør ta hensyn til ved bruk av implisitt volatilitet.

<sup>4</sup>Disse verdiene er gjengitt og vurdert i tabell H.1 i Tillegg H.

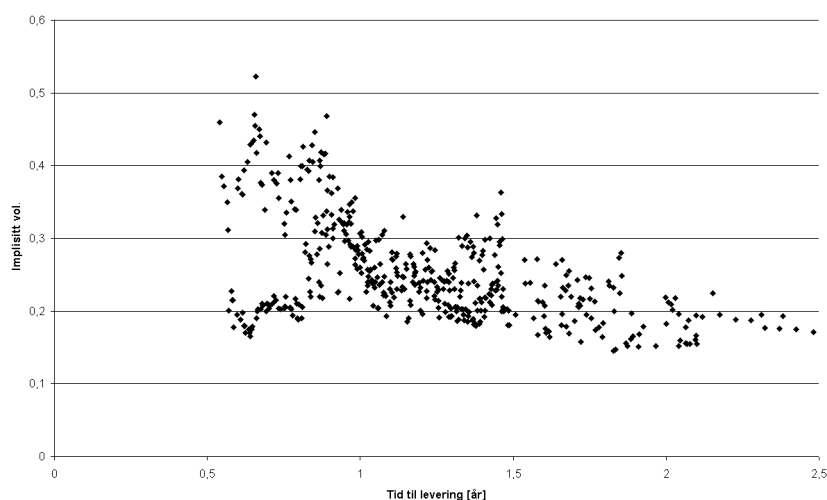
	$TTD < 0,5$	$0,5 \leq TTD < 1,0$	$1 \leq TTD < 1,5$	$1,5 \leq TTD < 2,0$	$2,0 \leq TTD$
Kvartal	148	136	0	0	0
År	0	168	216	70	28
Totalt	148	304	216	70	28

Tabell 5.3: Fordeling av verdier for implisitt volatilitet

Fordelingen av implisitt volatilitet fra henholdsvis kvartals- og årskontrakter er gjengitt i figur 5.7 og 5.8. Her er ekstremverdiene fjernet, og aksene i de to figurene har samme skalering.



Figur 5.7: Implisitt volatilitet fra kvartalskontrakter i forhold til TTD



Figur 5.8: Implisitt volatilitet fra årskontrakter i forhold til TTD

## Oppbygning av modell

På grunnlag av våre analyser finner vi en SABR-modell, implementert som en markedsmodell med tre modningsintervall, best egnet. Intervallene er valgt på grunnlag av egenskapene til kontraktstypene. Modellen tar utgangspunkt i en forward- og en volatilitetsskurve. Verdier som brukes til videre modellering er korrelasjoner mellom pris og volatilitet, korrelasjoner mellom ulike kontrakter, volatiliteten til volatilitetsmålingene og en konstant parameter,  $\beta$ .

Valg av volatilitetsfunksjon baserer seg på en totalvurdering ut fra kvadratavvik, stabilitet i parametrene og en kvalitativ vurdering. En analyse av implisitt volatilitet viser at disse inneholder svært mange usikkerhetsmomenter, og denne er derfor ikke implementert i modelleringen. Implisitt volatilitet kan imidlertid gi en pekepinn på markedets forventninger.

### 6.1 Valg av modell

Basert på tidligere publikasjoner om modellering av forwardpriser i elektrisitetsmarkedet og egne vurderinger av datamaterialet, har vi valgt å bruke forwardkurven som utgangspunkt i vår modellering. Denne inneholder i utgangspunktet all tilgjengelig relevant informasjon i markedet, og sesongsvingninger i pris blir inkludert gjennom denne. Endringer i forventninger til eller informasjon om markedet vil fortløpende resultere i priskorreksjon på forwardkontraktene og endring i forwardkurven.

Enfaktormodellen til Benth og Koekebakker [Benth05b] er oversiktlig og brukervennlig. Vi mener derimot at det er en ulempe at den ikke tar hensyn til korrelasjonen mellom endring i prisnivå og volatilitet, samt at den i utgangspunktet ikke modellerer med stokastisk volatilitet.

Schwartz og Smith [Schwartz00] presenterer en tofaktormodell som er godt egnet til råvaremarkedet. Modellen tar hensyn til korrelasjonen mellom kortsiktig og langsiktig prisutvikling og resultatene som fremkommer er enkle å tolke. Et av hovedproblemene er at man har liten eller ingen kontroll på prosessen som skjer ved bearbeiding av dataene fra input til output. Volatiliteten antas av Schwartz og Smith å bestå av to konstante variabler, en for kort- og en for lang sikt. Dette mener vi er en grov tilnærming til det komplekse volatilitetsbildet i elektrisitetsmarkedet. Ved bruk av forwardkontrakter til kalibrering av modellen må man gjøre en tilnærming ved å si at kontraktene leveres i

et spesifikt tidspunkt, og ikke jevnt over en periode. Dette gir potensielt store avvik for kontrakter med lange leveringsperioder.

SABR [Hagan02] er en enkel og oversiktlig modell for modellering av endring i pris og volatilitet til en forwardkontrakt. Modellen muliggjør enkel endring av volatilitetsfunksjon og -struktur. Denne modellen nyttiggjør seg også av stokastisk volatilitet, noe som egner seg godt ved modellering i elektrisitetsmarkedet. Man har også mulighet til å kontrollere volatilitetsstrukturen under simuleringen. SABR-modellen gir en lognormal forwardpris og tar hensyn til korrelasjonen mellom pris- og volatilitetsendringer. Dette gjør at modellen får med sesongvariasjonene til volatiliteten på en god måte.

På grunnlag av overnevnte faktorer finner vi SABR-modellen best egnet til vår modellering. Denne forklarer pris og volatilitetsutviklingen for en enkelt kontrakt. Ved å kombinere denne med en forwardkurve og en volatilitetsfunksjon får man en modell som vi mener tar hensyn til de spesielle egenskapene til elektrisitetsmarkedet. Vi velger å implementere dette i en markedsmodell der inndelingen gjøres på grunnlag av kontraktsegenskaper.

For implementering av modellen trenger man følgende:

- Forwardkurve
- Inndelingen til markedsmodellen
- Volatilitetsfunksjoner
- Volatiliteten til volatilitetsmålingene
- $\beta$ -verdi
- Korrelasjonsmatrise

## 6.2 Forwardkurven

Forwardkurven brukes i svært mange sammenhenger i forbindelse med blant annet produksjons- og forbruksplanlegging, samt risikostyring i energimarkedet. Av den grunn har de fleste aktørene enten egne programmer for utarbeidelse av forwardkurve eller så kjøper de denne tjenesten fra andre. Med bakgrunn i dette har vi valgt å ta inn en ferdig forwardkurve som input i modellen, og bruker ikke ressurser på å utarbeide en ny.

## 6.3 Inndelingen til markedsmodellen

Vi har forwardkurven som grunnlag for vår modell. Dette kombinert med de splittede egenskapene til forwardprisene, gjør at vi velger å dele modellen inn i tre deler. Inndelingen tar utgangspunkt i oppbygningen til forwardkurven. Vi deler modellen inn i 0 til 26 uker til levering, 27 til 78 uker og 79 til 156 uker. Modelleringen av de ulike modningsintervallene baserer seg på henholdsvis ukes- og månedskontrakter, kvartalskontrakter og årskontrakter. Det er korte handelsperioder på ukeskontraktene. Dette medfører at man får et begrenset antall volatilitetsmålinger og dermed et relativt dårlig grunnlag for estimering av parametere i volatilitetsfunksjonene. Vi velger derfor å slå sammen ukes- og

månedskontrakter til en gruppe. Periodeinndelingen som brukes i markedsmodellen, tid til levering (TTD) og hvilke kontraktstyper som danner grunnlaget for modelleringen i hvert modningsintervall er oppsummert i tabell 6.1.

	Tid til levering	Kontrakter
TTD1	0 - 26 uker	Uke og måned
TTD2	27 - 78 uker	Kvartal
TTD3	79 - 156 uker	År

Tabell 6.1: Inndelingen til markedsmodellen

## 6.4 Volatilitet

Basert på teoretiske utledninger og vurderinger av egenskapene til elektrisitetsmarkedet velger vi tre volatilitetsfunksjoner for videre analyse. Volatilitetsfunksjonen som brukes i modelleringen er valgt på bakgrunn av kvadratavvik mellom funksjon og historisk volatilitet, samt stabilitet i parametrene.

### 6.4.1 Volatilitetsfunksjoner

Det er foreslått mange ulike volatilitetsfunksjoner til bruk i modellering av elektrisitetsmarkedet. De tre funksjonene vi ser på søker å gjengi egenskapene til elektrisitetsmarkedet og baserer seg på teoretiske utledninger. Vi velger å la en kvalitativ vurdering av markedet ligge til grunn ved valg av funksjoner.

Det finnes per i dag ingen fullstendig teoretisk utledning av hvilken volatilitetsfunksjon som fungerer best i elektrisitetsmarkedet. Volatiliteten til kontraktsprisene varierer mye, noe som bidrar til å vanskeliggjøre valg av funksjon. Man kan derimot si noe om hvilke egenskaper en god volatilitetsfunksjon bør ha.

Volatiliteten er en funksjon av differansen mellom leveringstidspunkt,  $u$ , og beregningstidspunkt,  $t$ . Tid til levering,  $u - t$ , bør derfor være argumentet i volatilitetsfunksjonen.

Forwarkontrakter leveres ikke i et gitt tidspunkt, men over en periode. Dette må man ta hensyn til ved optimalisering av parameterverdier. Når man beregner volatiliteten til en kontrakt, må man altså integrere volatiliteten over leveringsperioden.

Man må også ta hensyn til Samuelson effekten, noe som kan oppnås ved hjelp av et eksponentialledd med negativ eksponent med hensyn på tid til levering. Samuelson effekten kan justeres ved hjelp av en konstant,  $k$ , i eksponenten. Eksponentialleddet kan også vektet med et ledd,  $g(u - t)$ , som enten er konstant eller avhengig av tid til levering. En volatilitetsfunksjon bør altså inneholde uttrykket  $g(u - t)e^{-k(u-t)}$ . Et slikt eksponentialledd, med positiv  $k$ -verdi, vil gå mot null når tiden øker. Volatiliteten til kontrakter med lang tid til levering vil erfaringsmessig gå mot en grenseverdi, ikke null, og man bør derfor legge til et ledd for å ta høyde for dette. Dette leddet kan enten være konstant,  $m$ , eller avhengig av tid til levering, for eksempel lineært,  $(u - t)m + n$ , der  $n$  også er en konstant.

Vi har tre volatilitetsfunksjoner som vi ønsker å analysere nærmere. To av disse funksjonene,  $Vol1$  og  $Vol2$ , er foreslått av Benth og Koekebakker [Benth05b] mens den

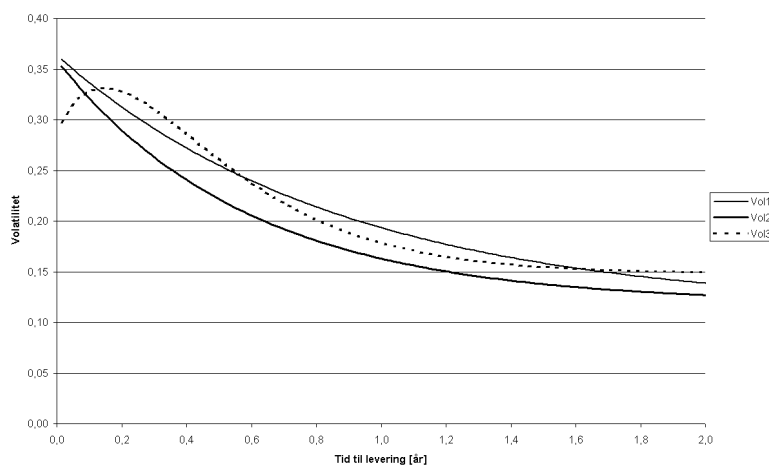
tredje, *Vol3*, er basert på arbeidet til Rebonato [Rebonato99].

$$Vol1 : \sigma = a_1[(1 - c_1)e^{-b_1(u-t)} + c_1] \quad (6.1)$$

$$Vol2 : \sigma = a_2e^{-b_2(u-t)} + (u - t)c_2 + d_2 \quad (6.2)$$

$$Vol3 : \sigma = [a_3 + b_3(u - t)]e^{-c_3(u-t)} + d_3 \quad (6.3)$$

I alle de tre funksjonene er  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  og  $d_i$  konstanter og  $u - t$  er tid til levering. Eksempler på de ulike funksjonene er skissert i figur 6.1. *Vol3* skiller seg fra de andre funksjonene ved at den stiger noe før den avtar med økende tid til levering. Bakgrunnen for dette er at man har større kjennskap til de aller nærmeste dagene, og enkelte mener derfor at volatiliteten vil være noe lavere like før levering.



Figur 6.1: Formene til de ulike volatilitetsfunksjonene

### 6.4.2 Valg av volatilitetsfunksjoner

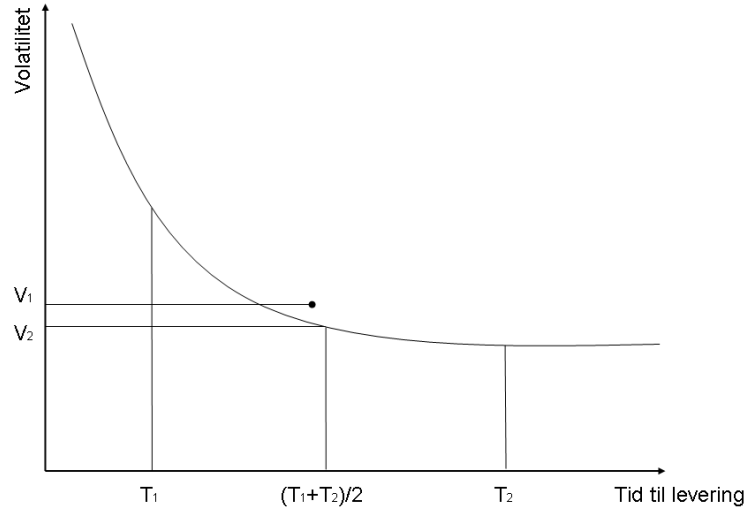
For å finne ut hvilken av de tre funksjonene som er å foretrekke sammenligner vi hver enkelt funksjon med historisk volatilitet. Dette gjøres fordi vi mener den funksjonen som best kan beskrive historiske bevegelser også vil være best egnet til å modellere fremtidig utvikling. Denne begrunnelsen bygger i hovedsak på at vi ikke har indikasjoner på at det skal skje store omveltninger i nær fremtid. Dersom man har forventninger om at det skal skje endringer i markedet, for eksempel lange perioder med lite nedbør, bør en ta hensyn til dette ved å justere volatilitetskurven.

Det er til dels store mengder prisdata tilgjengelig, og strukturen på disse er lite homogen. Den historiske volatiliteten til de fleste kontraktene blir beregnet ut fra 60 dagers moving window, med data 30 dager før og 30 dager etter beregningstidspunktet. Korte handelsperioder på ukeskontrakter gjør at disse har et noe kortere vindu.

Vurderingen av funksjonene gjøres ved hjelp av minste kvadraters metode. For å kunne bruke volatilitetsfunksjonene på forwardkontraktene, må funksjonene bearbeides. Volatilitetsfunksjonene gir en verdi på volatiliteten til en teoretisk kontrakt med en gitt tid til levering. Forwardkontraktene leveres derimot over en periode og ikke i et spesifikt tidspunkt. Ettersom funksjonene ikke nødvendigvis har en jevn krumming, vil volatiliteten



til et aritmetisk gjennomsnitt av tid til levering være en grov tilnærming. Ved å integrere volatilitetsfunksjonene over leveringsperiodene og dele på leveringstid, ligning 6.4, 6.5 og 6.6, oppnår man et bedre mål på volatiliteten til kontrakten. Figur 6.2 viser at en kan få feil volatilitet,  $V_2$ , ved bruk av aritmetisk gjennomsnitt sammenlignet med det reelle gjennomsnittet,  $V_1$ .



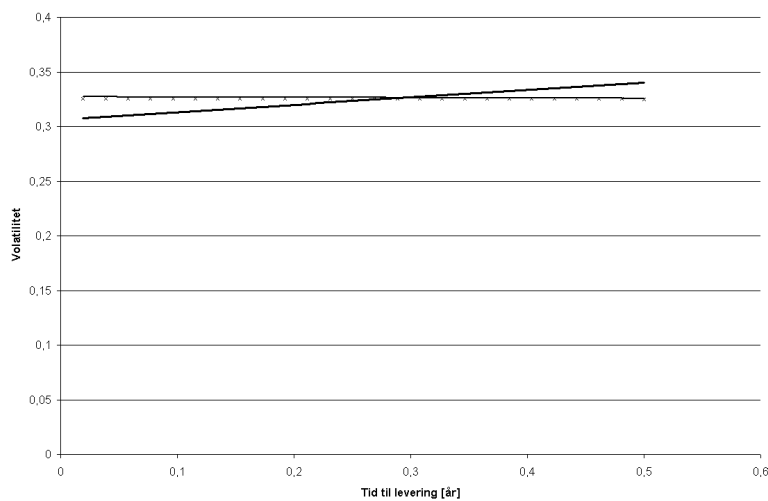
Figur 6.2: Reelt,  $V_1$ , og aritmetisk,  $V_2$ , gjennomsnitt

$$\begin{aligned}
 \sigma_{kontrakt-Vol1} &= \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} Vol1 \, du \\
 &= \frac{1}{T_2 - T_1} \frac{1}{b_1} a_1 e^{-b_1(T_1+T_2)} \left[ (e^{b_1 T_1} - e^{b_1 T_2})(c_1 - 1)e^{b_1 t} \right. \\
 &\quad \left. - b_1 e^{b_1(T_1+T_2)} c_1 (T_1 - T_2) \right] \tag{6.4}
 \end{aligned}$$

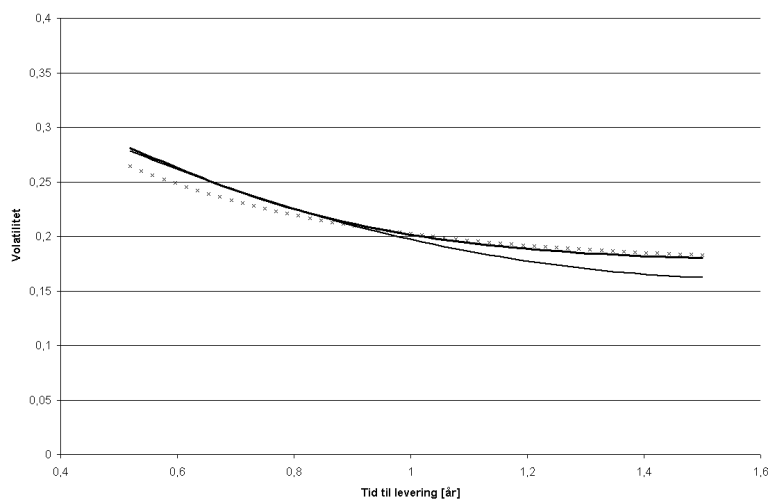
$$\begin{aligned}
 \sigma_{kontrakt-Vol2} &= \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} Vol2 \, du \\
 &= \frac{1}{T_2 - T_1} \left[ \frac{a_2}{b_2} (e^{-b_2 T_1} - e^{-b_2 T_2}) e^{b_2 t} + c_2 (T_1 - T_2) t \right. \\
 &\quad \left. - \frac{c_2}{2} (T_1^2 - T_2^2) - d_2 (T_1 - T_2) \right] \tag{6.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{kontrakt-Vol3} &= \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} Vol3 \, du \\
 &= \frac{1}{T_2 - T_1} \frac{1}{c_3} \left[ \left( -\frac{b_3}{c_3} - a_3 - b_3 (T_2 - t) \right) e^{-c_3 (T_2 - t)} \right. \\
 &\quad \left. - \left( -\frac{b_3}{c_3} - a_3 - b_3 (T_1 - t) \right) e^{-c_3 (T_1 - t)} \right] + d_3 \tag{6.6}
 \end{aligned}$$

Parametrene i hver volatilitetsfunksjon,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  og  $d_i$ , blir optimalisert for å gi minst mulig kvadratavvik,  $\min \sum_j (\sigma_{kontrakt_j} - \sigma_{historisk_j})^2$ . Ettersom vi baserer oss på tre ulike modningsintervall, TTD1, TTD2 og TTD3, må vi optimalisere og vurdere funksjonene for hver av disse separat. Den funksjonen som har minst kvadratavvik vil i utgangspunktet være den som er best egnet til fremtidig modellering. Figur 6.3, 6.4 og 6.5 viser de optimaliserte funksjonene for henholdsvis TTD1, TTD2 og TTD3. For å visualisere sammenhengen mellom disse har vi plottet grafene med lik vertikal akse og delvis overlappende horisontal akse. Volatilitetsfunksjonen Vol3 er i periode TTD1 økende med tid til levering. Dette kommer av den tidligere nevnte egenskapen til denne funksjonen, som forklart og begrunnet i kapittel 6.4.2.

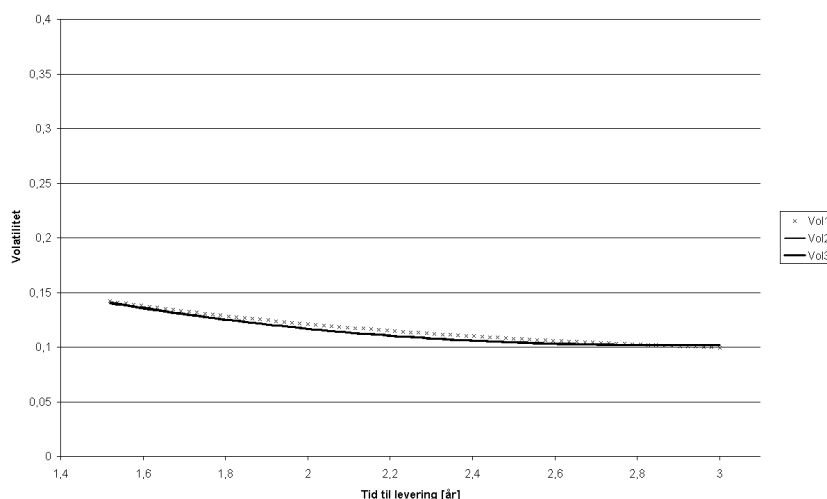


Figur 6.3: Optimaliserte volatilitetsfunksjoner for TTD1



Figur 6.4: Optimaliserte volatilitetsfunksjoner for TTD2

Summert kvadratavvik til de optimaliserte volatilitetsfunksjonene er vist i tabell 6.2. Tabellen viser de minste kvadratavvikene uthevet. Det er imidlertid verdt å merke seg at



Figur 6.5: Optimaliserte volatilitetsfunksjoner for TTD3

det er liten forskjell i kvadratavvikene fra de ulike funksjonene. Hovedårsaken til dette er at funksjonene er laget ut i fra de samme forutsetningene. Vol2-funksjonen er den med minst kvadratavvik i TTD2 og TTD3, mens Vol3 er best i TTD1.

Kvadratavvik	TTD1	TTD2	TTD3
Vol1	16,69	13,66	2,15
Vol2	16,69	<b>11,46</b>	<b>2,11</b>
Vol3	<b>16,63</b>	13,32	2,12

Tabell 6.2: Summert kvadratavvik til volatilitetsfunksjonene

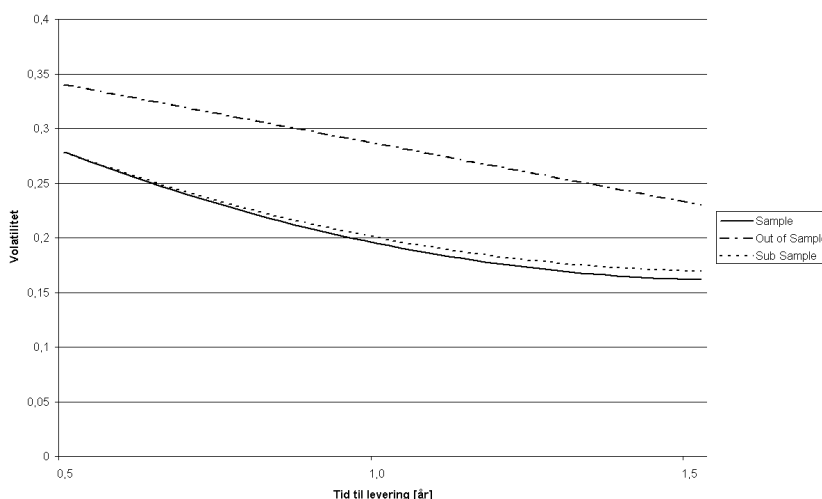
### 6.4.3 Stabilitet i parametrene

I tillegg til kvadratavvik er det også viktig å undersøke stabiliteten til parametrene i de ulike volatilitetsfunksjonene. Vi gjennomfører derfor en analyse for å se hvordan endring i datagrunnlaget påvirker parameterverdiene. For å teste stabiliteten i parametrene velger vi å både gjennomføre en kvalitativ analyse, en out-of-sample analyse og en sub-sample analyse.

Det er lite hensiktsmessig å kun se på kvantitative endringer i parametrene som et mål på stabilitet. Store endringer i en parameterverdi trenger ikke medføre at funksjonsverdien endrer seg nevneverdig. For å vurdere stabiliteten til funksjonene visualiserer vi derfor funksjonene med de optimaliserte parametrene fra de ulike analysene. Figur 6.6 viser en slik skisse for Vol2-funksjonen i perioden TTD2. Tilsvarende skisser for alle kombinasjoner av funksjon og tidsperiode finnes i Tillegg G. Vi ønsker å se i hvor stor grad funksjonen varierer når parametrene er optimalisert fra de ulike datamengdene. Desto mer sammenfallende grafene er, desto mer stabil er funksjonen.

I tillegg til skissene vurderer vi kvadratavviket fra sub-sample- og out-of-sample analysene<sup>1</sup>. Dataene i sub-sample analysen er fra de nyeste kontraktene, det vil si kontrakter

<sup>1</sup>Tabeller med disse verdiene ligger i Tillegg G.



Figur 6.6: Optimalisert Vol2-funksjon for TTD2

med levering i deler av 2005 og 2006. Out-of-sample-analysen baserer seg på kontrakter med levering i deler av 2003 og 2004.

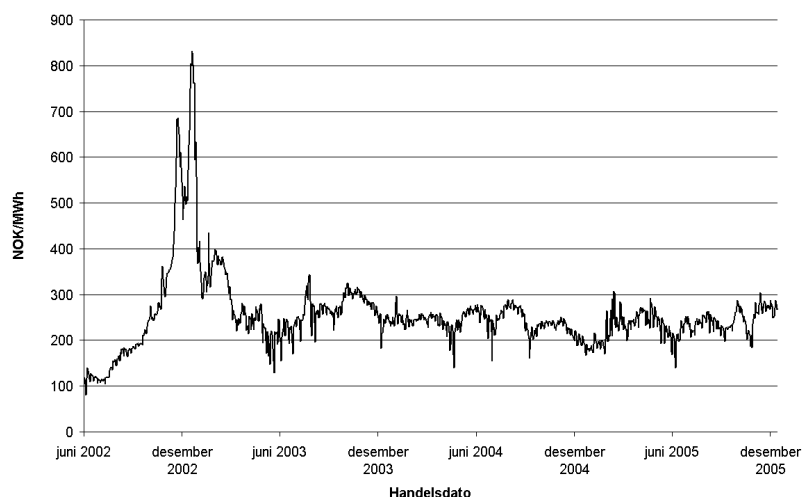
Resultatene fra overnevnte vurderingskriterier er oppsummert i tabell 6.3. Denne tabellen viser hvilken funksjon som har minst kvadratavvik og mest stabile grafer i hvert modningsintervall fra de ulike analysene. Ut i fra en totalvurdering finner vi for hvert intervall den volatilitetsfunksjonen som vi mener er best egnet for bruk i videre modellering. Disse er vist i kolonnen Totalvurdering. Vol2 er den beste funksjonen i alle intervallene, men det er verdt å merke seg at den har ulike parametere for hvert modningsintervall.

	Sample	Sub-sample	Out-of-sample	Grafer	Totalt
TTD1	Vol3	Vol2	Vol2	Vol2	<b>Vol2</b>
TTD2	Vol2	Vol2	Vol3	Vol2	<b>Vol2</b>
TTD3	Vol2	Vol2	Vol2	Vol2	<b>Vol2</b>

Tabell 6.3: Oppsummering av de beste volatilitetsfunksjonene

I out-of-sample analysen for TTD1 får vi et kvadratavvik som er ca. 20 ganger høyere enn i de andre analysene. Dette skyldes i hovedsak store prissvingninger i spotprisen i tidsperioden dataene er hentet fra. Figur 6.7 viser spotprisutviklingen fra juni 2002 til januar 2006. Fra juni 2002 til januar 2003 ser vi at spotprisen stiger med 800 %. Slike ekstremperioder påvirker i høy grad ukes- og månedskontrakter med kort tid til levering, mens de lange kontraktene påvirkes i mindre grad. Basert på dette har vi i TTD1 lagt mindre vekt på resultatene fra out-of-sample analysen, i forhold til de andre analysene, fordi vi ikke tror slike sprang er representative for prisutviklingen. Dette gjør seg spesielt gjeldende i vurderingen av funksjonsgrafene der grafen for out-of-sample til tider er svært avvikende<sup>2</sup>. Analysene viser at det er svært viktig å være observant på prissprang da dette kan medføre at man bør justere volatilitetskurven for modellering av kontrakter med kort tid til levering.

<sup>2</sup>Disse grafene er å finne på figur G.1, G.2 og G.3 i Tillegg G.



Figur 6.7: Spotpris fra juni 2002 til januar 2006

## 6.5 Volatiliteten til volatiliteten

SABR-modellen tar inn volatiliteten til volatiliteten som en konstant parameter. Denne parameteren er funnet ved å beregne volatiliteten til historisk volatilitet i de ulike modningsintervallene. Volatilitetsverdiene er gjengitt i tabell 6.4. Modellen kan enkelt utvides til å ta med volatiliteten til volatiliteten som en tidsvarierende og sesongavhengig parameter, men vi finner ikke dette hensiktsmessig.

Volatilitet til volatiliteten	
TTD1	0,38
TTD2	0,49
TTD3	0,46

Tabell 6.4: Volatilitet til historisk volatilitet

## 6.6 $\beta$ -verdier

I SABR modellen blir endring i forwardpris gitt som  $dF = \alpha F^\beta dW_1$ . Valg av  $\beta$ -verdi er avgjørende for resultatet av modelleringen.  $\beta$ -verdien er imidlertid vanskelig å fastsette ved hjelp av optimalisering ut i fra data. Det er også svært krevende å estimere denne parameteren.

Dersom en benytter  $\beta = 1,0$  er endringen i forwardprisen gitt av  $dF = \alpha F dW_1$ . Dette representerer en stokastisk lognormal modell.  $\beta = 0$  gir  $dF = \alpha dW_1$ , som er en stokastisk normalfordelt modell. Øker denne  $\beta$ -verdien til 0,5 får man en stokastisk CIR-modell,  $dF = \alpha \sqrt{F} dW_1$ .

Under beskrivelsen av egenskapene til volatiliteten i elektrisitetsmarkedet argumenterer vi for at prisendringen,  $dF$ , i forwardkontrakter er avhengig av nivået til forwardprisen. Dersom en modellerer med  $\beta = 0$  vil derimot ikke endring i forwardkurve være avhengig av prisnivået på forwardkontraktene. Med  $\beta = 0,5$  vil prisendringen være avhengig av

kvadratroten av prisen, mens med  $\beta = 1,0$  vil prisendringen være lineært avhengig av prisnivået. Vi mener strukturen til prisendringene på forwardkontraktene er en viktig faktor ved valg av  $\beta$ -verdi. Dette er et argument for å modellere med  $\beta = 1,0$ .

Vi antar at forwardprisene er tilnærmet lognormalfordelt. Denne antagelsen er, som tidligere nevnt, basert på arbeidet til Bunn og Karakatsani [Bunn03] og Audet, Heiskanen, Keppo og Vehvilinen [Audet04]. Dette er også et argument for å modellere med  $\beta = 1,0$ .

Vi velger altså en lognormal modell, med  $\beta = 1,0$ , og får følgende funksjoner:

$$dF = \alpha F dW_1 \quad (6.7)$$

$$d\alpha = v\alpha dW_2 \quad (6.8)$$

der  $dW_1$  og  $dW_2$  er korrelerte. Dersom  $\alpha$  er konstant, vil  $dF$  i hvert simuleringspunkt være normalfordelt  $N(0, \sqrt{dt}F\alpha)$ , der variansen varierer med  $F$ .  $F$  er da lognormalfordelt. Når  $\alpha$  er stokastisk og  $dW_1$  og  $dW_2$  er korrelert, vil  $dF$  fremdeles være normalfordelt, men variansen vil variere med både  $F$  og  $\alpha$ . I følge West [West05] og Hagan m.fl [Hagan02] vil da  $F$  fremdeles være lognormalfordelt.

## 6.7 Korrelasjon

Ettersom vi modellerer de tre modningsintervallene hver for seg, er det viktig å ta hensyn til korrelasjonen mellom kontraktstypene. Dette oppnås ved å bruke korrelerte stokastiske ledd i markedsmodellen. I følge SABR er også volatilitets- og prisendringer korrelert. Dette tas høyde for gjennom korrelasjonsberegninger for de enkelte kontraktstypene.

Datagrunnlaget vi baserer oss på består totalt av 34 kontrakter. Den totale korrelasjonsmatrisen mellom alle priser og volatilitetsverdier blir da en 68x68 matrise. En matrise av en slik størrelsesorden er lite hensiktsmessig å bruke i modelleringen, og vi grupperer derfor kontraktene i henhold til de tre modningsintervallene.

### 6.7.1 Korrelasjon mellom kontraktstypene

For å kartlegge korrelasjonen mellom de ulike kontraktstypene setter vi opp en korrelasjonsmatrise med alle kontraktene i vårt datamateriale. Siden det er korrelasjonen mellom de ulike kontraktstypene og ikke enkeltkontrakter som er av interesse, grupperes disse. Gjennomsnittlig korrelasjon mellom kontraktstypene finnes da ved å konvertere hver enkelt korrelasjonskoeffisient til Fisher Z-verdier, i henhold til formel E.4 i Tillegg E for å gjøre dem additive, før man tar det aritmetiske gjennomsnittet av disse. Ved å konvertere gjennomsnittsverdiene tilbake til korrelasjonskoeffisienter, får man et mål på den gjennomsnittlige korrelasjonen mellom kontraktgruppene. Basert på at de ulike kontraktene har til dels svært overlappende handels- og leveringsperioder, forventer vi at de vil ha en positiv og høy korrelasjon. Negativ korrelasjon mellom for eksempel kvartals- og årskontrakter, vil kunne gi arbitrasjemuligheter. Dersom en årskontrakt går opp og tilhørende kvartalskontrakter ned, vil en kunne selge årskontrakter og ta motsatt posisjon i kvartalskontrakter og dermed oppnå en risikofri profitt.

Basert på vårt datagrunnlag fra de handlede kontraktene har vi kommet frem til korrelasjonsmatrisen i tabell 6.5. Konfidensintervallet til de ulike korrelasjonene blir da som i tabell 6.6. Tabell 6.6 viser også at alle korrelasjonene er statistisk signifikant ulik null, og i henhold til våre forventninger.

$\rho$	Uke/Mnd	Kvartal	År
Uke/Mnd	1,00	0,74	0,79
Kvartal	0,74	1,00	0,93
År	0,79	0,93	1,00

Tabell 6.5: Gjennomsnittlig korrelasjon for periodene

Kontraktstype	$\rho$	$\rho_{lav}$	$\rho_{høy}$
Uke/Mnd - Kvartal	0,740	0,734	0,746
Uke/Mnd - År	0,795	0,787	0,802
Kvartal - År	0,931	0,931	0,931

Tabell 6.6: 95 % konfidensintervall for korrelasjonskoeffisientene

### 6.7.2 Korrelasjon mellom forwardpris og volatilitet

SABR modellen modellerer med korrelasjon mellom pris og volatilitet. Ettersom vi benytter oss av en markedsmodell må vi også beregne denne korrelasjonen for hvert enkelt modningsintervall. Ut i fra argumentet om høyere volatilitet ved unormalt høyt prisnivå forventer vi også at korrelasjonen mellom forwardpris og volatilitet er positiv og signifikant ulik null.

Tabell 6.7 viser gjennomsnitt og 95 % konfidensintervall for korrelasjonen mellom pris og volatilitet. Det går frem av tabellen at det er svært varierende verdier for de ulike kontraktstypene.

	$\rho$	$\rho_{lav}$	$\rho_{høy}$
TTD1	-0,25	-0,30	-0,21
TTD2	0,20	0,17	0,23
TTD3	0,60	0,56	0,63

Tabell 6.7: Korrelasjon mellom pris og volatilitet

Verdiene for TTD1 bryter med våre forventninger om at det er en positiv korrelasjon mellom pris og volatilitet på forwardkontrakter. Vi velger derfor å analysere verdiene grundigere. Tabell 6.8 viser minimum, maksimum, 10 og 90 prosentiler til korrelasjonene mellom pris og volatilitet.

En ser fra tabellen at verdiene for TTD1 er svært sprikende, med verdier fra -0,93 til 0,94. Selv med 10 og 90 prosentiler varierer verdiene mellom -0,89 og 0,75. Ut i fra at korrelasjonen mellom pris og volatilitet er så varierende, konkluderer vi med at det er lite hensiktsmessig å modellere med en konstant korrelasjon, og velger derfor å modellere med  $\rho = 0$  for TTD1.

Verdiene for TTD2 varierer også mye, men hovedvekten av verdiene er positive og vi mener derfor det vil være mest riktig å modellere med  $\rho = 0,20$ .

TTD3 har entydige verdier og analysene underbygger at man bør modellere med  $\rho = 0,60$ .

	Min	Maks	10 prosentil	90 prosentil
TTD1	-0,93	0,94	-0,89	0,75
TTD2	-0,47	0,66	-0,18	0,63
TTD3	0,56	0,63	0,57	0,62

Tabell 6.8: Statistiske måltall for korrelasjon mellom pris og volatilitet

## 6.8 Implisitt volatilitet

Den implisitte volatiliteten bestemmes ut i fra at man antar at man vet hvilke parametere som er lagt til grunn ved bestemmelse av opsjonspris. Innløsningsstidspunkt, innløsningspris, rente og pris på underliggende er parametere som i utgangspunktet er kjente og eksplisitte. Aktørene kan imidlertid justere prisen på grunnlag av risikoaversjon, ny informasjon i markedet eller egne preferanser.

Det er liten handel på opsjoner i det nordiske kraftmarkedet. Enkelte dager er det kun en handlet opsjon og i gjennomsnitt handles det 7,1 opsjoner per dag. Dette kommer blant annet av at det er få aktører som er villige til å selge opsjoner. Bakgrunnen for denne aversjonen er de potensielt store tapene en selger vil få ved store prisendringer. Erfaringsmessig vil det skje prissprang med ujevne mellomrom, som følge av for eksempel kraftkriser. Fra 5. til 6. februar 2003 steg spotprisen fra 340 til 434 NOK/MWh, mens den dagen etter sank til 370 NOK/MWh. Det er prissprang av denne typen selgere av opsjoner frykter og priser inn i opsjonen. Dette tillegget i opsjonsprisene kan resultere i at implisitt volatilitet blir noe høyere enn historisk volatilitet.

Elektrisitetsprisene har en kompleks volatilitetsstruktur, og en burde derfor ideelt sett tatt hensyn til både stokastisk volatilitet, prissprang, mean reversion og fete haler i avkastningsfordelingen. Ved å ta med alle disse faktorene i opsjonsprisingen vil man få en svært kompleks modell. Mange velger derfor å benytte seg av en enklere modell og heller justere inputparametrene eller opsjonsprisen i etterkant. Den implisitte volatiliteten vil derfor kunne inneholde en del informasjon som ikke nødvendigvis kommer fra volatilitetsparameteren.

Svært få meglere bruker Black & Scholes eller Black76 direkte ved prising av elektrisitetsopsjoner. Det kan derfor være gunstig å få implisitt volatilitet direkte fra megler i stedet for å beregne denne selv ut i fra opsjonsprisene. Ved å innhente volatilitetsdata fra flere meglere vil en få et mer korrekt bilde av den implisitte volatiliteten. Det er viktig at implisitt volatilitet blir beregnet fra nøyaktig samme tidspunkt som opsjonsprisingen blir gjennomført. Om dette ikke er tilfelle vil for eksempel pris på underliggende kunne ha endret seg, noe som vil påvirke utregningene av implisitt volatilitet.

Overnevnte faktorer vil kunne påvirke den implisitte volatiliteten, og denne trenger altså ikke å være lik den volatiliteten som ble benyttet ved prisingen av opsjonen. På grunnlag av dette er det svært viktig å være kritisk til denne typen data. Etersom det kun handles opsjoner på kvartal- og årskontrakter, bør man være spesielt forsiktig med å bruke implisitt volatilitet til modellering av ukes- og månedskontrakter.

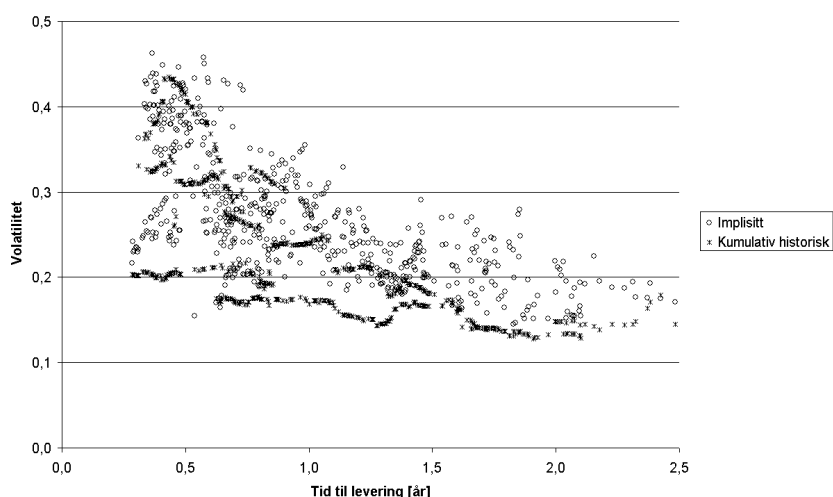
Til tross for at det er stor usikkerhet rundt implisitt volatilitet, er det samtidig en av få kilder til informasjon om hvilke forventninger aktørene i markedet har til fremtiden. Dette gjør at implisitt volatilitet har potensial til å være en viktig del av modelleringen av fremtidige elektrisitetspriser.



### 6.8.1 Sammenligning av historisk- og implisitt volatilitet

For å kunne sammenligne historisk og implisitt volatilitet, må man beregne kumulativ historisk volatilitet, det vil si gjennomsnittlig historisk volatilitet over handelsperioden.

Ved å plote kumulativ historisk volatilitet i samme diagram som implisitt volatilitet får man et inntrykk av sammenhengen mellom disse, se figur 6.8. Til tross for at verdiene ikke er direkte overlappende, kan en se at verdiene har samme mønster og ligger innenfor samme område. Det er også verdt å merke seg at kumulativ historisk volatilitet er en gjennomsnittsverdi, og dermed også vil være jevnere fordelt enn implisitt volatilitet, som er en punktmåling. Spredningen av implisitt volatilitet skyldes ikke at det er flere kontrakter i samme diagram, men at volatiliteten varierer svært mye fra dag til dag. Dette kan også skyldes at ulike målinger kommer fra forskjellige meglere som blant annet kan ha ulike vurderinger av risikoen i markedet.



Figur 6.8: Kumulativ historisk- og implisitt volatilitet

Nivået til den implisitte volatiliteten er høyere enn kumulativ historisk volatilitet i 80,4 % av målingene. Implisitt volatilitet er i gjennomsnitt 4,3 prosentpoeng høyere enn kumulativ historisk volatilitet, og differansen varierer mellom -13 og +22 prosentpoeng. Årsaken til dette kan være ulike vurderinger av markedet fra megler i forhold til den som har beregnet den implisitte volatiliteten fra de handlede opsjonene. Bruk av andre opsjonsprisindeametoder enn Black-76 og prisjustering grunnet egne vurderinger er faktorer som vil påvirke opsjonsprisene, og dermed også implisitt volatilitet.

### 6.8.2 Bruk av implisitt volatilitet

På grunnlag av alle usikkerhetsmomentene ved bruk av implisitt volatilitet, mener vi at det til modellering av spot og forwardpriser vil være mer gunstig å bruke volatilitetsfunksjoner kalibrert på historiske data enn å benytte seg av implisitt volatilitet. Den implisitte volatiliteten påvirkes av faktorer som er vanskelige å kartlegge. Bruk av implisitt volatilitet i modellering kan derfor medføre at en får med faktorer man ikke har oversikt over. Vi har derfor valgt å ikke bruke implisitt volatilitet i vår modell. En bør

imidlertid følge med på utviklingen til den implisitte volatiliteten, da store endringer i denne kan signalisere endringer i markedet.

Risikoaverse aktører velger ofte den høyeste volatilitetsmålingen, som i de fleste tilfeller vil være implisitt volatilitet. Vi mener at det er bedre å basere seg på historisk volatilitet, og heller justere denne ut i fra egne preferanser.

Det er imidlertid viktig å merke seg at ved prising av opsjoner er bruk av implisitt volatilitet svært relevant. Dette gjelder også for porteføljer og derivater som er nært knyttet til opsjoner.

## Resultater

Det er modelleringsmetodikken som er hovedfokus for denne oppgaven. Vi har imidlertid kjørt en modellering med 5000 simuleringer for å vise hvilke egenskaper og bruksområder modelleringsmetodikken har. Siden modelleringen er forventningsrett vil utfallsrommet være symmetrisk om henholdsvis dagens volatilitets- og forwardkurve. Man vil altså ikke kunne si noe om verdiene vil øke eller synke, men man får informasjon om usikkerheten til den fremtidige verdien.

### 7.1 Volatilitetskurven

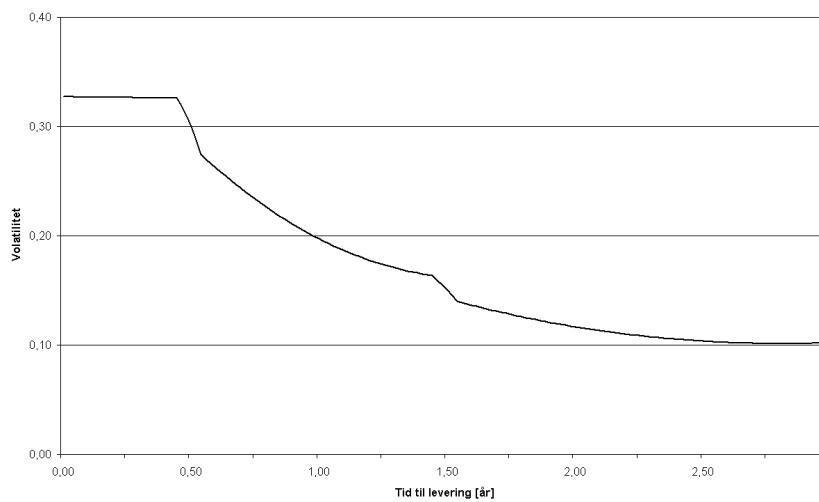
Etter at parametrene er optimalisert for hvert modningsintervall, finner vi en volatilitetsfunksjon for hver av disse. Vi lager videre en volatilitetskurve der hver funksjon beskriver volatiliteten i sitt respektive modningsintervall. Disse volatilitetsfunksjonene er som følger:

$$\sigma = \begin{cases} 0,53e^{0,01(TTD)} - 0,01(TTD) - 0,20 & 0,0 < TTD \leq 0,5 \\ 12,02e^{-0,14(TTD)} + 1,33(TTD) - 11,60 & 0,5 < TTD \leq 1,5 \\ 3,25e^{-0,14(TTD)} + 0,31(TTD) - 2,94 & 1,5 < TTD \leq 3,0 \end{cases}$$

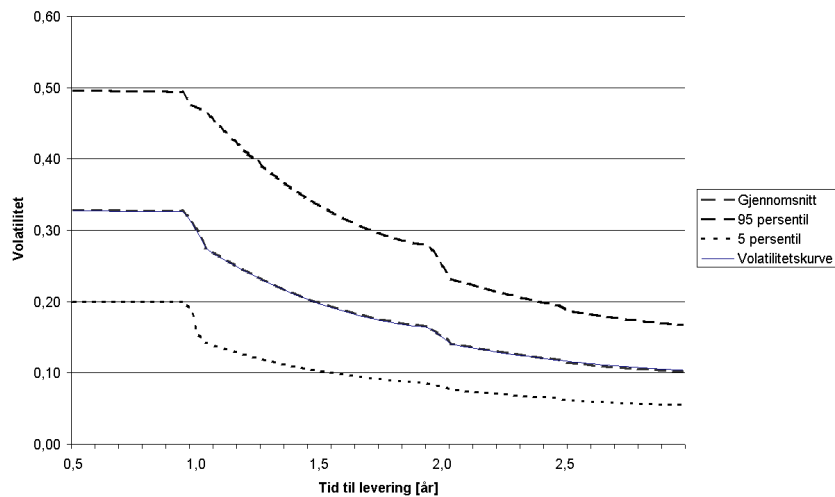
Vi får, slik figur 7.1 viser, nivåendring i intervallovergangene. Disse kan enkelt gjøres mindre markante ved å glatte volatilitetsfunksjonene i periodeovergangene. Vi mener imidlertid at valgte metode er en bedre tilnærming ettersom det er en fordel å holde periodene atskilt i en markedsmodell. Figuren viser også at selv om volatilitetsfunksjonene kombineres, beholdes de særegne egenskapene til volatiliteten i energimarkedet.

Ettersom vi bruker en stokastisk  $\alpha\beta\rho$ -modell, modellerer vi med stokastisk volatilitet. Volatilitetskurven vil derfor endre seg gjennom modelleringen. Figur 7.2 viser prosentiler og gjennomsnitt for volatilitetskurven et halvt år frem i tid. Det store utfallsrommet kommer av at volatiliteten til volatiliteten er betydelig, og dette er viktig å ta hensyn til ved for eksempel prising av derivater.

Hver simulering av volatiliteten følger funksjonen  $d\alpha = \alpha v dW_2$ . Siden  $v$  er konstant og  $dW_2$  er normalfordelt vil  $\alpha$  bli lognormalfordelt. For å visualisere fordelingen til volatilitetsverdiene har vi plottet denne med tid til levering lik 1,5 år. Figur 7.3 viser fordelingen etter 26 simuleringsteg. Figuren antyder at estimerte volatilitetsverdier med samme tid til levering er lognormalfordelt.

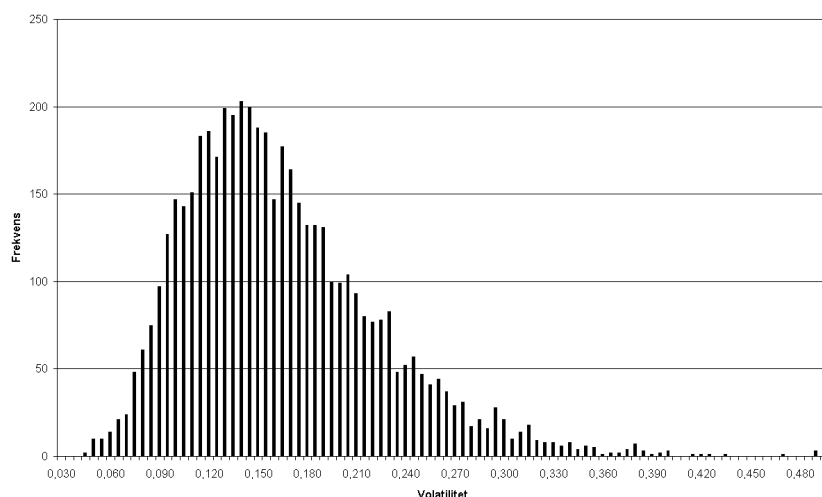


Figur 7.1: Volatilitetskurve til bruk i modelleringen



Figur 7.2: Simulerte volatilitetskurver fra 5000 simuleringer

Dersom  $\alpha$  er lognormalfordelt vil  $\ln(\alpha)$  være normalfordelt. Ved å skissere  $\ln(\alpha)$  og en normalfordelingskurve med samme forventningsverdi og standardavvik i samme diagram, får vi, som figur 7.4 viser, bekreftet av  $\alpha$  er tilnærmet lognormalfordelt.



Figur 7.3: Fordelingen til volatiliteten om 1,5 år etter 26 simuleringssteg



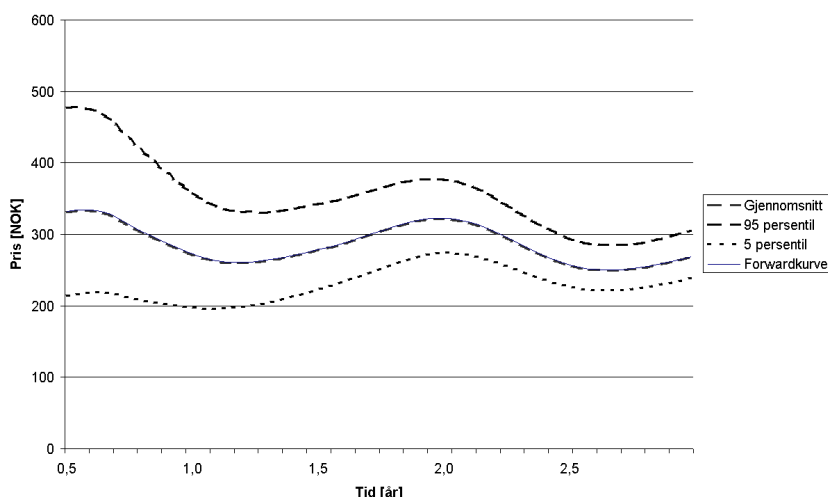
Figur 7.4: Fordelingen til  $\ln(\alpha)$  og en normalfordelingskurve

## 7.2 Forwardkurven

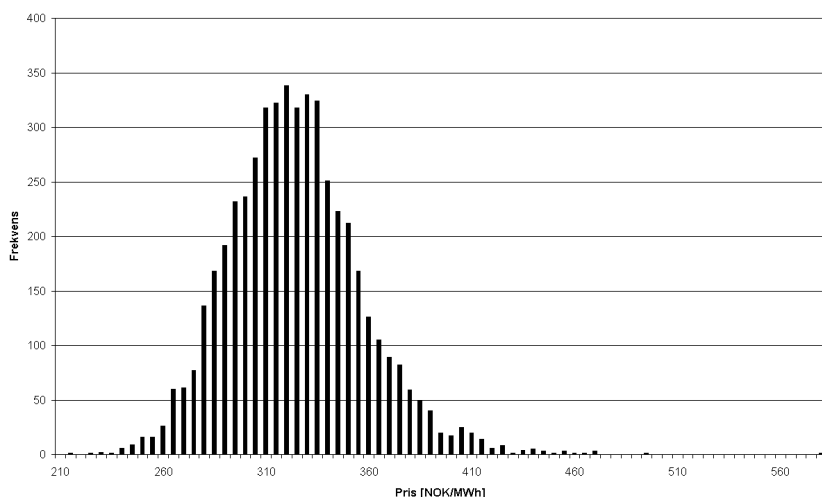
Modellen modellerer også endringen i forwardkurven over tid. Dette kan brukes til å estimere mulige forwardkurveutviklinger og videre til å beregne mulige priser på forwardkontraktene. Figur 7.5 viser prosentiler og gjennomsnitt for simulerte forwardkurver. Dette er estimater på hvordan forwardkurven kan se ut om et halvt år. På grunn av Samuelson-effekten vil utfallsrommet være størst for kontrakter med kort tid til levering.

Ved valg av modell vektlegger vi at forwardprisene er lognormalfordelt og at modellen derfor også bør være lognormal. Dette kan testes på samme måte som for volatilitet. Figur 7.6 viser prisfordelingen til forwardkontrakter med 2 år til levering. Dette er resultatet av 26 simuleringssteg. Også denne figuren antyder lognormalitet.

Den naturlige logaritmen til forwardprisene,  $\ln(f)$ , er skissert i samme diagram som en normalfordelingskurve på figur 7.7. Ettersom logaritmen til forwardprisene er tilnærmet



Figur 7.5: Simulerte forwardkurver fra 5000 simuleringer



Figur 7.6: Fordelingen til forwardprisen om 2 år etter 26 simuleringsteg

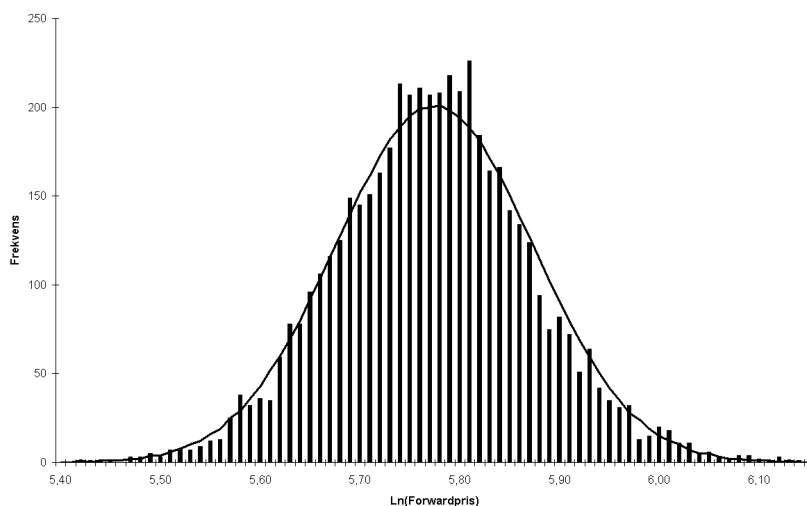
normalfordelt, konkluderer vi med at modellen genererer lognormalfordelte forwardpriser. Dette er konsistent med markedet og støtter vårt valg av modell og  $\beta$ -parameter.

Enkelte derivater er som nevnt svært sensitive til prisendringer på forwardkontrakter. Informasjon om utfallsrommet vil blant annet være nyttig i prising og risikovurdering av slike derivater. Prosentiler vil for eksempel gi et mål på VaR<sup>1</sup>.

### 7.3 Spotprisen

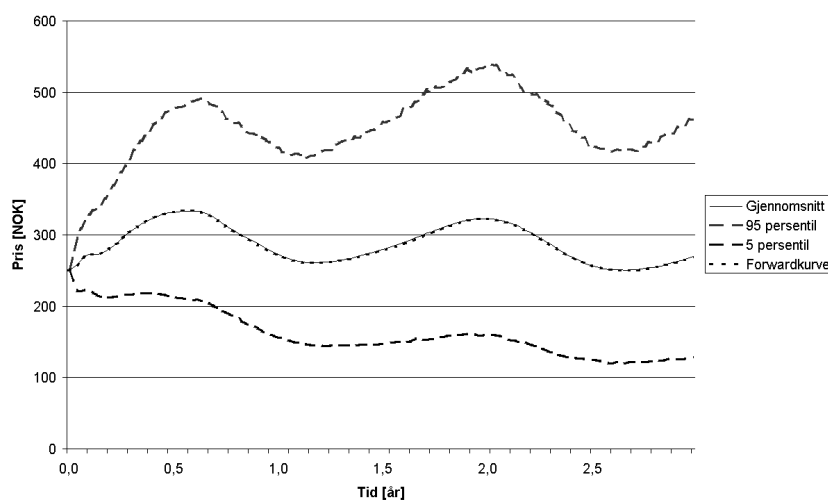
Basert på at startpunktet til forwardkurven,  $f(t, t)$ , tilsvarer spotprisen i tidspunkt  $t$ ,  $S(t)$ , vil forwardkurvesimuleringen gi et estimat på fremtidig spotprisutvikling. Ved å plote startpunktene til forwardkurvesimuleringene, får man en mulig spotprisutvikling.

<sup>1</sup>Value at Risk - mål på nedside-risiko.



Figur 7.7: Fordelingen til  $\ln(f)$  og en normalfordelingskurve

Gjentatte simuleringer gir utfallsrom for fremtidig spotpris. Figur 7.8 viser prosentiler og gjennomsnitt fra 5000 slike simuleringer.

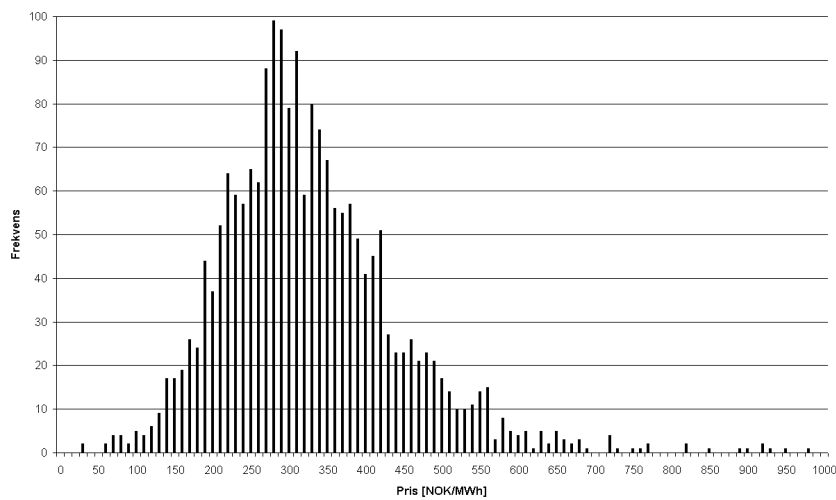


Figur 7.8: Modellert spotprisutvikling fra 5000 simuleringer

Ettersom man beveger seg fremover i tid når man modellerer vil tid til levering på kontraktene synke. Volatiliteten vil som tidligere nevnt øke med avtagende tid til levering. Dersom man eksempelvis modellerer en forward med levering om tre år, vil prisendringene være små i starten av modelleringen. Etter hvert som en nærmer seg leveringstidspunkt, vil volatiliteten og dermed også prisendringene øke. Dette er grunnen til at utfallsrommet til spotprisen er noenlunde jevnt over tid.

På tilsvarende måte som for volatilitet og forwardpris har vi skissert fordelingen til estimert spotpris om to år på figur 7.9. Det kommer frem av figuren at det vil kunne forekomme prissprang og særdeles høye priser. Vi har funnet positiv korrelasjon mellom pris og volatilitet. Ved høye priser får man da økt sannsynlighet for høy volatilitet

og ekstrempriser. Dette samsvarer med de observerte egenskapene til spotprisene i elektrisitetsmarkedet.



Figur 7.9: Fordeling til estimert spotpris om 2 år etter 26 simuleringssteg

Informasjon om spotprisutviklingen kan brukes i produksjonsplanlegging, investeringsanalyse, risikostyring og andre beslutninger knyttet til elektrisitetsprisutviklingen. Prosentiler vil, på samme måte som under forwardkurvemodelleringen, gi et mål på VaR.



## Del III

# Konklusjon, diskusjon og videre arbeid



## Konklusjon

Målet med oppgaven har vært å finne en bedre måte for modellering av volatilitet og priser i elektrisitetsmarkedet. Vi har diskutert ulike modeller og metoder som tar hensyn til de spesielle egenskapene i kraftmarkedet, samt hvordan modellene kan struktureres og implementeres. Vi har videre presentert en oversiktlig modell for modellering av volatilitet, forwardkurver og spotpriser i elektrisitetsmarkedet. Modellen bedrer beslutningsgrunnlaget for produksjonsplanlegging, investeringsanalyse og risikovurdering.

Vi har valgt å benytte oss av en stokastisk  $\alpha\beta\rho$ -modell, SABR-modellen, som tar utgangspunkt i forwardkurven og volatilitetskurven. Modelleringen tar hensyn til at kontraktstypene har ulike egenskaper ved å modellere utviklingen basert på tre modningsintervall. Vi tar også hensyn til korrelasjonen mellom disse. En slik markedsmodell gjør at en får med nyttig informasjon fra markedet, og dermed bedrer nøyaktigheten til modellen.

Elektrisitetsmarkedet har egenskaper som er viktige å ta hensyn til under modelleringen. Vi har derfor valgt en modell der de ulike delene av modellen enkelt kan visualiseres for å foreta en kvalitativ vurdering under simuleringen. Man kan for eksempel kontrollere at volatilitetskurven alltid har en form som samsvarer med Samuelsoneffekten. Alle delene har også en logisk tolkning og de enkelte komponentene i modellen kan enkelt oppdateres eller skiftes ut.

To viktige egenskaper til forwardprisene er lognormalitet og varierende volatilitet. Dette dekkes ved å ha en lognormal modell med stokastisk volatilitet. Ved også å ha med korrelasjon mellom pris- og volatilitetsendring, får man med de sesongvarierende egenskapene til volatiliteten og mulighetene for ekstrempriser på en god måte. Man trenger derfor ikke å ha en volatilitetsfunksjon som eksplisitt tar hensyn til dette, og en reduserer dermed kompleksiteten i modelleringen.

Implisitt volatilitet gir viktig informasjon ved prising av opsjoner. Vi mener imidlertid at historisk volatilitet er bedre egnet til modellering av spot- og forwardpriser. Implisitt volatilitet kan derimot gi informasjon om endringer i markedet, som videre kan brukes til justering av volatilitetskurven.

Vi har kommet frem til en modell som gir gode estimat på fremtidige volatilitets- og prisutviklinger. Modellen gir nyttig informasjon til aktører i det nordiske kraftmarkedet og er enkel å implementere og bruke.



## Diskusjon og videre arbeid

Elektrisitetsmarkedet er et komplekst marked som er i stadig utvikling. Dette fører til at det fortløpende kommer nye synspunkt og forslag til nye metoder for bearbeiding og modellering av data. Elektrisitetsmarkedet påvirkes i høy grad av politiske bestemmelser, og disse er ofte uforutsigbare. Eksempel på dette er innføring, og senere fjerning, av grønne sertifikater, og innføring av CO<sub>2</sub>-kvoter. Ved slike strukturelle endringer i markedet bør en revurdere antagelser og modeller man benytter.

For å beregne historisk volatilitet har vi benyttet 60 dagers moving window. Et lenger vindu vil redusere krumningen til volatilitetskurven, mens et kortere vindu vil kunne gi et dårligere estimat på volatiliteten. En ekstrempris vil påvirke volatilitetsmålingen 30 dager før og 30 dager etter at den inntreffer, men påvirkningen vil være begrenset. Ved bruk av et kortere vindu vil en ekstrempris påvirke færre målinger, men volatilitetsøkningen være større. Ukeskontraktene handles ikke i 60 dager, og historisk volatilitet for disse er derfor beregnet med et kortere vindu. Dette kan medføre noe dårligere estimat, men vi mener dette ikke vil redusere kvaliteten på modelleringen i særlig grad.

Vi har ikke tatt hensyn til overlappende kontrakter, hvilken ukedag kontrakten blir handlet, helligdager eller lignende. Dette kan være interessant å undersøke nærmere, men det er viktig å veie den ekstra informasjonen opp mot den økte kompleksiteten.

På samme måte som vi har gruppert dataene i henhold til tid til levering i markedsmodellen, kan det være gunstig å modellere ulike deler av året separat. Et eksempel på inndeling kan være vår, sommer, høst og vinter.

Enkelte data tyder på at volatilitet bør beskrives som en funksjon av både tid til levering og forwardpris. Vi mener at også dette er noe som bør vurderes i fremtidige modeller.



# Bibliografi

- [Amin95] Amin, K., Pirrong, S.C., Ng, V. (1995). *Managing Energy Price Risk*. London: Risk Publications.
- [Audet04] Audet, N., Heiskanen, P., Keppo, J., Vehvilinen, I. (2004). "Modeling electricity forward curve dynamics in the Nordic market. In *Modelling Prices in Competitive Electricity Markets*". *Wiley Series in Financial Economics*.
- [Benth04] Benth, F. E. (2004). "Det nordiske elektrisitetsmarkedet Nord Pool, prising og hedging." *Working Paper* Online: [http://www.cma.uio.no/documents/speaks/2004Benth\\_Norges-bank.pdf](http://www.cma.uio.no/documents/speaks/2004Benth_Norges-bank.pdf), aksessert 4. september 2005.
- [Benth01] Benth, F. E., Ekeland, L., Hauge, R., Nielsen, B. F. (2001). "On arbitrage-free pricing of forward contracts in energy market." *e-print*, nr. 14, University of Oslo.
- [Benth03] Benth, F. E., Saltyte-Benth, J. (2003). "The normal inverse gaussian distribution and spot price modelling in energy markets." *Pure Mathematics* nr. 26.
- [Benth05a] Benth, F. E., Kallsen, J., Meyer-Brandis, T. (2005) "A non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process for electricity spot price modelling and derivatives pricing." *E-print* nr. 15, Department of Mathematics, University of Oslo.
- [Benth05b] Benth, F. E., Koekebakker, S. (2005). "Stochastic modeling and financial electricity contracts." *Presentasjon* Online: [http://www.math.uio.no/eprint/pure\\_math/2005/24-05.pdf](http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2005/24-05.pdf), aksessert 20. august 2005.
- [Bjerksund00] Bjerksund, P., Rasmussen, H., Stensland, G. (2000). "Valuation and risk management in the Norwegian electricity market.", Norwegian School of Economics and Business Administration, *Discussion paper*.
- [Black76] Black, F. (1976). "The Pricing of Commodity Contracts." *Journal of Financial Economics*, 3, s. 167-179.
- [Bunn03] Bunn, D. W., Karakatsani, N. (2003), "Forecasting Electricity Prices.", London Business School, *Working Paper*.

- [Chen02] Chen, R.-R., Scott, L. (2002), "Multi-Faktor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure: Estimates and Tests From a Kalman Filter Model.", Rutgers Business School, *Working Paper*.
- [Clewlow99] Clewlow, L., Strickland, C. (1999). "Valuing energy options in a one factor model fitted to forward prices." *Working paper*, School of Finance and Economics, Technical University of Sidney.
- [Clewlow00] Clewlow, L., Strickland, C. (2000). *Energy derivatives: pricing and risk management*. Lacima Publications.
- [Cox85] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., Ross, S. A. (1985) "A Theory of the Term Structure of the Interest Rates." *Econometrica*, vol. 53, nr. 2, s. 385-408.
- [Eydeland03] Eydeland, A., Wolyniec, K., (2003). *Energy and Power Risk Management*. John Wiley & Sons, Inc.
- [Fleten01] Fleten, S., Lemming, J. (2001). "A new approach to building electricity forward price curves. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, *Presentation*.
- [Fleten03a] Fleten, S., Lemming, J. (2003). "Constructing forward price curves in electricity markets." *Energy Economics*. 25, s. 409-424.
- [Fleten03b] Fleten, S., Näsäkkälä, E. (2003). "Flexibility and technology choice in gas fired power plant investments." *Review of Financial Economics*. vol. 14, Nr. 3-4, s. 371-393.
- [Gourieroux01] Gourieroux, C., Jasiak, J. (2001). *Financial Econometrics: Problems, Models and Methods*. Prinseton University Press.
- [Hagan02] Hagan, P. S., Kumar, D., Lesniewski, A. S., Woodward, D. E. (2002), "Managing Smile Risk." *Willmott Magazine* vol. 3, s. 84-108.
- [Heath92] Heath, D., Jarrow, R., Morton, A. (1992). "Bond pricing and the term structure of interest rates." *Econometrica*. 60, s. 77-106.
- [Heston93] Heston, S. L., (1993). "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options." *Review of Financial Studies*, nr 6, s. 327-343.
- [Hull03] Hull, J. C. (2003). *Options, Futures and Other Derivatives, fifth edition*. Prentice Hall.
- [Joshi05] Joshi, M., Stacey, A. "Implementations of the LIBOR market model." *Working Paper* Online: <http://www.quarchome.org>, aksessert 12. juni 2005.
- [Kaminski04] Kaminski, V., (2004). *Managing Energy Price Risk, The New Challenges and Solutions*. Risk Books.
- [Keppo05] Keppo, J., Näsäkkälä, E. (2005). "Electricity load pattern hedging with static forward strategies." *Managerial Finance, special issue on Energy Pricing and Risk Management*, vol. 31, nr 6, s. 116-137.



- [Kiesel05] Kiesel, R., Schindlmayr, G., Boerger, R. H. (2005), "A Two-Factor Model for the Electricity Forward Market." University of Ulm, *Working Paper*
- [Kloeden92] Kloeden, P.E., Platen, E. (1992). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag.
- [Koekebakker01] Koekebakker, S., Ollmar, F. (2001), "Forward curve dynamics in the Nordic electricity market." Agder University College, *Working Paper*
- [Laurie97] Laurie, D. B. (1997). "Calculation of Gauss-Kronrod Quadrature rules." *Mathematics of Computation*, vol. 66, nr. 219, s. 1133-1145.
- [Lhabitant04] Lhabitant, F.-S. (2004). *Hedge Funds*. John Wiley & Sons, Ltd. s. 35-60, 121-174.
- [Lucia02] Lucia, J., Schwartz, E.S. (2002). "Electricity Prices and Power Derivatives: Evidence from the Nordic power exchange." *Review of Derivatives Research*, 5(1), s. 5-50.
- [McDonald03] McDonald, R. L., (2003). *Derivatives Markets*. Addison Wesley, s. 19-50, 161-194, 657-683.
- [Nagarajan99] Nagarajan, S., (1999). "Power Forward Curves: A Managerial Perspective." *Managing Energy Price Risk*. Risk Books, London.
- [Pilipovic98] Pilipovic, D. (1998). *Energy Risk; Valuing and Managing Energy Derivatives*. Mc Graw-Hill, New York.
- [Rebonato99] Rebonato, R. (1999). "On the simultaneous calibration of multi-factor log-normal interest-rate models to Black volatilities and to the correlation matrix". *Journal of Computational Finance*, vol. 2, nr. 4.
- [Rebonato03] Rebonato, R. (2003). "Term-Structure Models: A Review." Royal Bank of Scotland Quantitative Research Centre, *Working Paper*.
- [Schwartz00] Schwartz, E., Smith, J. E. (2000), "Short-Term Variations and Long-Term Dynamics in Commodity Prices." *Management Science*, vol. 46, nr. 7, s. 893-911.
- [Staalhane98] Stålhane, T. (1998), "Bruk av enkle statistiske metoder i prosessforbedring." Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, *Working Paper*.
- [Tauchen04] Tauchen, G. (2004). "Remarks on Recent Developments in Stochastic Volatility: Statistical Modelling and General Equilibrium Analysis." Duke University, *Working Paper*.
- [Vainberg06] Vainberg, G. (2006). "VB Numerical Methods." Online: <http://www.vbnumericalmethods.com/math.asp>, aksessert 5. februar 2006.
- [West05] West, G. (2005). "Calibration of the SABR model in illiquid markets." *To appear in Applied Mathematical Finance*.



**Del IV**

**Tillegg**



## Glatting av forwardkurve

Forwardkurven, figur A.1, blir generert ut i fra de mest likvide kontraktene i den aktuelle tidsperioden. En måte å generere denne kurven på er, i følge Fleten og Lemming [Fleten01], ved hjelp av følgende formel:

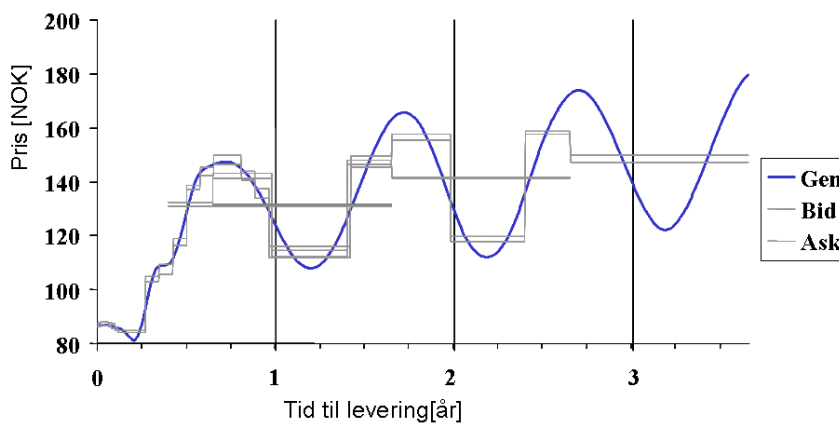
*Minimer*

$$W_{lsq} \sum_{i=1}^I (x_i - B_i)^2 + W_{smo} \sum_{i=2}^{I-1} (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})^2 \quad (A.1)$$

*S.T.*

$$F(t, T_1, T_2)_{bid} \leq \sum_{s=T_1}^{T_2} \omega(s; r) x_s \leq F(t, T_1, T_2)_{ask} \quad (A.2)$$

der  $W_{lsq}$  og  $W_{smo}$  er vektning av henholdsvis kvadratavvik og glatting. Denne optimeringen søker å finne en kurve som treffer kontraktsprisene best mulig og som er glattest mulig, samtidig som det stilles krav til at kurven skal være innenfor bid-ask spread.



Figur A.1: Glattet forwardkurve med bid-ask spread



## Utledning av HJM-modellen

HJM-modellen sier at fremtidig endring i forwardpris er en funksjon av et driftledd og et eller flere stokastiske ledd med ulik varians.

Benth og Koekebakker tar utgangspunkt i følgende formel:

$$F(t, T_1, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \hat{w}(v; T_1, T_2) f(t, u) du \quad (\text{B.1})$$

der  $t$  er beregningstidspunkt,  $T_1$  og  $T_2$  er henholdsvis start- og sluttidspunkt for leveringsperioden,  $v$  er tidspunkt for finansielt oppgjør og  $\hat{w}(v; T_1, T_2)$  er vektingen som tar hensyn til hvilket tidspunkt kontraktene blir oppgjort finansielt. Målet er å modellere utviklingen til forwardkurven over tid, men kurven er vanskelig å modellere direkte. Det er derimot kan modellere er prisendringen til de kunstige kontraktene. Endringen finnes ved:

$$\begin{aligned} dF(t, T_1, T_2) &= \bar{\sigma}(t, T_2) F(t, T_1, T_2) dW(t) \\ &\quad - \int_{T_1}^{T_2} \partial_2 \bar{\sigma}(t, u) \frac{\hat{w}(\tau; T_1, T_2)}{\hat{w}(\tau; T_1, u)} F(t, T_1, u) du dW(t) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

der  $\tau$  er siste handelsdag på forwardkontrakten. Vi bruker Black-76 [Black76] for å modellere volatiliteten, og får da en volatilitet som er uavhengig av tid til levering,  $u$ . Dette gir at den deriverte av volatiliteten med hensyn på leveringstid er null,  $\partial_2 \bar{\sigma}(t, u) = 0$ , og dermed at volatiliteten er uavhengig av leveringstidspunkt,  $\bar{\sigma}(t, u) = \bar{\sigma}(t)$ . Det siste leddet i funksjonen forsvinner og endringen i prisen på kontraktene blir da:

$$dF(t, T_1, T_2) = \bar{\sigma}(t) F(t, T_1, T_2) dW(t) \quad (\text{B.3})$$

Å hevde at volatiliteten,  $\bar{\sigma}(t, u)$ , er uavhengig av tid til levering er en svært grov tilnærming. For å løse dette problemet mener Bjerksund, Rasmussen og Stensland [Bjerksund00] at en bedre tilnærming vil være:

$$\bar{\sigma}(t, T_2) - \int_{T_1}^{T_2} \partial_2 \bar{\sigma}(t, u) \frac{\hat{w}(\tau; T_1, T_2) F(t, T_1, u)}{\hat{w}(\tau; T_1, u) F(t, T_1, T_2)} du \approx \int_{T_1}^{T_2} \hat{w}(u; T_1, T_2) \bar{\sigma}(t, u) \quad (\text{B.4})$$

De viser videre at relativ endring i prisen til kontrakten er gitt av formelen:

$$\frac{dF(t, T_1, T_2)}{F(t, T_1, T_2)} = \bar{\sigma}(t, T_2)dW(t) - \int_{T_1}^{T_2} \partial_2 \bar{\sigma}(t, u) \frac{\hat{w}(\tau; T_1, T_2)F(t, T_1, u)}{\hat{w}(\tau; T_1, u)F(t, T_1, T_2)} du dW(t) \quad (\text{B.5})$$

Vi velger å gjøre den tilnærmingen at oppgjøret av kontraktene skjer ved levering. Dette gir oss at  $\hat{w}(u) = 1$  og  $\hat{w}(u; T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1}$ , og videre at funksjonen for endring av kontraktsprisene blir:

$$dF(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \bar{\sigma}(t, u) du F(t, T_1, T_2) dW(t) \quad (\text{B.6})$$

der  $dW(t)$  er en stokastisk variabel som er normalfordelt  $N(0, \sqrt{dt})$ . Formelen viser endringen i forwardprisen basert på dagens pris, en volatilitetsfunksjon og et stokastisk ledd.



## Volatilitetsteori

En vanlig måte å beregne volatilitet på er å benytte seg av historiske data. Ved å gjøre nytte av moving window får man en volatilitet som er tidsavhengig. For å få med informasjon om fremtidsforventningene til markedet, kan implisitt volatilitet benyttes. Historisk volatilitet kan sammenlignes med implisitt volatilitet dersom en bruker kumulativ historisk volatilitet.

### Historisk volatilitet

Ofte beregnes volatilitet ut i fra historiske data. Den historiske volatiliteten sier noe om stabiliteten til disse dataene, der høy volatilitet skyldes store svingninger. Et vanlig mål på volatilitet er standardavvik, som blir beregnet fra følgende formel:

$$\sigma_X = \sqrt{E(X - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2} \quad (\text{C.1})$$

der  $X_i$  er observasjon  $i$ ,  $\bar{X}$  er gjennomsnittlig  $X$ -verdi,  $E()$  er forventningsverdi og  $N$  er antall målinger. Det er vanlig å bruke årlig volatilitet, og volatilitet fra andre tidsenheter kan enkelt konverteres ved hjelp av at  $\sigma_a = \frac{\sigma}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}}$ , der  $\sigma_a$  er årlig volatilitet og  $t$  er tiden gitt i år. Det er verdt å merke seg at en ofte kun er interessert i virkedager, og at året da regnes til 250 dager.

Formlene beregner historisk volatilitet for en normalfordelt variabel. I finansverden antar man ofte at prisene er lognormalfordelte [Eydeland03]. Man kan da bruke formelen

$$X_i = \frac{\ln P_i - \ln P_{i-1}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \quad (\text{C.2})$$

der  $P_i$  er en prisobservasjon. Dette gir da følgende mål på historisk volatilitet:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\ln P_i - \ln P_{i-1}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\ln P_i - \ln P_{i-1}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \right)^2} \quad (\text{C.3})$$

Gjennomsnittlig historisk volatilitet vekter alle historiske data likt, og tar dermed ikke hensyn til hverken sesongvariasjoner eller andre trender. For å få tidsavhengig volatilitet

kan moving window<sup>1</sup>-metoden benyttes. Denne gir volatiliteten til prisene over en gitt tidsperiode, for eksempel 60 dager. Dette vinduet flyttes en og en dag frem og gir tidsspesifikk volatilitet:

$$\sigma(t_k) = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=k-m+1}^k \left( \frac{\ln P_i - \ln P_{i-1}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} - \frac{1}{m} \sum_{i=k-m+1}^k \frac{\ln P_i - \ln P_{i-1}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \right)^2} \quad (\text{C.4})$$

der  $t_k$  er tidspunktet for måling  $k$  og  $m$  er lengden på vinduet.

## Implisitt volatilitet

Ulempen med å bruke historisk volatilitet til å beskrive fremtiden er at den kun ser på historiske data. For å få et bedre estimat på fremtidig utvikling kan man trekke inn informasjon om forventninger i markedet. Opsjonspriser kan nyttes som datagrunnlag for dette ved å regne ut hvilken volatilitet som er lagt til grunn for prisingen. Dette tilsvarer beregninger av implisitt volatilitet i aksjemarkedet. Det er verdt å merke seg at den implisitte volatiliteten avhenger av hvilken opsjonsprisinde metode en benytter. Mange baserer seg på Black'76 [Black76], en metode som gir tidsuavhengig implisitt volatilitet.

Ut i fra de handlede opsjonene i markedet kan en beregne implisitt volatilitet.

$$V = f(F_T, K, t, T, r, \sigma^{\text{implisitt}}) \quad (\text{C.5})$$

der  $V$  er prisen til den handlede opsjonen,  $F_T$  er pris på en forwardkontrakt med levering i tidspunkt  $T$ ,  $K$  er innløsningspris,  $t$  er tiden prisingen skjer,  $T$  er tid for innløsning,  $r$  er risikofri rente og  $\sigma^{\text{implisitt}}$  er implisitt volatilitet. Dersom megleren har brukt de samme forutsetningene og parametrene som blir brukt til å finne  $\sigma^{\text{implisitt}}$ , vil den implisitte volatiliteten være samsvarende med volatiliteten megleren brukte i prissettingen. Risikojusteringer og annen informasjon om markedet vil derimot kunne påvirke meglerens prissetting, og dermed også den implisitte volatiliteten.

En vanlig metode for å finne denne volatiliteten er som nevnt Black'76. Denne er som følger [Bjerksund00]:

$$\begin{aligned} V_t[1_\tau (f(\tau, T) - K)^+] &= E_t^*[e^{-r(\tau-t)} (f(\tau, T) - K)^+] \\ &= e^{-r(\tau-t)} f(t, T) N(d_1) - e^{-r(\tau-t)} K N(d_2) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

der  $N(*)$  er standard normal kumulativ sannsynlighetsfunksjon og

$$d_1 \equiv \frac{\ln(f(t, T)/K) + 0,5\sigma^2(\tau - t)}{\sigma\sqrt{\tau - t}} \quad (\text{C.7})$$

$$d_2 \equiv d_1 - \sigma\sqrt{\tau - t} \quad (\text{C.8})$$

$$\sigma \equiv \sqrt{\text{Var}_t^* \left[ \ln \left( \frac{f(\tau, T)}{f(t, T)} \right) \right] \frac{1}{\tau - t}} \quad (\text{C.9})$$

<sup>1</sup>Volatilitetsberegningene gjøres over et bevegelig tidsvindu med en bestemt lengde. Dette vinduet flytter seg med tiden.

$\tau$  er siste handelsdag for opsjonen,  $E^*$  er risikonøytral forventning og  $Var^*$  er tilnærmet varians. For å bruke Black'76 må man altså ha forwardpris i tidspunkt  $t$ ,  $f(t, T)$ , og volatiliteten til underliggende. Ito's lemma gir videre:

$$Var_t^* \left[ \ln \left( \frac{f(\tau, T)}{f(t, T)} \right) \right] = Var_t^* \left[ \int_t^\tau \frac{df(s, T)}{f(s, T)} ds \right] \quad (C.10)$$

## Sammenligning av historisk- og implisitt volatilitet

Det kan ofte være interessant og nyttig å sammenligne implisitt og historisk volatilitet. Verdiene for disse kan imidlertid ikke sammenlignes direkte. Black'76 gir fra C.7 og C.10 følgende funksjon for implisitt volatilitet:

$$\sigma_{implisitt} = \sqrt{Var_t^* \left[ \int_t^\tau \frac{df(s, T)}{f(s, T)} ds \right] \frac{1}{\tau - t}} \quad (C.11)$$

For å kunne sammenligne historisk volatilitet med enkeltverdier av implisitt volatilitet, må vi bruke kumulativ historisk volatilitet [Eydeland03]. Denne finner man ved:

$$\sigma_{kumulativ} = \frac{1}{T - t} \int_t^T \sigma^{historisk}(s, T) ds \quad (C.12)$$



## Analyse av store datamengder

Ved analyse av store datamengder er regresjonsanalyse en effektiv og relativt enkel metode. Minste kvadraters metode kan brukes som et verktøy i regresjonsanalysen for optimalisering av parametre. Det er også vanlig å teste stabiliteten til parametrene i de aktuelle funksjonene for å finne den funksjonen som er best egnet til beskriving av datagrunnlaget over tid.

### Regresjonsanalyse

Regresjonsanalyse er en vanlig metode for å få oversikt over en stor og uoversiktlig datamengde. Kort fortalt er en regresjonsanalyse en metode for analyse av sammenhengen mellom en avhengig variabel,  $Y$ , og en eller flere uavhengige variabler,  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , kalt forklaringsvariabler. Man søker altså å finne en funksjon som bruker forklaringsvariablene til beskrivelse av den avhengige variabelen.

### Minste kvadraters metode

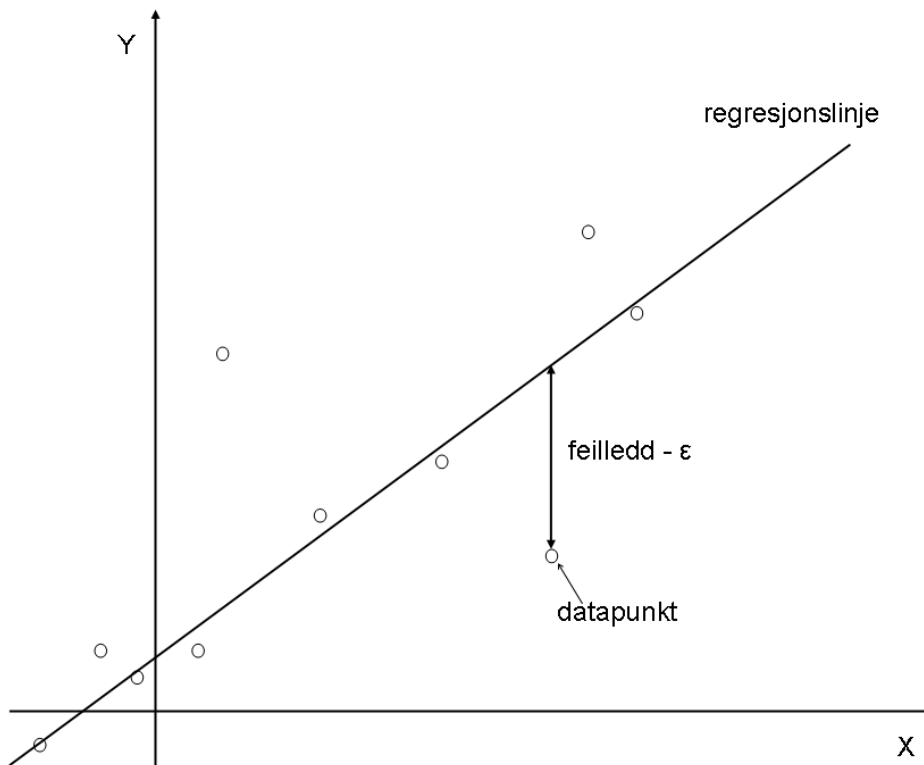
Når man har funnet en funksjon som beskriver datagrunnlaget godt, for eksempel fra en regresjonsanalyse, må man optimalisere parametrene i funksjonen. En vanlig måte å gjøre dette på er å benytte seg av minste kvadraters metode [Lhabitant04]. For hvert observasjons punkt,  $i$ , vil man ha følgende sammenheng:

$$Y_i = f(X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki}) + \epsilon_i \quad (\text{D.1})$$

der,  $\epsilon$ , er avviket mellom den beregnede funksjonsverdien og den observerte verdien slik figur D.1 viser.

Ved bruk av minste kvadraters metode justerer man parametrene for å minimere summen av de kvadratiske avvikene,  $\sum_{i=1}^N \epsilon_i^2$ . Det er viktig å huske på at ekstremverdier vil ha svært stor påvirkning og dermed kan endre funksjonen radikalt.

Det finnes også andre metoder for optimalisering av parametre, men disse er ofte mer spesialiserte og komplekse.



Figur D.1: Regresjonsanalyse med regresjonslinje og feilledd

## Stabilitet i parametrene

Valget av funksjon kan ikke kun baseres på hvor godt den enkelte funksjon beskriver det observerte datagrunnlaget. En god funksjon bør også ha stabile parametere etter hvert som tiden går og datagrunnlaget endrer seg. Det finnes ulike metoder for å kontrollere parametrenes stabilitet. En av disse metodene er Sub-sample analyse, der man optimaliserer parametrene basert på deler av datagrunnlaget. En annen metode er å optimalisere parametrene ut i fra et nytt datagrunnlag som ikke overlapper det opprinnelige datamaterialet. Denne metoden kalles Out-of-sample analyse.

Ved gjennomføring av de nevnte analysene er det viktig å merke seg betydningen de ulike parametrene har for den endelige funksjonsverdien. I tillegg til å registrere hvor mye hver enkelt parameter endrer seg, bør man også undersøke hvor følsom funksjonsverdien er for parameterendring. Det kan også være interessant å undersøke de fysiske karakteristikene til funksjonene som kommer frem fra de ulike metodene. For eksempel om funksjonen er monotont stigende/synkende, konkav/konveks og eventuell kryssing av akser. Hvor godt de ulike funksjonene beskriver datagrunnlaget, målt ved totalt kvadrat avvik, er forøvrig også viktig ved valg av funksjon.

## Heteroskedastisitet

En av hovedantagelsene i regresjonsanalyse er at feilleddene,  $\epsilon_i$  i ligning D.1, er tilfeldige og jevnt fordelte over dataområdet. Dette innebærer at variansen til datamålingene er konstant, noe som kalles homoskedastisitet. Dersom dette ikke er tilfelle og størrelsen på feilleddene er varierende over dataområdet kalles dette heteroskedastisitet.

Dersom vi har heteroskedastisitet i datagrunnlaget vil parameterestimeringen ved bruk av minste kvadraters metode være konsistent, men ikke rasjonell. Det vil si at vi får en funksjon som passer datamengden relativt bra, men at dataområder med stor varians vil påvirke resultatet i stor grad.

Det er i hovedsak to måter å ta hensyn til heteroskedastisitet på. Det første alternativet er å respesifisere modellen for å oppnå homoskedastiske feilledd. Det andre alternativet er å bruke en variant av minste kvadraters metode der en vekter små avvik høyere enn store.





## Korrelasjon

Korrelasjon måler den lineære sammenhengen mellom to variable, og sier noe om hvordan de beveger seg i forhold til hverandre. Dette kan brukes til å generere to eller flere korrelerte stokastiske ledd. Konfidensintervallet til korrelasjonskoeffisienten kan være nyttig for å si noe om nøyaktigheten til målingene. Ved videre bearbeiding av korrelasjonsdataene er det viktig å ta hensyn til at korrelasjonskoeffisientene ikke er additive.

### Korrelasjon mellom to variable

Korrelasjonen til to variable sier noe om hvordan de beveger seg i forhold til hverandre. En høy korrelasjon tyder på at variablene beveger seg unisont. Korrelasjon kan kun måles mellom to og to variable. Generelle formler for varians, kovarians og korrelasjonskoeffisienten er som følger:

$$\sigma_X^2 = E(X - \bar{X})^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \quad (\text{E.1})$$

$$\sigma_{X,Y} = E((X - \bar{X})(Y - \bar{Y})) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \quad (\text{E.2})$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Observert kovarians}}{\text{Maksimal mulig kovarians}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (\text{E.3})$$

Korrelasjonskoeffisienten,  $\rho$ , kan ha verdier mellom -1 og 1, og sier noe om den lineære sammenhengen mellom  $X$  og  $Y$ .

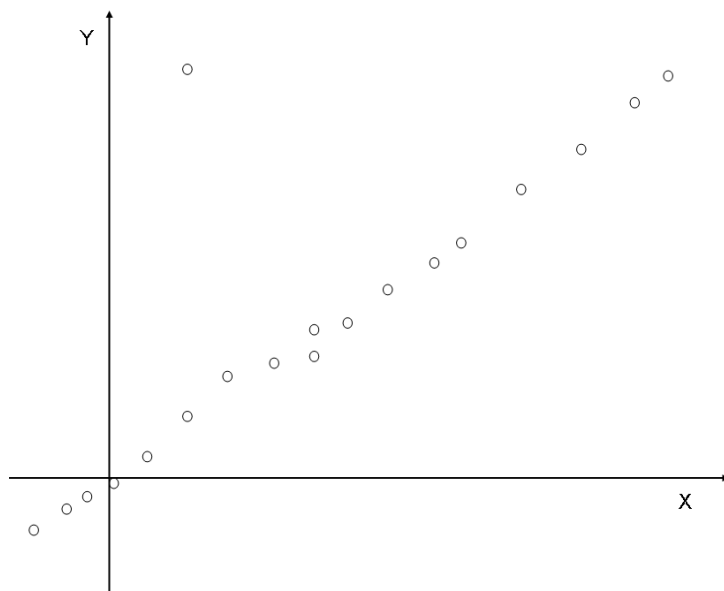
Perfekt positiv korrelasjon er når  $\rho_{X,Y} = 1$ . Dette oppstår når alle observasjonspunkt  $(X_i, Y_i)$  danner en perfekt rett linje med positivt stigningstall. Størrelsen på stigningstallet er irrelevant. Det er da en perfekt lineær sammenheng mellom de to variablene.

Ingen korrelasjon har en om  $\rho_{X,Y} = 0$ . En kan i slike tilfeller ikke observere noen lineær sammenheng mellom de to variablene. Ingen informasjon om  $X$  er da i utgangspunktet nyttig til å si noe om  $Y$ , og motsatt.

Om  $\rho_{X,Y} = -1$  har man en perfekt negativ korrelasjon. Dette innebærer at alle punktene ligger på en perfekt rett linje med negativt stigningstall. Størrelsen på stigningstallet er også her uinteressant.

En bør merke seg at ingen korrelasjon ikke nødvendigvis innebærer en uavhengighet mellom de to variablene. Et eksempel på dette kan være der  $Y = X^2$ . Korrelasjonen vil i dette tilfellet være null, mens avhengigheten er åpenlys. Det er også mulig å finne korrelasjon mellom to uavhengige variable som blir påvirket av samme underliggende faktor. Et eksempel på dette er antall personer som er bitt av slanger og antall solgte is. Antall observasjoner vil i begge tilfeller være høyere på dager med varmt vær enn på kjølige dager, men likevel er de ikke direkte avhengige av hverandre. En må på grunnlag av dette være svært observant på om det er en reell korrelasjon en måler, eller om en finner sammenhenger som skyldes andre faktorer.

Ekstremverdier kan også ha svært stor påvirkning på korrelasjonskoeffisienter. Selv om majoriteten av dataene er høyt korrelert, kan ekstremverdier medføre at korrelasjonskoeffisienten bli tilnærmet lik null, se figur E.1. En kan også få for høy korrelasjonskoeffisient på grunn av ekstremverdier, slik figur E.2 viser.

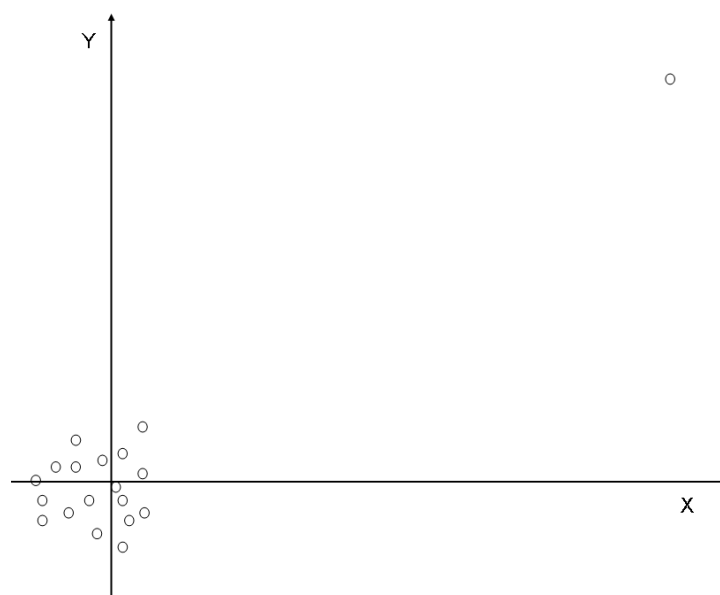


Figur E.1: Ekstremverdi kan medføre lav korrelasjon

## Konfidensintervall

Ved statistiske analyser er det viktig å ta hensyn til sannsynligheten for at resultatet er tilfeldig. Dette gjelder også for korrelasjonsberegninger. En bør derfor kontrollere om korrelasjonskoeffisienten er statistisk signifikant ulik 0.

Ved beregning av korrelasjon, og andre statistiske mål, baserer man seg på en utvalgt populasjon. Det vil si at man kun ser på en liten fraksjon av alle mulige observasjoner. Man søker i slike tilfeller å finne representative utvalg, for på denne måten å finne et mål som er mest mulig riktig for hele utvalget. Man kan aldri vite om det svaret man får er riktig, men ved å benytte seg av konfidensintervall har man muligheten til å si noe om området verdien mest sannsynlig ligger innenfor. Det er vanlig å danne et konfidensintervall med



Figur E.2: Ekstremverdi kan medføre høy korrelasjon

95 % sannsynlighet. Dette gir et verdiområde som med 95 % sannsynlighet inneholder den riktige verdien. For å kunne si at korrelasjonen er statistisk signifikant ulik null, må man ha et konfidensintervall som ikke inneholder verdien null. De fleste analytikere er enige om at korrelasjonen er signifikant om sannsynligheten for at verdiene er tilfeldige er mindre enn 5 %.

Å lage et konfidensintervall for en normalfordelt variabel er relativt enkelt. Ettersom korrelasjonskoeffisienten ikke er normalfordelt, men ligger i det lukkede intervallet fra  $-1$  til  $+1$ , må man transformere korrelasjonskoeffisienten til en ny variabel, Fishers  $Z$  [Lhabitant04], etter formel E.4.

$$Z = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right) \quad (\text{E.4})$$

Denne  $Z$ -verdien vil være tilnærmet normalfordelt. Standardavviket til  $Z$  vil da være gitt av

$$\sigma_Z = \frac{1}{\sqrt{N - 3}} \quad (\text{E.5})$$

der  $N$  er antall observasjoner. Konfidensintervallet for  $Z$  kan videre genereres på vanlig måte. Et 95 % konfidensintervall for  $Z$  vil da være  $[Z - 1,96\sigma_Z, Z + 1,96\sigma_Z]$ . Konfidensintervallet kan transformeres til korrelasjonsverdier ved hjelp av formel E.6.

$$\rho = \frac{e^{2Z} - 1}{e^{2Z} + 1} \quad (\text{E.6})$$

Dette gir konfidensintervallet for korrelasjonskoeffisienten.

## Bearbeiding av korrelasjonsdata

Det er verdt å merke seg at korrelasjonskoeffisienter ikke er additive. Det vil blant annet si at et gjennomsnitt av korrelasjonskoeffisientene ikke representerer en gjennomsnittlig korrelasjon. Dette kommer av at korrelasjonskoeffisienten ikke er en lineær funksjon av størrelsen til relasjonen mellom variablene. I tilfeller der en behøver gjennomsnittlig korrelasjon, må man omforme korrelasjonskoeffisienten til additive størrelser. Dette kan gjøres ved å kvadrere korrelasjonskoeffisientene slik at vi får det som kalles "Coefficients of determination". Det er svært viktig å merke seg at man mister fortegnet når man kvadrerer, og at denne metoden dermed kun egner seg for positive korrelasjonskoeffisienter. En tilnærming som tar hensyn til dette problemet er å konvertere verdiene til tidligere nevnte Fischers  $Z$ -verdier, formel E.4, som også er additive. Da vil man beholde fortegnet og tillegg ha muligheten til å beregne konfidensintervall.

## Korrelasjon mellom stokastiske ledd

I stokastisk programmering benytter en seg ofte av geometriske brownske bevegelser (GBM) i form av stokastiske ledd som for eksempel er normalfordelt med forventningsverdi 0 og standardavvik 1,  $N(0, 1)$ . Dersom man ønsker å endre standardavviket til de normalfordelte variablene, for eksempel fra 1 til  $\sqrt{dt}$ , kan dette gjøres ved å multiplisere GBM-leddet med  $\sqrt{dt}$ .

### Korrelasjonen mellom to stokastiske ledd

Dersom en ønsker to stokastiske ledd som er korrelerte kan dette i følge McDonald [McDonald03] gjøres på følgende måte:  $\epsilon_1$  og  $\epsilon_2$  er uavhengige stokastiske variable med fordeling  $N(0, 1)$ . La

$$W_1 = \epsilon_1 \quad (\text{E.7})$$

$$W_2 = \rho\epsilon_1 + \epsilon_2\sqrt{1 - \rho^2} \quad (\text{E.8})$$

Da vil korrelasjonen mellom  $W_1$  og  $W_2$  være  $\rho$ , og  $W_1$  og  $W_2$  være fordelt  $N(0, 1)$ .

### Korrelasjonen mellom flere stokastiske ledd

Har man behov for tre eller flere korrelerte stokastiske ledd må man benytte seg av en mer avansert metode.

Vi starter med å generere  $n$  ukorrelerte tilfeldige  $N(0, 1)$  variable,  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ . Videre henter vi inn korrelasjonsmatrisen for variablene,

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

Man må så gjennomføre en Cholesky dekomposisjon [Vainberg06] av denne korrelasjonsmatrisen. Denne dekomposisjonen gjøres ved

$$a_{i,j} = \frac{1}{a_{j,j}} \left[ \rho_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{j,k} a_{i,k} \right] \quad i > j \quad (\text{E.9})$$

$$a_{i,i} = \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k}^2} \quad (\text{E.10})$$

For at Cholesky dekomposisjonen skal bli riktig er man avhengig av at korrelasjonssettene i korrelasjonsmatrisene er positive-definite<sup>1</sup>. Dette innebærer det ikke skal gå an å kombinere variablene på en slik måte at variansen blir negativ. Korrelasjonene er bare gyldig om dette kravet er oppfylt. Estimerte kovarianser er ikke nødvendigvis positive-definite, men dersom man sørger for at man har flere observasjoner av korrelasjon enn antall underliggende vil man sikre seg mot dette.

Man kan ut i fra  $a_{i,j}$ -matrisen og de ukorrelerte variablene,  $\epsilon_i$ , generere stokastiske korrelerte normalfordelte variabler,  $W_i$ , med fordeling  $N(0, 1)$ . Dette gjøres ved formelen

$$W_i = \sum_{j=1}^i a_{i,j} \epsilon_j \quad 1 \leq i \leq n \quad (\text{E.11})$$

---

<sup>1</sup>Matrisen må ha kun positive eigenverdier.



## Spotprismodellering

Mange aktører er opptatt av hvordan spotprisen i elektrisitetsmarkedet vil utvikle seg med tiden. Det er i hovedsak to måter for stokastisk modellering av spotpriser på handelsvarer, direkte modellering eller forwardkurve modellering.

Man kan bruke en modell for å beregne underliggendes utvikling direkte. En starter da med dagens spotpris og modellerer fremtidig spotpris ved hjelp av et begrenset antall faktorer, slik som convenience yield, renter og utbytte. En formel som ofte brukes på finansielle derivater er formel F.1 [Hull03].

$$E^*(S_t) = F_{0,t} = S_0 e^{(r+\lambda-c)t} \quad (\text{F.1})$$

der  $E^*(S_t)$  er risikonøytral forventet fremtidig spotpris i tiden  $t$ ,  $F_{0,t}$  er pris på forwardkontrakt med levering i tiden  $t$ ,  $S_0$  er spotprisen i starttidspunkt,  $r$  er risikonøytral rente,  $\lambda$  er lagerkostnad,  $c$  er convenience yield<sup>1</sup> og  $t$  er et fremtidig tidspunkt. Det finnes også andre måter å modellere spotprisen direkte på, Clewlow og Strickland (2000) [Clewlow00] og Pilipovic (1998) [Pilipovic98], men dette vil vi ikke gå nærmere inn på i denne oppgaven.

Alternativt kan man modellere den dynamiske utviklingen til underliggende ved hjelp av forwardkurven. Forwardkurven brukes da enten som basis for modelleringen eller til kalibrering av modellen. Vi kan for eksempel benytte oss av at  $S(t) = f(t, t)$ , der  $f(t, t)$  er forwardprisen i tiden  $t$ , det vil si startpunktet til forwardkurven i det tidspunktet. Dersom man kan lage en forwardkurve som starter i et fremtidig tidspunkt  $t$ , vet man implisitt også spotprisen i dette tidspunktet.

I de fleste råvaremarkeder kan man enkelt, og med godt resultat, estimere fremtidig spotpris med førstnevnte metode. Siden det som kjent ikke er mulig å lagre elektrisitet, har man ikke variablene lagerkostnad og convenience yield. Denne metoden kan derfor ikke brukes direkte i elektrisitetsmarkedet. Det er derimot god tilgang på informasjon om forwardmarkedet, og stor handel på de ulike kontraktene. Ettersom svært mye av den tilgjengelige informasjonen i markedet gjenspeiles i forwardkurven, baserer de fleste modellene for elektrisitetsprismodellering seg på den sistnevnte metoden.

---

<sup>1</sup>Verdien av å ha den fysiske varen tilgjengelig





## Analyse av volatilitetsfunksjoner

### Kvadratavvik

Kvadratavviket fra sub-sample analysen er vist i tabell G.1. Her Vol2-funksjonen best for alle modningsintervallene.

Kvadratavvik	TTD1	TTD2	TTD3
Vol1	6,38	8,22	1,29
Vol2	<b>6,35</b>	<b>6,91</b>	<b>1,08</b>
Vol3	6,37	8,08	1,10

Tabell G.1: Summert kvadratavvik i sub-sample analysen

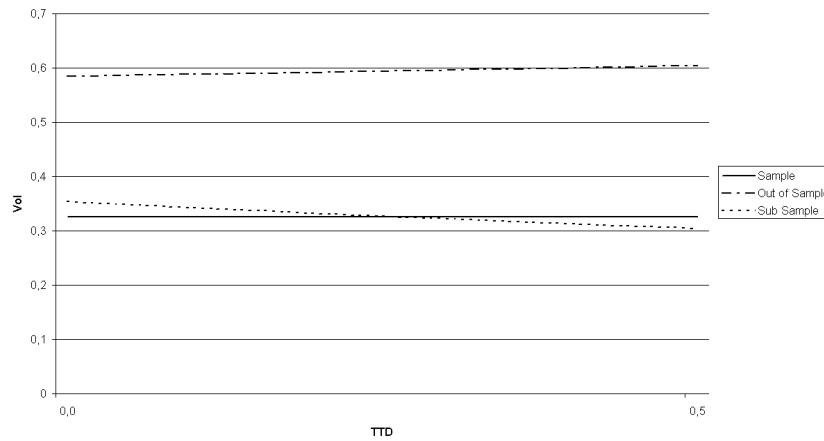
Resultatene fra out-of-sample analysen er vist i tabell G.2. I TTD1 er Vol1 og Vol2 best, men som det går frem av tabellen er det særdeles store kvadratavvik i denne perioden. Vi har derfor ikke lagt stor vekt på dette resultatet i valg av funksjon. I TTD2 er Vol3-funksjonen noe bedre enn de andre. Vol2 er best i TTD3.

Kvadratavvik	TTD1	TTD2	TTD3
Vol1	<b>467,57</b>	17,81	1,66
Vol2	<b>467,57</b>	17,80	<b>1,45</b>
Vol3	471,32	<b>17,77</b>	1,47

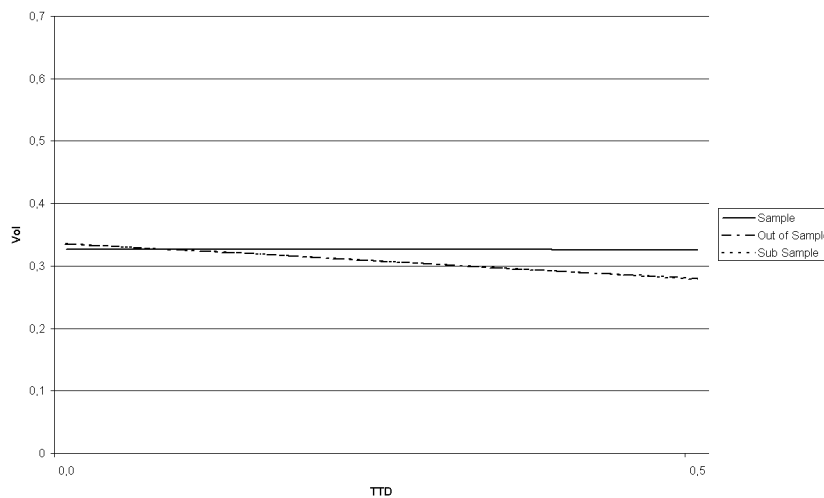
Tabell G.2: Summert kvadratavvik i out-of-sample analysen

## Grafer med volatilitetsfunksjonene

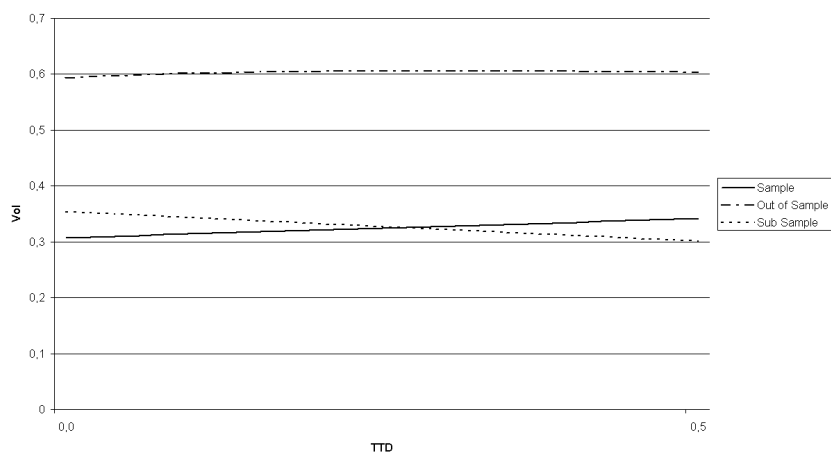
Figurene under viser optimaliserte funksjoner fra sample, sub-sample og out-of-sample analysene.



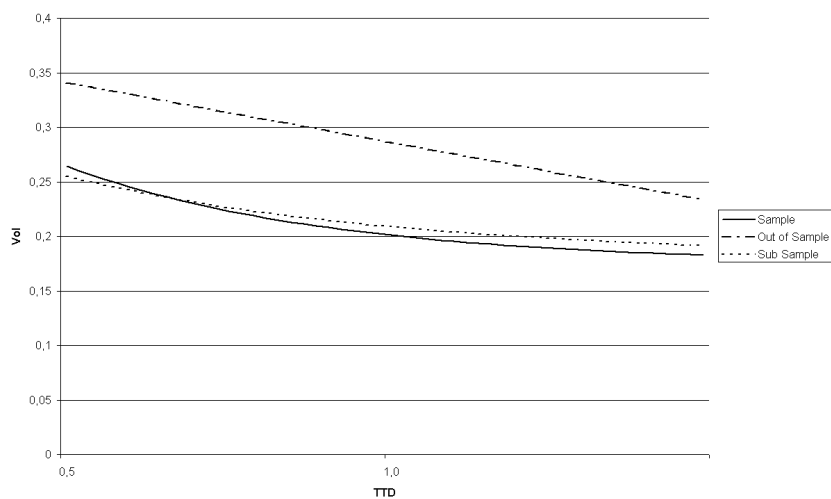
Figur G.1: Volatilitetsfunksjoner for Vol1 i TTD1



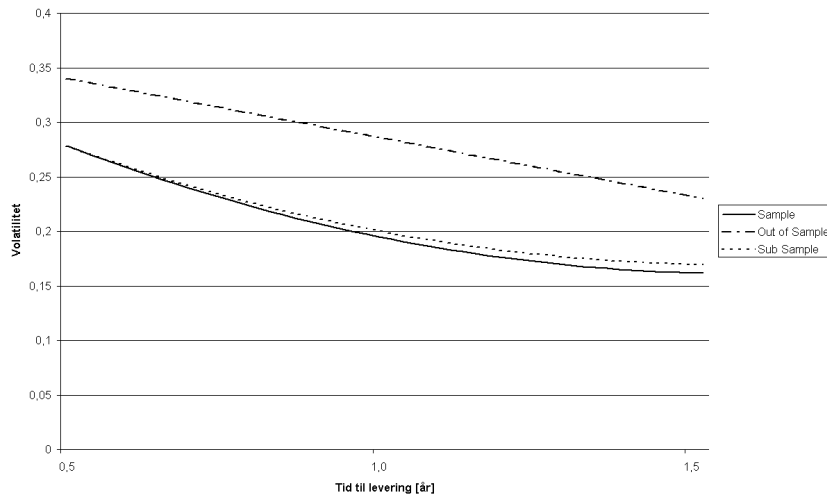
Figur G.2: Volatilitetsfunksjoner for Vol2 i TTD1



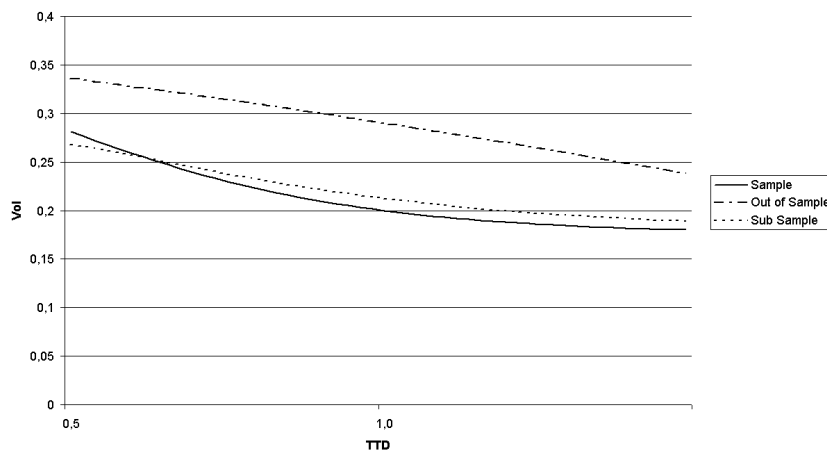
Figur G.3: Volatilitetsfunksjoner for Vol3 i TTD1



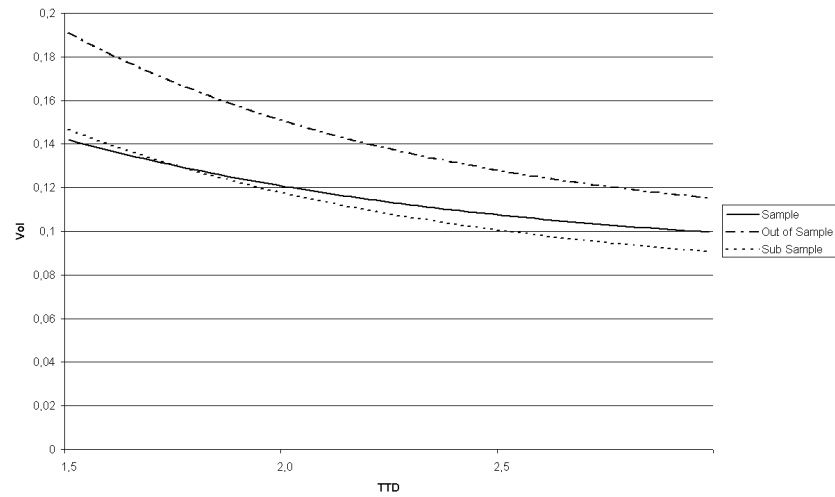
Figur G.4: Volatilitetsfunksjoner for Vol1 i TTD2



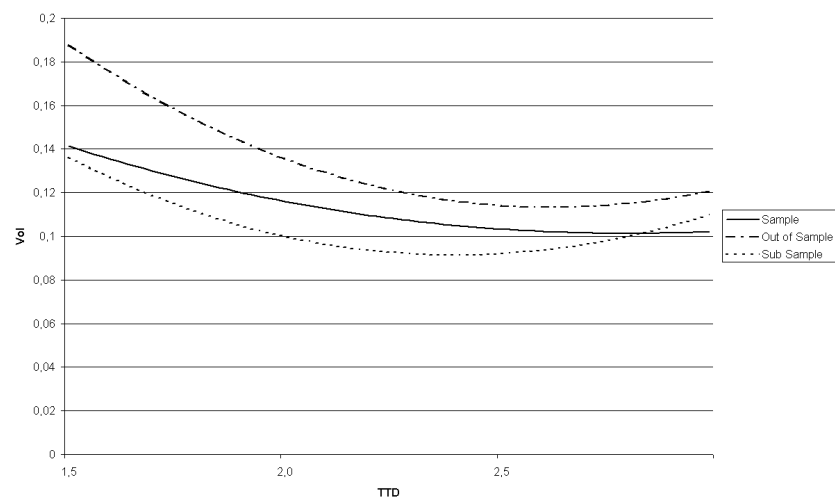
Figur G.5: Volatilitetsfunksjoner for Vol2 i TTD2



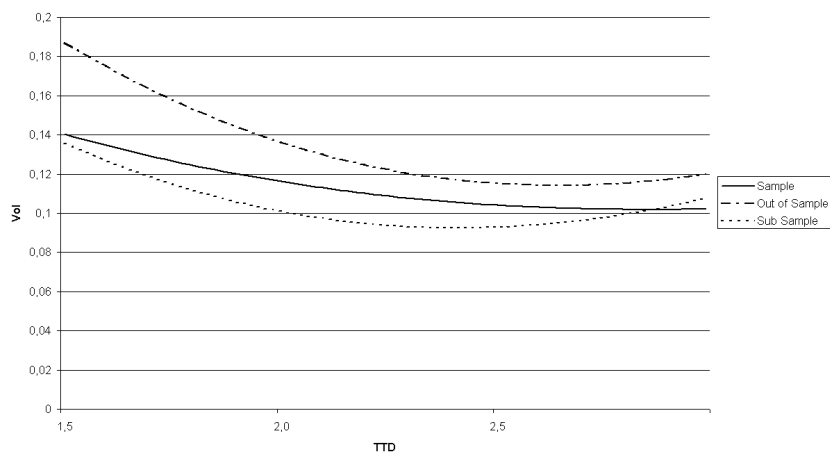
Figur G.6: Volatilitetsfunksjoner for Vol3 i TTD2



Figur G.7: Volatilitetsfunksjoner for Vol1 i TTD3



Figur G.8: Volatilitetsfunksjoner for Vol2 i TTD3



Figur G.9: Volatilitetsfunksjoner for Vol3 i TTD3

## Implisitt volatilitet

Datamaterialet for implisitt volatilitet inneholdeholder tre verdier som skiller seg sterkt fra de resterende. Disse tre verdiene er gjengitt i tabell H.1. Vi har sammenlignet disse med kumulativ historisk volatilitet og tid til levering. Basert på dette er det ingenting som tilsier at den implisitte volatiliteten skal være så høy, og vi har valgt å se bort fra disse verdiene i den videre analysen.

TTD	Implisitt vol.	Kumulativ historisk vol.
1,04	1,04	0,17
0,48	0,86	0,42
0,49	0,85	0,31

Tabell H.1: Ekstremverdier for implisitt volatilitet