

Forord

Denne prosjektoppgaven er utført ved Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, NTNU. Rapporten er utarbeidet høsten 2005 i fordypningsemnet TIØ 4700 Investering, finans og økonomistyring.

Prosjektoppgaven er utført i samarbeid med Troms Kraft. Vi vil takke vår kontaktperson, Erling Pettersen, for gode ideer og innspill. NordPool og Magdalena Nowakowska har også vært til stor hjelp gjennom tilgang til deres FTP-server. En stor takk rettes også til vår veileder på NTNU, Stein Erik Fleten, for god veiledning og presise svar.

Trondheim. 19.12.2005

Kristian Hjelset

Line Monsbakken

Sammendrag

På NordPool, den nordiske kraftbørsen, blir prisen satt sentralt for hele systemet etter at alle deltakerne har lagt inn sine bud for kjøp og salg. Men det er ikke sikkert at det er nok overføringskapasitet i systemet til at alle områdene kan få denne systemprisen. Derfor mottar produsentene en områdepris, selv om de melder inn sin produksjon mot systemprisen. I 2000 ble det opprettet contracts for differences (CfD) for å gjøre det mulig å hedge denne differansen.

I denne oppgaven er det gjort en analyse av områdeprisene for Tromskraft som oppdragsgiver. Vi har fokusert på å finne en stokastisk modell som kan beskrive områdeprisene og en modell som beskriver prisdifferansen mellom områdeprisene og systemprisen. Det har i tillegg blitt laget et program som henter informasjon fra NordPool og generer en bid-ask spread for CfD.

For områdeprisene fant vi ut at områdeprisene hadde lik fordeling som systemprisen, og dermed vil en modell som beskriver et område bra også beskrive de andre områdene godt. Denne egenskapen har gjort at vi har kunnet brukt teorier som beskriver systemprisen når vi skal beskrive områdeprisene.

Et av de største problemene med å beskrive strømpriser er sprang i pris, som gir utslag i fete haler i fordelingen. Det er to hovedmåter å behandle dette problemet på, den ene er å modellere volatiliteten og det andre er å modellere sprang. Vi valgt å prøve å utnytte det beste av begge metoder med en kombinasjon av en betinget volatilitetsmodell, en GARCH-type, og en sprangmodell, en AR-GJR-JDP-modell med sesongvariasjon. Denne kombinasjonen viste seg å gi gode resultater. Riktig nok spiser sprang modellen og GARCH modellen litt av effekten av hverandre, men de er samlet bedre enn hver for seg.

Prisdifferansen er vanskeligere å beskrive enn områdeprisen. Vi har ikke funnet artikler som omhandler modellering av differansen. Vi har funnet at differansen har ingen sesongvariasjon, den returnerer mot gjennomsnittsverdien relativt kjapt og er beskrevet av svært mange sprang. Den modellen som har beskrevet prisdifferansen best er en AR-GARCH-JDP modell.

Innholdsfortegnelse

1	Innledning.....	1
2	Det nordiske kraftmarkedet og finansielle kontrakter.....	3
2.1	Områdeprising.....	4
2.2	Motkjøp.....	6
2.3	Finansielle kontrakter i det nordiske kraftmarkedet.....	7
2.4	Hedging og bruk av CfD.....	8
3	Bid-Ask kurve i Excel.....	10
4	Modellbeskrivelser.....	14
4.1	Sesongvariasjon.....	14
4.2	Mean reversion.....	15
4.3	Autoregressive volatilitetsmodeller.....	17
4.4	Sprang og jump diffution process.....	20
4.5	Filtrering av sprang.....	21
5	Analyse.....	24
5.1	Data.....	24
5.2	Lognormalfordeling.....	27
5.3	Sesongvariasjon.....	30
5.4	AR-modellering.....	33
5.5	GARCH-modellen.....	38
5.6	Spranganalyse.....	42
5.7	Stabilitet til parametere.....	45
5.8	Sammenligning av områdene.....	47
6	Diskusjon og modellvalg.....	49
7	Konklusjon.....	54
8	Kritikk og videre arbeid.....	55
9	Referanser.....	56
	Vedlegg A –Statistikk: begreper og tester.....	i
	Vedlegg B - Antakelser i regresjonsmodeller.....	vii
	Vedlegg C – VBA-kode for filtrering.....	viii
	Vedlegg D – Ito’s lemma.....	ix
	Vedlegg E - Lévy-prosess.....	xi
	Vedlegg G - Regresjonsresultater.....	xiv

Figurliste

Figur 2-1: Skisse av området i det nordiske kraftmarkedet (Wangensteen, 2005)	3
Figur 2-2: Eksempel med to prisområder (Wangensteen, Aam, 2001).....	5
Figur 2-3: Illustrasjon av motkjøp (Wangensteen 2005)	7
Figur 3-1: Tabell med finansielle kontrakter fra NordPool.....	10
Figur 3-2: Forwardkurve for systempris	11
Figur 3-3: Forwardkurve for CfD-Oslo.....	12
Figur 3-4: Forwardkurve for områdeprisen i Oslo	12
Figur 3-5: CfD bid-ask-spread for Helsinki	13
Figur 4-1: Områdepris for Oslo i tidsperioden 1.1.1996 til 31.5.2005	14
Figur 4-2: Volatilitet for områdeprisen for Oslo, beregnet med et 30 dagers rullerende vindu	17
Figur 4-3: Forskjell på GARCH og GJR (Brooks, 2002)	19
Figur 4-4: Filtrering av sprang	22
Figur 5-1: Deskriptiv statistikk for Oslo	25
Figur 5-2: Deskriptiv statistikk for prisdifferanse Oslo - System	26
Figur 5-3: Logaritmen til områdepriser og systempris mot normalfordelingskvantiler.....	28
Figur 5-4: QQ-plott for logaritmen til prisen til Oslo mot NO2, Sverige, Finland og system. 29	
Figur 5-5: QQ-plott for prisdifferansen til Oslo mot prisdifferanse til NO2, Sverige og Finland	29
Figur 5-6: Logpris for Oslo fra 1.1.1996 til 31.5.2005	30
Figur 5-7: Sesongvariasjon for områdeprisene representert med dummyvariable	31
Figur 5-8: Sesongvariasjon for prisdifferansen mellom Norge 2 og System representert med dummyvariable og cosinusvariable.....	32
Figur 5-9: Korrelogram for Oslo	33
Figur 5-10: Korrelogram for prisdifferansen mellom Oslo og systempris.....	35
Figur 5-11: Normalitetstest av residualledd for regresjon av ligning (5.3) for områdeprisen i Oslo	37
Figur 5-12: Normalitetstest av residualledd for regresjon av ligning (5.3) for differansen mellom Oslo og system	38
Figur 5-13: Volatilitet beregnet med 30 dagers rullerende vindu for logaritmen til områdeprisen til Oslo	39
Figur 5-14: Volatilitet beregnet med 30 dagers rullerende vindu for prisdifferansen mellom systemprisen og Oslo	39
Figur 5-15: Normalitetstest for residualene i AR-GJR-modellen	40
Figur 5-16: Normalitetstest for residualene til AR-GARCH-modellen med standardavvik....	41
Figur 5-17: Normalitetstest for residualledd fra AR(1)-GJR etter filtrering av sprang for områdeprisen Oslo.....	43
Figur 5-18: Normalitetstest for sprangene som er filtrert vekk fra en AR(1)-GJR modell for områdeprisen Oslo.....	43
Figur 5-19: Normalitetstest for residualledd fra AR(1)-GARCH-M etter filtrering av sprang for prisdifferanse Oslo- system	44
Figur 5-20: Normalfordelingsstatistikk for sprangene som er filtrert vekk fra en AR(1) GARCH modell for prisdifferansen Oslo- System	45
Figur 5-21: Relativ variasjon i parametere for forskjellige dataområder for en AR(1)-GJR-sesong modell for områdepris filtrert for sprang.....	46
Figur 5-22: Relativ variasjon i parametere for forskjellige dataområder for en AR(1)-GARCH-modell for prisdifferanse filtrert for sprang	47
Figur 6-1: Oversikt over modellvalg for estimering av områdepriser	50

Figur 6-2: Oversikt over modellvalg for estimering av differansen mellom områdepris og systempris..... 52

Tabelliste

Tabell 2-1: Mottatt kontantstrøm for en produsent ved kjøp av en forward og en CfD	9
Tabell 2-2: Mottatt kontantstrøm for en produsent i en bilateral kontrakt som er sikret mot prisdifferanse	9
Tabell 5-1: Deskriptiv statistikk for områdepriser	25
Tabell 5-2: Deskriptiv statistikk for prisdifferanse mellom områdepris og systempris	26
Tabell 5-3: Augmented Dickey-Fuller-test for områdepriser og prisdifferanser	27
Tabell 5-4: Deskriptiv statistikk for logaritmen til områdeprisene	28
Tabell 5-5: Regresjonsresultater for sesongvariasjon for områdepris Oslo	31
Tabell 5-6: Korrelasjonsmatrise for områdene og systempris	31
Tabell 5-7: Regresjonsresultater for sesongvariasjon for prisdifferanse Oslo-systempris.....	32
Tabell 5-8: Korrelasjonsmatrise for differansene mellom områdepris og systempris	33
Tabell 5-9: Resultat fra EViews for AR-modeller for områdepris.....	34
Tabell 5-10: Resultater fra EViews for AR-modeller for prisdifferanse	35
Tabell 5-11: Regresjonsresultat for en Ornstein-Uhlenbeck-prosess for områdepris	36
Tabell 5-12: Regresjonsresultat for en Ornstein-Uhlenbeck-prosess for prisdifferanse	37
Tabell 5-13: Whites heteroskedastisitetstest for områdepris og prisdifferanse.....	38
Tabell 5-14: Resultater fra EViews for asymmetriske GARCH-prosesser for områdepris	40
Tabell 5-15: Resultater fra EViews for asymmetriske GARCH-modeller for prisdifferanse..	41
Tabell 5-16: Regresjonsresultat for områdeprisen til Oslo med filter.....	42
Tabell 5-17: Regresjonsresultat for differansen mellom områdeprisen til Oslo og systempris med filter	44
Tabell 5-18: Sammenligning av regresjonsverdier for områdeprisene	47
Tabell 5-19: Sammenligning av regresjonsverdier for prisdifferanser	48
Tabell 0-1: Kritisk nivå for forstørret Dickey-Fuller test.....	v

1 Innledning

Prisene på elektrisitet i det nordiske kraftmarkedet NordPool er i konstant endring. Dette skyldes blant annet sesongvariasjoner i forbruk, endring av tilsig til vannkraftverkene og generell økning av elektrisitetsforbruk. Samtidig har forbindelsen fra det nordiske markedet til resten av Europa blitt sterkere, slik at kraftprisene i sentral-Europa har en betydelig innvirkning på kraftprisene i Norden. I tillegg blir det generert ulike priser for ulike områder innen det nordiske kraftsamarbeidet. Dette kommer som følge av overføringsbegrensninger mellom de ulike områdene.

Kraftprisene på NordPool blir først satt til en systempris, det vil si en pris uten hensyn til overføringsbegrensninger. Så blir de ulike områdene priset til en verdi som tar overføringsbetraktningene med i betraktning. Forskjellen mellom systempris og områdepris utgjør en stor risiko for markedsaktørene, siden den fysiske overføringen av elektrisitet blir prissatt med områdepris, mens aktørene kun kan sikre seg med finansielle kontrakter som er referert til systempris. I 2000 ble det innført contracts for difference (CfD) i NordPool. Disse kontraktene blir brukt til å sikre mot forskjellen mellom systempris og områdepris. Referansen til en CfD er prisdifferansen mellom områdepris og systempris. CfD blir ikke handlet for området Norge 2 (NO2).

På grunn av alle faktorene som fører til endringer i elektrisitetsprisen er det viktig for aktører i det nordiske kraftmarkedet å ha et godt analyseverktøy for prisestimering, som kan fungere som en støtte for å minimere risikoen de usikre prisene medfører.

I denne oppgaven er det gjort en økonomisk analyse av kraftpriser for Troms Kraft. Troms Kraft har produksjonen sin i området NO2, og handler mot Norge 1, Finland, Sverige og litt til Russland. Det er derfor viktig for denne bedriften å finne gode estimeringsmetoder for disse prisområdene, særlig NO2, der det ikke finnes mulighet for sikring gjennom en CfD.

Problemstillingen som ble gitt av Troms Kraft var å lage en modell som estimerer områdepriser på lengre sikt. For å kunne gjøre en økonomisk analyse av kraftpriser, må man gjøre seg kjent med det nordiske kraftmarkedet og hvordan det fungerer, samt kunne bruke statistiske og økonometriske modeller i finans for estimering og prognosering av kraftpriser.

I denne oppgaven har vi sett på estimering av områdeprisene NO1, NO2, Sverige og Finland, siden det er disse områdeprisene er de som er mest aktuelle for Troms Kraft. Vi har i denne oppgaven begrenset oss til å fokusere på enkle, økonometriske modeller, som tar hensyn til

egenskaper for kraftpriser; sesongavhengighet, mean reversion og sprang. Til estimering av kraftprisene er det blitt brukt historiske data, som er tilgjengelig på NordPool sin FTP-server. Annen informasjon, som priser fra det finansielle markedet og ikke-pris informasjon, har vi ikke tatt hensyn til.

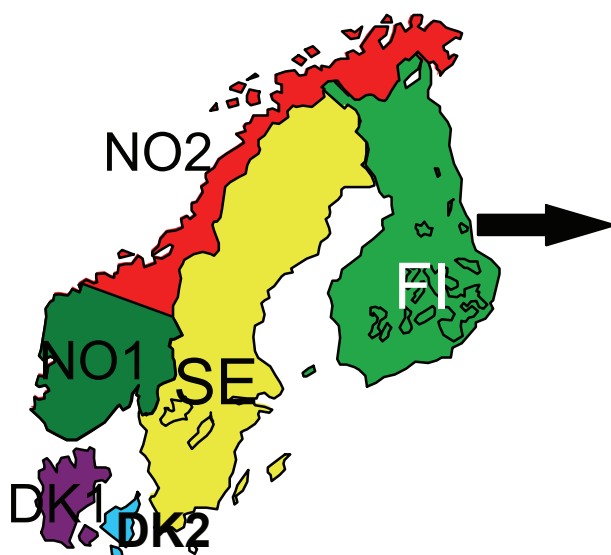
Arbeidet er blitt utført med utstrakt bruk av kvantitative metoder. Vi har brukt statistikkprogrammet EViews for estimering av de forskjellige modellene vi har funnet frem til. Dette programmet har gitt oss informasjonskriterier på hvor god modellen er tilpasset de historiske data, samt parameterverdier til modellene, og om disse parametrene er signifikante. Vi har valgt å definere en parameter som signifikant hvis denne ligger innenfor et 5 % signifikansnivå.

Informasjon om dette temaet har vi fått fra en rekke artikler som omhandler det nordiske kraftmarkedet, og hvordan estimere kraftprisene ved hjelp av redusert form-prosesser. En god støtte til forståelse og innsikt i økonometriske modeller har vært bøkene "Introductory econometrics for finance" av Brooks, 2002, og "Energy and Power: Risk Management" av Eydeland og Wolyniec, 2003.

Prosjektoppgaven vil i kapittel 2 først gi en kort innføring i det nordiske kraftmarkedet og de finansielle kontraktene som blir handlet der. Det vil så i kapittel 3 bli presentert en Excel-modell som finner Bid-Ask-spreaden i de finansielle kontraktene på NordPool. Vi vil i kapittel 4 videre beskrive særskilte egenskaper ved kraftpriser, og teorien bak de økonometriske modellene man kan bruke for å fange opp disse egenskapene. Deretter følger kapittel 5 med estimering og analyse av de forskjellige modellene, hvor de ulike resultatene blir påpekt. I siste del av oppgaven er det en diskusjon rundt de resultatene som er funnet, som resulterer i hvilken modell vi har funnet er den beste tilpasningen til de historiske data. Etter konklusjon vil det bli kritikk av arbeidet, og forslag til videre arbeid.

2 Det nordiske kraftmarkedet og finansielle kontrakter

Det nordiske kraftmarkedet er delt inn i seks prisområder, to i Norge, to i Danmark, ett i Sverige og ett i Finland. Den optimale måten å fastsette prisene i det nordiske kraftmarkedet på hadde vært ved bruk av nodeprising. Nodeprising vil si at prisen for elektrisitet på hvert sted er lik marginalkostnadene ved å fremskaffe elektrisitet på akkurat det stedet. Disse prisene angir optimal verdi av energi i hver enkelt node. Denne metoden er for omfattende og tidskrevende, og det blir mange priser å forholde seg til. Optimale nodepriser kan benyttes som referanse når man skal vurdere metoder for områdeprising (Bjørndal, Jørnsten 2001).



Figur 2-1: Skisse av området i det nordiske kraftmarkedet (Wangensteen, 2005)

I dag er det sonepriser i de seks ulike prisområdene i det nordiske kraft markedet. Sonepriser er en tilnærming til et rent nodeprissystem. Tilnærmingen innebærer at man stiller et ekstra krav til prissystemet, slik at noder som ligger innen definerte prisområder skal ha samme pris. Motkjøp blir brukt til å håndtere flaskehalser innad i områdene.

I NordPool blir det handlet både fysiske og finansielle kontrakter. De finansielle kontraktene har varighet dag, uke, måned, kvartal og år. Futures og forwards er kontrakter referert til systemprisen, mens Contracts for Difference (CfD) ser på forskjellen mellom systempris og områdepris (NordPool, 2004).

2.1 Områdeprising

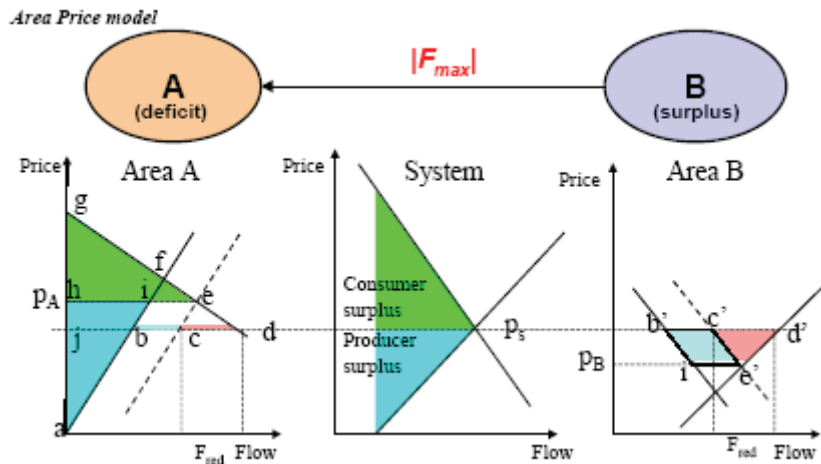
Områdeprising er et resultat av at det finnes overføringsbegrensninger, såkalte flaskehals, i det nordiske kraftnettet. Hadde det ikke vært overføringsbegrensninger i kraftnettet, ville hele det nordiske området fått en og samme pris, systemprisen. På grunn av flaskehals har man valgt å innføre områdeprising. Norge er delt opp i to prisområder, og skillet mellom disse går over Dovrefjell. Over fjellet er det begrenset med kraftledninger, og det har dannet seg en naturlig flaskehals der. De andre prisområdene i det nordiske kraftmarkedet følger landegrensene, Danmark er delt i to med Jylland og Sjælland som hvert sitt prisområde.

Det kan også oppstå flaskehals innad i de definerte områdene. Disse flaskehalsene er midlertidige, det vil si at flaskehals kan dukke opp over alt i området, med ulik varighet.

For å løse flaskehals innad i de definerte prisområdene bruker man motkjøp. Motkjøpsprinsippet går ut på at systemoperatøren kjøper oppregulering og/eller nedregulering hos produsenter og forbrukere for å redusere overføring over flaskehalsene¹. Motkjøp som skal benyttes internt i prisområdene, og for mer kortvarige kapasitetsproblemer, innebærer en bedriftsøkonomisk kostnad for systemoperatøren, som dermed har insentiver til å benytte spotmarkedet også for kapasitetsproblemer internt i prisområdene (Bjørndal og Jørnsten, 2001). Dette kan gjøres ved å endre kapasitetene på snittene mellom prisområdene, slik at kapasitetsbegrensninger innad i områdene overholdes. Dette er en ”indirekte” styring av flaskehals (Bjørndal og Jørnsten, 2001).

Systemprisen, felles kraftpris for hele det nordiske området gitt ingen overføringsbegrensninger, blir satt på grunnlag av tilbud og etterspørsel. Hvis kraftmengden som blir utvekslet overskrider overføringsbegrensningene, blir prisområdene dannet, på hver sin side av flaskehalsen. Flaskehalskostnader er definert som differansen i samfunnsøkonomisk overskudd i ubegrenset lastflyt og samfunnsøkonomisk overskudd i den realiserte markedslikevekt (Bjørndal og Jørnsten, 2001). I et tilfelle med to definerte områder er overskuddsområdet det området med laveste pris, og underskuddsområdet det området med høyeste pris. Utvekslingen mellom områdene er bestemt av overføringskapasiteten på kraftnettet som forbinder disse. To nye områdepriser blir bestemt på bakgrunn av tilbud og etterspørsel i hvert område, og den maksimale overføringskapasiteten. Overbelastning i overføringen mellom to områder fører til en høyere pris i underskuddsområdet. Dette vil redusere etterspørselen. I tillegg vil det bli en lavere pris i overskuddsområdet, som øker etterspørselen i dette området.

¹ Se kapittel 1.3 om motkjøp



Figur 2-2: Eksempel med to prisområder (Wangensteen, Aam, 2001)

I eksemplet med to prisområder (Wangensteen og Aam, 2001) i Figur 2-2 er tilbud og etterspørsel i de to områdene A og B summert opp til priskrysset i midten, som angir systemprisen p_s . De heltrukne strekene i hvert område er de opprinnelige tilbuds- og etterspørselskurvene. Linjen b-d er behovet for utvekslingskapasitet hvis hele markedet skal ha systempris p_s . Den prikkete linjen i område A er det totale tilbudet inkludert tilbud fra område B når tilgjengelig overføringskapasitet er benyttet. Denne nye tilbudskurven øker områdeprisen i A fra p_s til p_A . Konsument- og produsentoverskuddet i markedet med ubegrenset lastflyt er merket av på figuren i midten. I område A vil konsumentoverskuddet, referert til p_s , være trekanten 'jdg'. Når områdeprisen p_A er kalkulert, vil konsumentoverskuddet minke til trekanten 'heg'. På den andre siden, produsentoverskuddet, som med systempris p_s er trekanten 'abj', vil med områdepris p_A øke til trekanten 'aih'. Reduksjon av samfunnsøkonomisk overskudd i område A på grunn av overføringsbegrensninger er parallellogrammet 'bcei', i tillegg til trekanten 'ced'. Parallellogrammet representerer det ekstra tilbudet fra område B, mens trekanten er den samfunnsøkonomiske tapet ved å ikke ha nok overføringskapasitet. En lignende tankegang på område B resulterer i at det samfunnsøkonomiske tapet er trekanten $c'd'e'$. Arealet av trekantene er $\frac{1}{2} (p_s - p_A) F_{red}$ og $\frac{1}{2} (p_s - p_B) F_{red}$, hvor F_{red} er reduksjonen i overføring i forhold til den ubegrensede lastflyten. De to trekantene til sammen er altså systemets flaskehalskostnader.

En markedsklarering i et områdeprissystem vil kunne følge en prosess omtrent som beskrevet under (Bjørndal, Jörnsten, 2001):

1. Man ser bort fra begrensninger i nettet, og markedet klareres basert på anmeldte bud. Dette frembringer systemprisen p .
2. Hvis den lastflyt som følger medfører kapasitetsproblemer i nettet, deles nettet inn i prisområder. Hvis vi antar at to soner defineres, vil sonen med netto innlevering kalles lavpris-området, og sonen med netto uttak kalles høypris-området.

3. Netto overføring mellom områdene reduseres slik at kapasitetsbegrensningene i nettet overholdes.
4. Hvert prisområde klareres så separat, dette gir en pris i hvert område, p_l er prisen i lavpris-området, og p_h prisen i høyprisområdet. Hvis lastflyt i markedslukevekten som følger fremdeles medfører kapasitetsproblemer, gjentas prosessen fra steg 3. Hvis nye begrensninger brytes, gjentas prosessen fra steg 2., og nye områder kan bli dannet.

Nettinntekten (fra kapasitetsavgifter) er lik prisdifferansen multiplisert med overføringen mellom områdene.

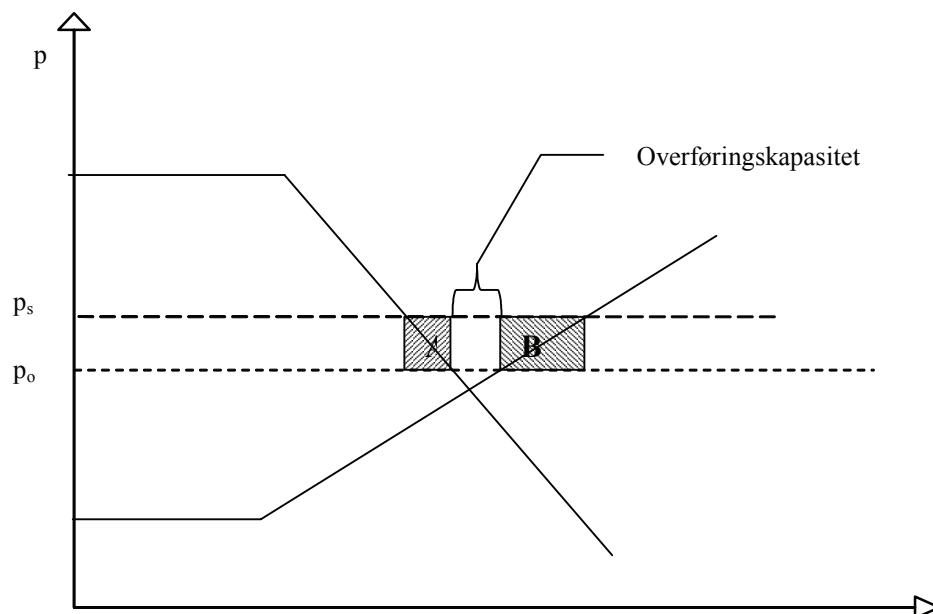
2.2 Motkjøp

Et alternativ til områdeprising er motkjøp. Dette brukes også til å håndtere overbelastninger innad i områdene på NordPool. Dette foregår på regulerkraftmarkedet i Norge og på balansemarkedet i Sverige. Det baserer seg på at systemoperatør (SO) kjøper/selger kapasitet eller forbruk² slik at overføringslinjene ikke blir overbelastet. Bjørndal m.fl. (2003) har beskrevet prosessen slik:

1. Systempris settes på vanlig måte som priskryss mellom tilbud og etterspørsel i markedet
2. SO sjekker om det blir nettbegrensninger for de overføringene som trengs for å oppfylle systemprisen, og hvor en må redusere eller øke produksjon eller forbruk
3. Økninger/reduksjoner blir implementert i separate markeder (regulerkraftmarkedet)
4. SO velger rimeligste bud for økning eller reduksjon

Motkjøp medfører en kostnad for SO siden de må betale produsenter for å øke produksjon og betale konsumenter for å redusere forbruk. Dette er illustrert i Figur 2-3 for et overskuddsområde. Område A er SO sine kostnader ved å kjøpe reduksjon hos konsumentene, og område B er kostnadene til SO ved å kjøpe økt produksjon. Dette blir videreført til konsumentene gjennom nettariffer. De konsumentene og produsentene som ikke blir berørt av reguleringen ser spotpris.

² Det er vanskelig å øke forbruket, men store forbrukere som kraftkrevende industri kan redusere sitt forbruk i topplastsituasjoner.



Figur 2-3: Illustrasjon av motkjøp (Wangensteen 2005)

2.3 Finansielle kontrakter i det nordiske kraftmarkedet

De finansielle kontraktene i det nordiske kraftmarkedet er futures, forwards og contracts for difference, CfD. Referanseprisen for finansielle kontrakter er systemprisen. Det er ingen fysisk overføring for finansielle kontrakter i kraftmarkedet, men kontantoppgjøret blir gjort opp gjennom hele leveringsperioden, med begynnelse på starttidspunktet til hver kontrakt (NordPool, 2004). Finansielle kontrakter blir inngått uten tanke på de tekniske begrensningene, som overføringskapasitet og tilgang til kraftproduksjon. Finansielle kontrakter har blitt laget for å tilfredsstille behov fra forskjellige markedsaktører (NordPool, 2004):

1. Produsenter og sluttbrukere som vil bruke kontraktene som verktøy for risikostyring (hedging)
2. Tradere som vil profitere av volatiliteten i kraftmarkedet, og som vil bidra til høy likviditet og handelsvirksomhet

NordPool har 25 % markedsandel i finansielle kontrakter (Fleten og Lemming, 2003). Tre fjerdedeler foregår "over the counter", altså mellom kjøper og selger utenom NordPool.

Futures og forwards

Futures og forwards skiller seg fra hverandre på lengden av kontraktene og hvordan betalingen blir utført gjennom handelsperioden. Futureskontrakter har daglige markedsoppgjør i kontraktens handels- og leveringsperiode, med utgangspunkt i endringer i kontraktens markedspris. Gjennom hele perioden blir partene kreditert eller debiteret et beløp som er lik differansen mellom prisen på spotmarkedet og sluttprisen på futureskontrakten. For forwardkontrakter er det ikke noe kontantoppgjør før starten av leveringsperioden

(Kristiansen, 2004). Markedsoppgjør blir beregnet, som daglig gevinst eller tap, men blir ikke kreditert eller debiteret under handelsperioden.

Kontraktene med kortest leveringsperiode er futureskontraktene. Daglige futures med leveringsperiode på 24 timer kan handles innen en uke før leveringsstart. Ukentlige futureskontrakter med leveringsperioder opp til 168 timer kan handles 4-8 uker før levering.

Forwardkontraktene har lengre leveringsperioder, blant annet månedskontrakter. Året har til nå vært delt opp i tre sesonger, V1, S0 og V2. I januar hvert år kunne man handle kontrakter for S0 og V2, samt alle sesonger for de neste to årene. Fra 2006 vil året være delt opp i kvartaler, Q1, Q2, Q3 og Q4. Årlige forwardkontrakter er tilgjengelig for de tre neste årene. Kontraktene som blir handlet mest er ukentlige futureskontrakter og de to nærmeste sesongkontraktene på forwardmarkedet (NordPool, 2004).

Contracts for Difference

Referanseprisen for futures og forwards er systemprisen, selv om den virkelige fysiske overføringen vil bli prissatt med områdepris. contracts for difference (CfD) har blitt lansert for å ha mulighet til en hedge elektrisitetsprisen, selv om kraftmarkedet er delt inn i flere områder med ulike priser. CfD blir brukt for å sikre mot forskjellen mellom de to usikre prisene områdepris og systempris (Kristiansen, 2004).

En CfD er en forwardkontrakt med referanse til prisforskjellen mellom systempris og områdepris. Markedsprisen for en CfD gjenspeiler markedets forventning om denne prisforskjellen. Markedsprisen for en CfD kan være positiv, negativ eller null. Er prisen positiv, vil det si at markedet forventer at områdeprisen vil være høyere enn systemprisen, altså at området vil være en netto importør av kraft. Er prisen negativ, forventer man at områdeprisen vil være lavere enn systemprisen, og at området vil være en netto eksportør (NordPool, 2004). CfD-kontrakter finnes for områdene NO1 (Oslo), Sverige, Finland og Danmark 1 og 2 i det nordiske kraftmarkedet.

2.4 Hedging og bruk av CfD

Følgende kapittel er basert på kapittel 4 i Kristiansens doktoravhandling fra 2004. For å illustrere hvordan hedging ved bruk av CfD fungerer bruker vi to områder, A og B, med hver sin områdepris, AP_i , og en systempris SP . Prisen for en forward er p_f og for en CfD er prisen p_{CfD} . Betalingen av en nordisk CfD³ med kvantum Q_s er:

$$CfD = Q_s (AP_i - SP) \quad (2.1)$$

For å lage en perfekt hedge som inkluderer risikoen når områdeprisene ikke er lik systemprisen, må man bruke CfD (NordPool, 2004):

³ En nordisk CfD er forskjellig fra en britisk CfD, som refererer systemprisen til en referansepris.

1. Hedge det gitte volum ved bruk av en forwardkontrakt
2. Hedge prisdifferanse for enhver pris, for samme periode og volum, gjennom en CfD
3. Uføre fysisk overføring ved handel med områdepris for det området aktøren befinner seg i

For en produsent i område A vil kontantstrømmen for å sikre seg bli som beskrevet i Tabell 2-1. Produsenten vil være perfekt sikret siden han mottar et fast beløp i hele perioden. Konsumenten i område B vil sikre sin pris mot systempris på samme måte.

	Forward marked	CfD	Døgnmarkedet	Total kontantstrøm
Produsent mottar:	$Q_s p_f$	$Q_s p_{CfD}$	$Q_s AP_A - Q_s SP$ $-Q_s (AP_A - SP)$	$Q_s (p_f + p_{CfD})$
Konsument betaler:	$Q_s p_f$	$Q_s p_{CfD}$	$Q_s AP_B - Q_s SP$ $-Q_s (AP_B - SP)$	$Q_s (p_f + p_{CfD})$

Tabell 2-1: Mottatt kontantstrøm for en produsent ved kjøp av en forward og en CfD

Et alternativt eksempel er at en produsent i område A ønsker å selge til en konsument i område B til en pris p_c som vist i Tabell 2-2. Produsenten må betale for kostnader ved forskjellige områdepriser. En kan sikre dette ved å konstruere en syntetisk transmisjonskontrakt (FTR) ved bruk av CfD. Dette blir gjort ved å kjøpe en CfD i leveranseområdet (B) og selge en i produksjonsområdet (A). Betalingen blir summen av ligning (2.1) for de to kontraktene:

$$FTR = (AP_B - SP) - (AP_A - SP) = AP_B - AP_A \quad (2.2)$$

Resultatet er at produsenten blir perfekt sikret mot forskjellige områdepriser til en kostnad lik $Q_s (AP_B - AP_A)$.

	CfD	Bilateral kontrakt	Døgnmarkedet	Total kontantstrøm
Produsent mottar:	$-Q_s p_{CfDB} + Q_s p_{CfDA}$	$Q_s p_c$	$Q_s (AP_A - AP_B)$ $+Q_s (AP_B - AP_A)$	$Q_s p_c - Q_s p_{CfDB}$ $+Q_s p_{CfDA}$

Tabell 2-2: Mottatt kontantstrøm for en produsent i en bilateral kontrakt som er sikret mot prisdifferanse

3 Bid-Ask kurve i Excel

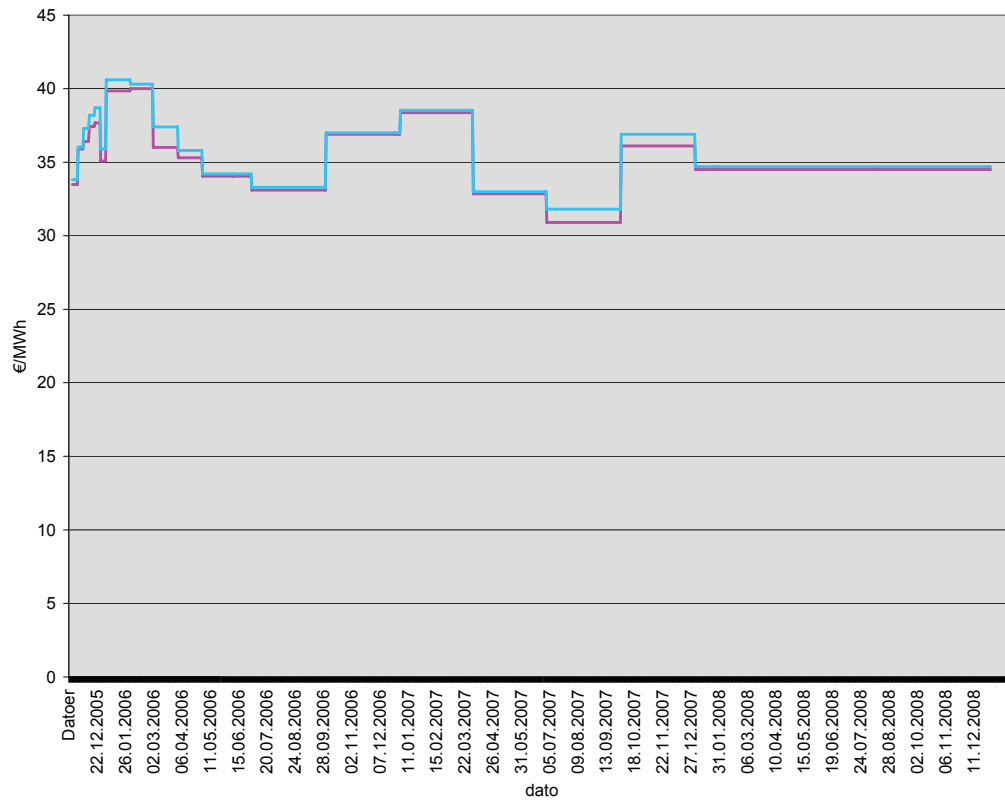
NordPools internettsider inneholder oppdatert informasjon om priser på finansielle kontrakter. Forwardkontrakter inneholder viktig informasjon om hva markedet mener utveksling er verdt i fremtiden, og sammen med historiske data kan dette gi en kraftfull estimering av fremtidige priser (Cortazar mfl. 2000). Vi har derfor valgt å lage en Excelmodell som henter data fra NordPool. Vi har brukt importfunksjonen i Excel for å importere data fra en tabell på internettsidene til NordPool, som er vist i Figur 3-1. Prisene som blir hentet er i Euro, selv om det er prisene i NOK som blir oppdatert oftest. Euro er valgt siden etter 1.1.2006 vil alle kontraktene være notert i Euro og ikke NOK.

NORD POOL		Spot Market				Financial Market							
About Nord Pool		Updated at hour: 15:51:33											
Messages		Options 08:00 - 15:30 Fwd/Fut in Euro											
Market data		Product	Curr. Hours	Best buyer	Best seller	Last traded	Change close	MW traded	Highest traded	Lowest traded	Closing price	Open interest	
Futures													
Day													
ENOD1211-05		NOK	24	201.25	208.00	-	4.63	-	-	-	204.63	0	
ENOD1311-05		NOK	24	180.00	190.00	-	-2.50	-	-	-	185.00	0	
ENOD1411-05		NOK	24	150.00	215.00	-	-	-	-	-	182.50	0	
ENOD1511-05		NOK	24	-	-	-	-	-	-	-	228.95	0	
ENOD1611-05		NOK	24	-	-	-	-	-	-	-	228.95	0	
ENOD1711-05		NOK	24	-	-	-	-	-	-	-	228.95	0	
ENOD1811-05		NOK	24	-	-	-	-	-	-	-	228.95	0	
ENOD1911-05		NOK	24	-	-	-	-	-	-	-	228.95	0	
ENOD2011-05		NOK	24	-	-	-	-	-	-	-	228.95	0	
Weeks													
ENOW46-05		NOK	168	227.00	228.00	227.00	-5.55	263.0	233.00	233.00	227.00	228.95	1474
ENOW47-05		NOK	168	252.75	255.50	253.00	-5.50	233.0	233.0	258.50	251.00	253.00	1251
ENOW48-05		NOK	168	268.75	271.00	268.75	-6.00	115.0	275.00	275.00	268.00	268.50	411
ENOW49-05		NOK	168	279.00	284.50	283.00	-2.50	40.0	284.00	283.00	283.00	283.00	64
ENOW50-05		NOK	168	284.00	290.25	-	-5.50	-	-	-	-	286.13	95
ENOW51-05		NOK	168	288.00	294.25	-	-3.62	-	-	-	-	290.13	59
Forwards													
Month													
ENOMDEC-05		NOK	744	282.50	283.00	282.50	-4.00	232.0	285.50	279.75	282.00	3166	
ENOMJAN-06		EUR	744	40.00	40.65	40.10	-0.16	20.0	40.10	39.90	40.10	1304	
ENOMFEB-06		EUR	672	39.15	40.65	40.20	-0.05	18.0	40.20	39.90	40.10	1235	
ENOMMAR-06		EUR	743	36.30	36.90	-	-0.07	-	-	-	36.53	359	
ENOMAPR-06		EUR	720	34.90	36.40	-	-0.07	-	-	-	35.73	388	
ENOMMAY-06		EUR	744	33.51	34.89	34.90	-0.15	2.0	35.00	34.90	34.20	0	
Quarter													
ENOQ1-06		EUR	2159	39.02	39.05	39.02	-0.20	310.0	39.30	38.55	38.90	7428	
ENOQ2-06		EUR	2184	34.55	34.65	34.55	-0.02	23.0	34.60	34.40	34.48	2150	
ENOQ3-06		EUR	2208	33.30	33.60	33.25	0.00	4.0	33.30	33.25	33.45	1473	
ENOQ4-06		EUR	2209	36.90	37.20	-	0.03	-	-	-	37.03	2468	
ENOQ1-07		EUR	2168	38.25	39.00	-	0.03	-	-	-	38.52	1030	

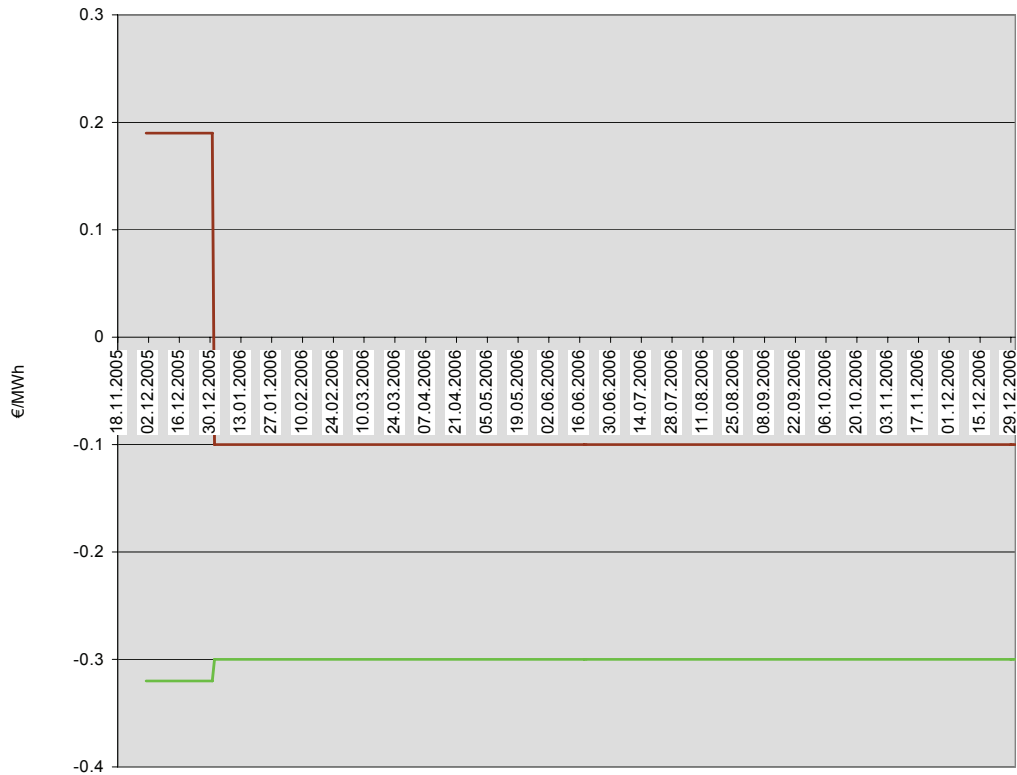
Figur 3-1: Tabell med finansielle kontrakter fra NordPool.

Et av problemene ved å lage en slik modell er at antall dagskontrakter varierer fra hvilken dag i uken det er. Dagskontraktene er ofte notert fram til neste søndag. Dette gjør at vi måtte lage en makro som tar hånd om denne variasjonen og samtidig forandrer kontraktene fra en swap

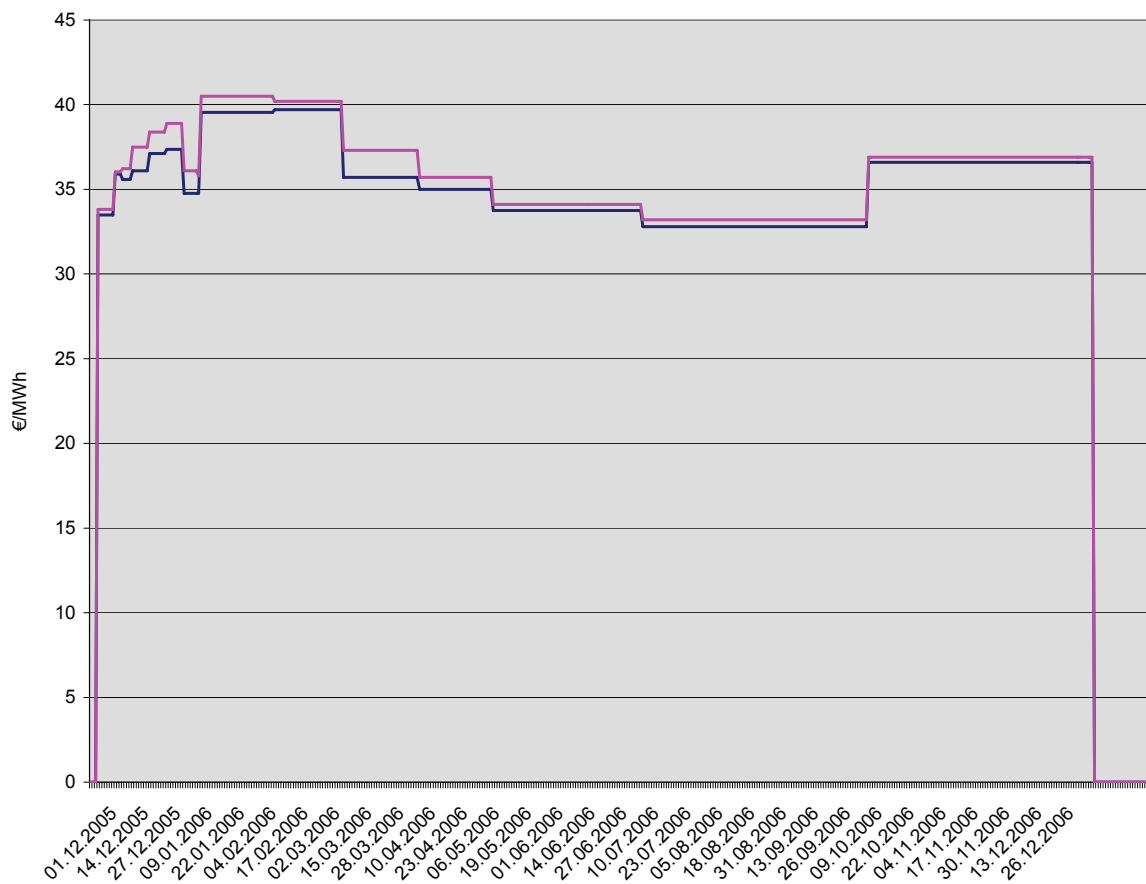
til en forward for hver dag i kontraktperioden. Figur 3-2 viser forwardkurven for systemprisen. Figur 3-3 viser forwardkurven for en CfD for Oslo, og Figur 3-4 er en addisjon av Figur 3-2 og Figur 3-3. Det er generert tilsvarende figurer for de andre områdeprisene.



Figur 3-2: Forwardkurve for systempris

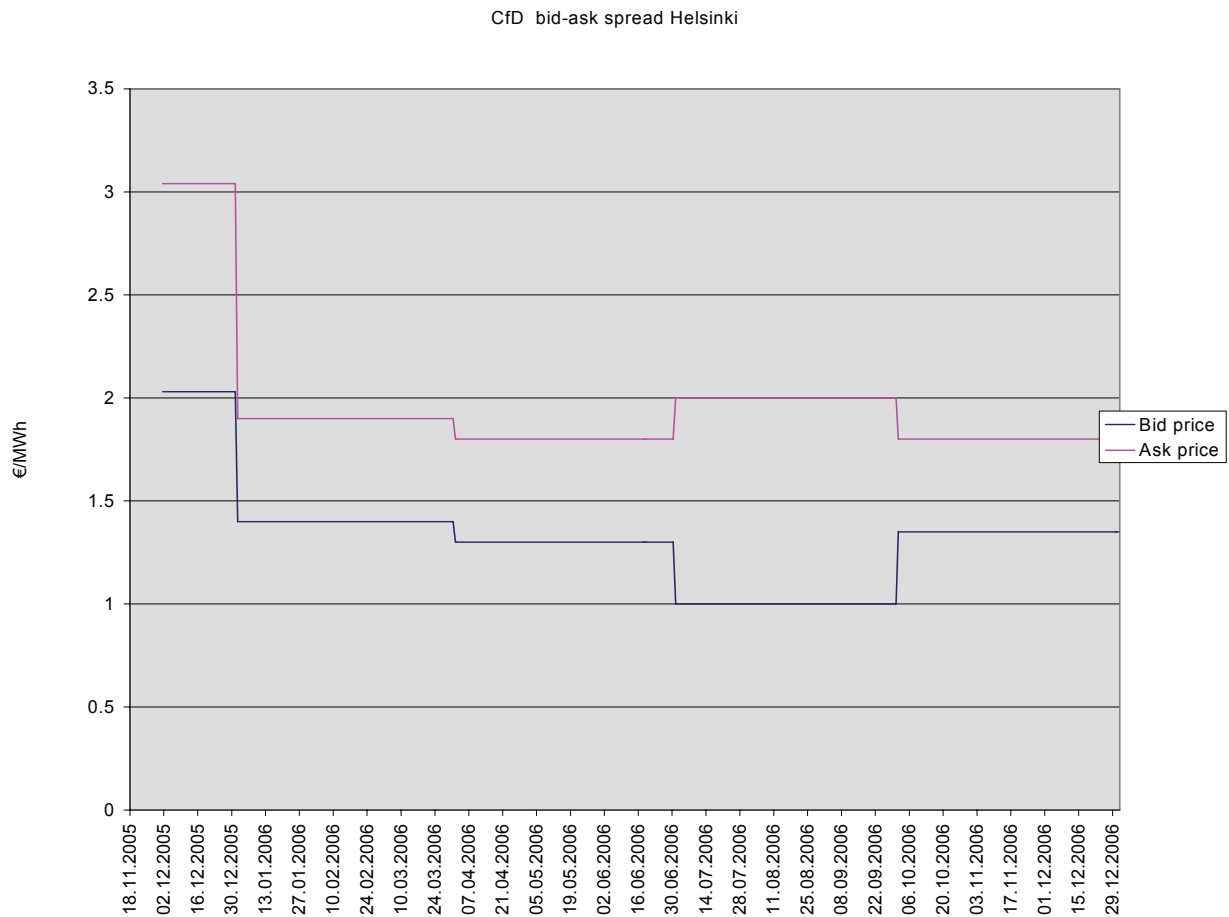


Figur 3-3: Forwardkurve for CfD-Oslo



Figur 3-4: Forwardkurve for områdeprisen i Oslo

Et annet problem med CfD-kontraktene er at de har lav likviditet. Dette er CfD-kurven for Helsinki i Figur 3-5 et tydelig tegn på. Tilbudsprisen går ned samtidig som etterspørselsprisen går opp, slik at bid-ask spreaden blir mye større. Dette er et tegn på at det er få som handler kontraktene, fordi det ikke er noen konkurranse som driver spreadprisen ned. En ser også fra informasjonen på NordPool at det er ingen kontrakter som er handlet for den perioden hvor det er en økning i spreaden.

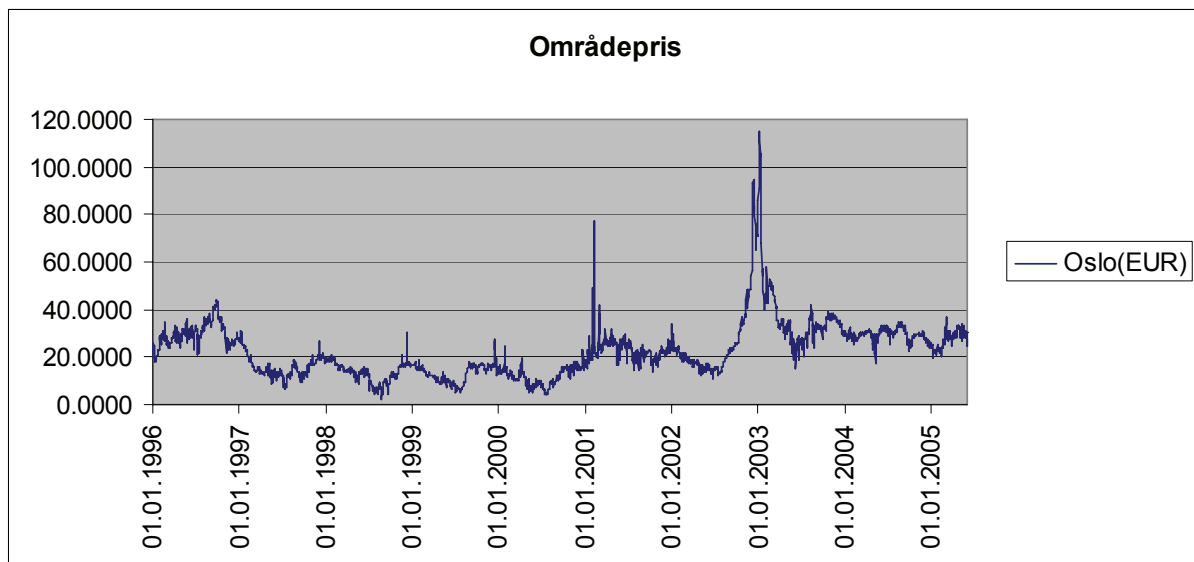


Figur 3-5: CfD bid-ask-spread for Helsinki

4 Modellbeskrivelser

4.1 Sesongvariasjon

I NordPool-området er forbruket av elektrisitet preget av sesongvariasjoner over året. Forbruket er størst i vinterhalvåret, på grunn av lave temperaturer og bruk av elektrisitet til oppvarming i bygg og boliger. Tilsiget til vannmagasinene er også sesongavhengige. Tilsiget er størst i sommerhalvåret, mens om vinteren er det lite tilsig til magasinene. Kombinasjonen av høyt forbruk og lavt tilsig om vinteren og tilsvarende lavt forbruk og høyt tilsig om sommeren fører til sesongvariasjoner i elektrisitetsprisene. I tillegg blir denne effekten forsterket ved at det ikke er mulig å lagre elektrisitet (Popova, 2004). I Figur 4-1 kan man se sesongvariasjonen ved at prisene er normalt høyere i vinterhalvåret enn i sommerhalvåret. Dette gir et behov for å modellere sesongvariasjon.



Figur 4-1: Områdepris for Oslo i tidsperioden 1.1.1996 til 31.5.2005

Lucia og Schwartz (2001) presenter to forskjellige metoder for å bestemme en faktor som beskriver sesongvariasjonen, ψ . Den første metoden er å definere en binær dummyvariabel δ_i for hver måned. Dette gir følgende formulering:

$$\psi = \sum_{i=Jan}^{Des} \alpha_i \delta_i \quad (4.1)$$

hvor

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{for } i \text{ lik måned } i \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (4.2)$$

og α_i er en konstant som beskriver sesongvariasjonen i måned i . Den andre metoden er å lage en cosinusfunksjon som beskriver variasjonen. Det gir følgende modell:

$$\psi = \gamma \cos\left(\left(t + \tau\right) \frac{2\pi}{365}\right) \quad (4.3)$$

hvor γ og τ er parametere som må estimeres. I følge Lucia og Schwartz er den første modellen dårlig for uregelmessigheter og ved frekvente data, men denne metoden er den enkleste.

4.2 Mean reversion

Siden etterspørsel og vanntilførsel er sykliske i perioder på et år, er mean reversion sagt å være den beste metoden for å modellere energipriser (Pilpovic, 1998). I praksis impliserer mean reversion at prissvingninger på kort sikt vil konvergere til en likevekt på lang sikt. Denne konklusjonen er i tråd med virkeligheten, en høy energipris vil tillate produsenter med en høy marginalkostnad å gå inn i markedet, noe som resulterer i økende tilbud og lavere priser. Dette gjelder også omvendt, at lave priser vil tvinge de samme produsentene ut av markedet, og gjennom dette begrense tilbudet slik at prisene øker.

I energimarkeder er det ofte etterspørselen som driver prisene. Med økt etterspørsel vil det bli behov for å sette i gang dyrere produksjonsmetoder. På lang sikt vil det derfor være insentiv til å bygge ut mer produksjon av billigere alternativ og overføringskapasitet til andre områder. Dette vil stabilisere prisen. Med denne begrunnelsen kan man si at det er en vanlig antagelse at strømprisene er mean reverting. I tillegg er været en viktig driver av forbruket, og siden temperaturen er mean reverting vil da også strømprisene være det (Escribano m.fl., 2002).

Hvis det er en stor og voksende forskjell mellom systempris og områdepris vil nettselskapet ha insentiver til å bygge ut ny kapasitet, dermed vil differansen gå mot en likevekt mellom utbyggingskostnader og inntekter for nettselskapet. Derfor er det en mulig antagelse at differansen mellom områdepris og systempris også er mean reverting.

Det er ofte vanlig at råvarepriser går mot en likevektspris, som følger utviklingen til likevekten mellom tilbud og etterspørsel. For å modellere for denne effekten kan en GBM-prosess modifiseres med et autoregressivt ledd, $\ln(S)$ (Schwartz, 1997):

$$dS = \kappa(\mu - \ln S)Sdt + \sigma Sdz \quad (4.4)$$

Ved å definere $X = \ln S$ (Lucia og Schwartz, 2001), og Ito's Lemma⁴, kan logprisene bli karakterisert som en Ornstein-Uhlenbeck-prosess (OU):

⁴ Se vedlegg D

$$dX = \kappa(\alpha - X)dt + \sigma dz$$

$$\alpha = \mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa} \quad (4.5)$$

hvor κ måler hvor fort prosessen går tilbake til gjennomsnittet og α er langsiktig gjennomsnitt for logprisen. For at man skal få mean reversion må $\kappa < 1$, hvis ikke vil man få en vekst i gjennomsnittet (Eydeland og Wolyniec, 2003). Hvis $\kappa > 1$, så har man en eksplosiv vekst. Man analyserer gjerne logprisen X i stedet for prisen S , siden dette ofte gir bedre regresjonssvar⁵. Det er ikke tatt med convenience yield i ligningen, siden kraft ikke kan lagres, og dermed har begrepet ingen betydning (Eydeland og Wolyniec, 2003).

En mer generell modell for mean reversion er autoregressive modeller, som kan ta med flere ledd av foregående verdier til den avhengige variabelen. En AR-modell er altså en modell hvor dagens verdi til en variabel avhenger av verdiene som variabelen tok i tidligere perioder, pluss et residualledd (Brooks, 2002). En AR(p)-modell kan skrives som:

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t \quad (4.6)$$

hvor ϕ er parametere til modellen som estimeres ved regresjon, μ er en konstant og u_t er hvit støy. En AR-modell er mean reverting hvis parametrene for de foregående verdiene av den avhengige variabelen er mindre enn 1. Det er verdt å merke seg at OU er lik en AR(1)-modell med κX som det autoregressive leddet.

Ved hjelp av en AR-prosess kan man finne ut om dataserien man analyserer er stasjonær. Autokorrelasjonsfunksjonen (acf) finner korrelasjonskoeffisienten for verdier av serien som er k perioder fra hverandre. Den partielle autokorrelasjonsfunksjonen (pacf) måler korrelasjonen mellom en observasjon k perioder siden og dagens observasjon, altså korrelasjonen mellom y_t og y_{t-k} , etter å ha fjernet påvirkningen fra $y_{t-k+1}, y_{t-k+2}, \dots, y_{t-1}$. For en AR-modell som er stasjonær vil autokorrelasjonsfunksjonen avta geometrisk til null. Antallet signifikante verdier for den partielle autokorrelasjonsfunksjonen vil være lik antallet lag i AR-modellen.

En ARMA-modell kombinerer en autoregressiv (AR) prosess med en prosess med bevegelig gjennomsnitt (moving average, MA). En MA-prosess er den enkleste formen for tidsseriemodeller. En MA-modell er en lineær kombinasjon av hvit støy-prosesser (Brooks, 2002), og formelen for en MA(1)-prosess ser slik ut:

$$y_t = \mu + \theta u_{t-1} + u_t \quad (4.7)$$

hvor u_t er en tilfeldig variabel med $E(u_t) = 0$ og $\text{var}(u_t) = \sigma^2$, μ er gjennomsnittet av dataserien og θ er en parameter som estimeres ved hjelp av regresjon.

Ved å kombinere en slik MA-prosess med en AR-prosess får man en ARMA(p,q)-prosess. En slik modell gjør at verdien til en serie avhenger lineært av sin egen foregående verdi samt en

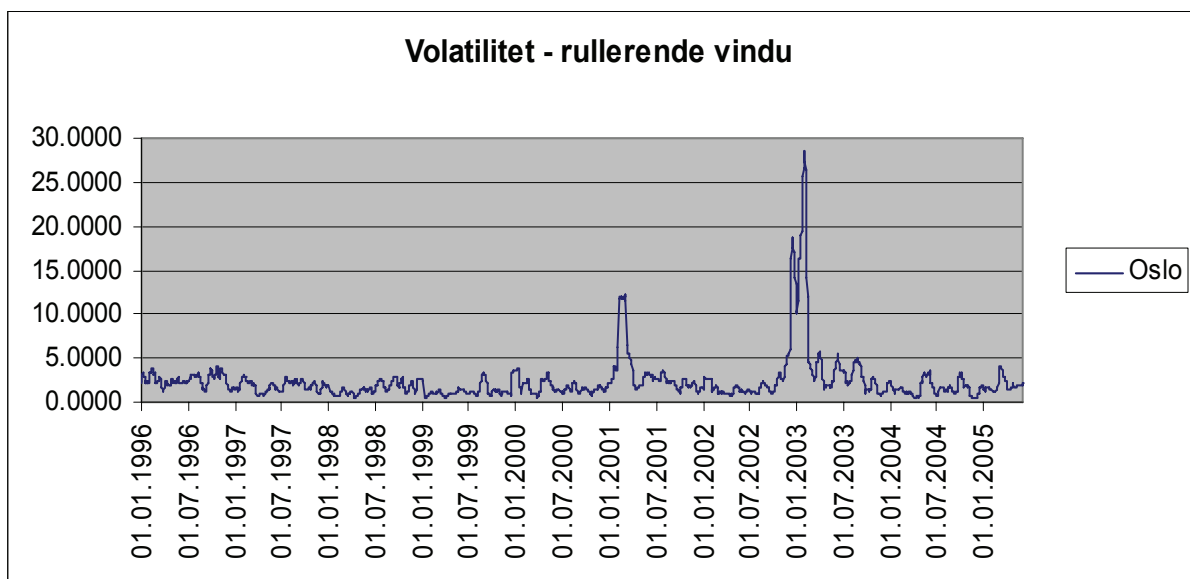
⁵ Se kapittel 5.2

kombinasjon av residualleddet og det foregående residualleddet, gitt ved hvit støy. Modellen kan skrives som:

$$y_t = \mu + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q} + u_t \quad (4.8)$$

4.3 Autoregressive volatilitetsmodeller

Endringer i elektrisitetsprisen er stokastiske, og volatiliteten gir en indikasjon på størrelsen til disse endringene. Ut i fra Figur 4-2 ser man at prisene varierer, både sesongavhengig, og også i størrelse fra år til år. Standardavvikene av de daglige endringene i logaritmen til prisen er funnet til å være 0,099 i tidsrommet 1993 til 1999 for elektrisitetsprisene på NordPool, noe som tilsvarer en volatilitet på 189 % omregnet til årsbasis (Lucia og Schwartz, 2002).



Figur 4-2: Volatilitet for områdeprisen for Oslo, beregnet med et 30 dagers rullende vindu

Autoregressive volatilitetsmodeller er et relativt enkelt eksempel fra klassen av stokastiske volatilitetsmodeller. En mye brukt ikke-lineær modell i finans er ARCH-modellen (autoregressiv betinget heteroskedastisk modell). Denne modellen er ikke-lineær, fordi variablene i ligningen for volatilitet er kvadrerte⁶.

Antakelsen for de klassiske lineære regresjonsmodellene (CLRM) om at variansen til residualene er konstant er kjent som homoskedastisitet⁷. Hvis variansen til residualene ikke er konstant, $\text{var}(u_t) \neq \sigma^2$, er dette kjent som heteroskedastisitet. Hvis feilleddene er heteroskedastiske, men man antar at de er homoskedastiske, vil de estimerte residualene bli gale. Det er lite trolig i finansielle tidsrekker at variansen til residualene vil være konstante over tid, og derfor er det ikke poeng i å se på en modell som antar homoskedastisitet. I

⁶ Se ligning (4.10) – volatilitet i GARCH

⁷ Se vedlegg B for oversikt over antakelsene i CLRM

prisdatabaene fra NordPool kan man også se at volatiliteten ikke er konstant, derfor er det heteroskedastisitet i dataseriene⁸.

En annen egenskap hos mange serier av finansielle data som gir motivasjon til ARCH-modeller er volatilitetssammenknytting (volatility clustering). Dette beskriver tendensen for store endringer i dataene til å følge etter store endringer, og små endringer til å følge etter små endringer. Med andre ord, dagens nivå for volatilitet tenderer til å være positivt korrelert med volatilitetens nivå gjennom de umiddelbart foregående periodene. Man kan si at ”volatilitet er autokorrelert” (Brooks, 2002).

GARCH-modeller

GARCH-modellene (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedastic) ble utviklet av Bollerslev (1986) og Taylor (1986). GARCH-modellen lar den betingede variansen være avhengig av foregående egne lags, altså både avhengig av forrige residual og variansen i forrige residual. Den enkleste ligningen for betinget varians, en AR(1)-GARCH(1,1)-modell, kan skrives som:

$$y_t = \mu + \varphi y_{t-1} + u_t \quad u_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (4.9)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (4.10)$$

GARCH-modellen er mye mer brukt i praksis enn ARCH-modellen, dette på grunn av at den er mer sparsommelig⁹. En GARCH-prosess med få ledd er funnet å prestere bedre enn en ARCH-prosess med flere ledd (Darnell, 1994). Man kan utvide GARCH-modellen til å inneholde flere ledd med historisk relevant informasjon, men generelt er en GARCH(1,1) tilstrekkelig for å fange volatilitetssammenknytningen i datamaterialet.

Asymmetriske GARCH-modeller

En av begrensningene til GARCH-modeller er at de gir en symmetrisk reaksjon på volatilitet for positive og negative sjokk (Brooks, 2002). For å bøte på dette er det blitt formulert tre asymmetriske GARCH-modeller:

GJR

GJR-modellen har fått navnet sitt fra forfatterne Glosten, Jagannathan og Runkle (1993). Denne modellen er en enkel utvidelse av GARCH, med en tilleggsvariabel for å fange opp asymmetri. Formelen for variansen er nå gitt ved:

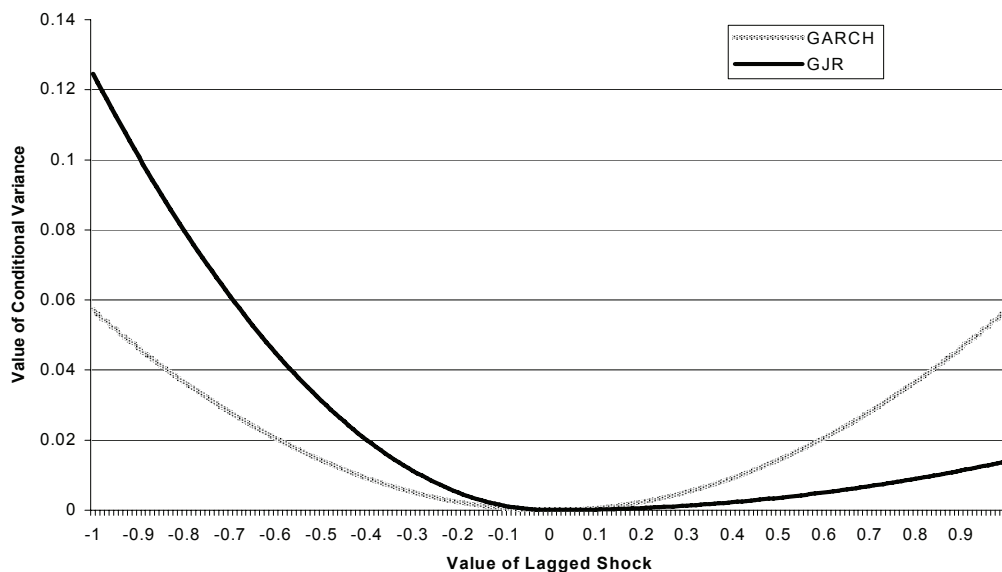
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma u_{t-1}^2 d_{t-1} \quad (4.11)$$

$$d_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } u_{t-1}^2 < 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (4.12)$$

⁸ Se Figur 4-2 – volatilitet med rullerende vindu

⁹ En GARCH(1,1)-modell som kun inneholder tre parametere i volatilitetsligningen, er en enkel modell som tillater et uendelig antall av foregående residualer å ha innflytelse på volatiliteten i dag (Brooks, 2002)

Hvis $\gamma > 0$ har man leverage effekt. Dette betyr at volatiliteten er høyere i nedgang enn i oppgang i prisdata. Er $\gamma \neq 0$, så er modellen asymmetrisk.



Figur 4-3: Forskjell på GARCH og GJR (Brooks, 2002)

Fra Figur 4-3 ser man at GARCH er symmetrisk rundt null, slik at et prissprang med en gitt høyde har samme innvirkning på den framtidige variansen om den er positiv eller negativ. GJR er asymmetrisk, negative prissprang har mer innvirkning på fremtidig volatilitet enn det positive prissprang med samme høyde har. Man kan også se at et negativt prissprang med en gitt høyde har større innvirkning på en GJR-modell enn på en vanlig GARCH-modell, mens et positivt prissprang har større innvirkning på GARCH enn på GJR.

EGARCH

Ekspansiell GARCH ble utviklet av Nelson (1991). Formelen for variansen er nå:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \gamma \frac{u_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} + \alpha \left[\frac{|u_{t-1}|}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \quad (4.13)$$

Modellen har en rekke fordeler i forhold til GARCH-modellen. Siden $\ln(\sigma_t^2)$ blir modellert, vil alltid σ_t^2 være positiv, selv om parametrene er negative. Asymmetri er også gjort rede for i denne modellen, fordi hvis forholdet mellom volatilitet og prisen er negativ, vil γ være negativ.

GARCH-M

I GARCH-M, eller GARCH-in-mean, er variansen et ledd i hovedligningen:

$$y_t = \mu + \delta \sigma_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (4.14)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (4.15)$$

En variant av GARCH-M-modellen har standardavviket i stedet for variansen i hovedligningen. GARCH-M-modellen er ofte brukt som en finansiell anvendelse hvor forventet avkastning er relatert til forventet risiko. Den estimerte koeffisienten til forventet risiko er et mål på risiko-avkastning trade-off (Brooks, 2002).

4.4 Sprang og jump diffution process

Elektrisitetspriser har, i tillegg til mean reversion og sesongavhengigheter, sjeldne, men store sprang, som også er å finne i Figur 4-1. Spotprisen kan øke med det tidobbelte på kun en time. Dette er en effekt av at elektrisitet ikke kan lagres. Elektrisitet som skal leveres til en spesifikk tid kan ikke bli substituert med elektrisitet som er tilgjengelig rett før eller rett etter, siden elektrisitet må bli konsumert på samme tid som den blir produsert. Sprang i elektrisitetsprisene er en effekt av ekstreme lastsvingninger. Disse lastsvingningene er som oftest forårsaket av strenge værforhold, ofte i kombinasjon med utfall av produksjonsenheter eller brudd på overføringer. Sprangene er normalt kortvarige. Så fort værforholdene har bedret seg, eller produksjonsenhetene og overføringslinjer igjen fungerer, vil prisene falle tilbake til normalt nivå. En Poisson-prosess har følgende egenskaper (Walpole mfl, 2002):

1. Prosessen har ingen hukommelse i det at antall hendelser som forekommer i et tidsintervall er uavhengig av antall hendelser i andre intervall
2. Sannsynligheten for en hendelse i et kort tidsintervall dt er proporsjonal med lengden av intervallet
3. Sannsynligheten for at det inntreffer mer enn en hendelse i løpet av dt er neglisjerbart

Antallet hendelser, x , som skjer i løpet av en periode er fordelt med følgende sannsynlighetsfordeling:

$$p(x; \lambda dt) = \frac{e^{-\lambda dt} (\lambda dt)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.16)$$

hvor λ er intensiteten til en Poisson-prosess, og λdt er gjennomsnittlig antall hendelser som skjer i løpet av en periode dt . λdt er også variansen for fordelingen $p(x; \lambda dt)$. En jump diffution-prosces (JDP) beskrives av en Poisson prosess som er lik null når det ikke eksisterer sprang, og 1 når et sprang inntreffer. Når et sprang inntreffer antas det at størrelsen på spranget vil være normalfordelt med gjennomsnitt μ_j og standardavvik σ_j . Poissonprosessen dq får da følgende sannsynligheter for utfall i intervallet dt (Eydeland og Wolyniec, 2003):

$$\begin{aligned} P(dq = 0) &= 1 - \lambda dt \\ P(dq = 1) &= \lambda dt \\ P(dq > 1) &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

For områdeprisene blir dagspriser analysert, slik at dt blir lik en dag. λ blir da antall dager med sprang delt på totalt antall dager. Man får da følgende beskrivelse av sprang-prosessen:

$$H = jdp \quad (4.18)$$

hvor $j \sim N(\mu_j, \sigma_j)$. Prisprosessen blir da:

$$dX = d\tilde{X} + jdq \quad (4.19)$$

hvor $d\tilde{X}$ beskriver resten av prosessen I tillegg må en trekke fra forventet spranglengde fra driftleddet til resten av prosessen. En JDP plukker opp sprang bra, men etter et sprang har prosessen en tendens til å holde seg på det nivået den har hoppet til. For kraftpriser observerer man ofte at ett sprang er en del av en pristopp og derfor vil et sprang ofte bli etterfulgt av et sprang i motsatt retning (Eydeland og Wolyniec, 2003). Derfor er det viktig at en JDP også har et mean reversion-ledd. Det er flere som har brukt JDP-modeller på strømpriser (se for eksempel Johnson og Barz, 1999, eller Knittel og Roberts, 2001), men det eksisterer en del kritikker mot denne tilnærmingen (for eksempel Pirrong og Jermakyan, 1999 eller Clewlow og Strickland, 2000). En kritikk er at alle prissprang dør ut med samme rate. For store sprang kan dette stemme ganske bra, siden de ofte forekommer under produksjonssprang eller ekstreme lastsituasjoner, som er kortvarige. For små prissprang er sprangene ofte varige. Escibano mfl (2002) løser dette problemet med å kombinere en GARCH-modell og en JDP-modell. GARCH-modellen vil da plukke opp de små sprangene. En annen kritikk av JDP-modellen er at Poisson-prosessen ikke har noen hukommelse og det kan dermed komme et sprang når som helst, mens det er mer sannsynlig at det kommer store sprang i perioder med liten forskjell mellom forbruk og maksimalt tilbud. Siden man har en konveks tilbudskurve (økende marginalkostnader) vil en økning i forbruk gi større forskjell i pris når det man er i en situasjon med høyt forbruk enn ved lavt forbruk. Dette kan modelleres ved bruk av varierende intensitet i JDP-modellen. Escibano mfl (2002) har gjort dette ved hjelp av dummyvariable, men resultatene de fikk var svært like med og uten dummyvariable.

4.5 Filtrering av sprang

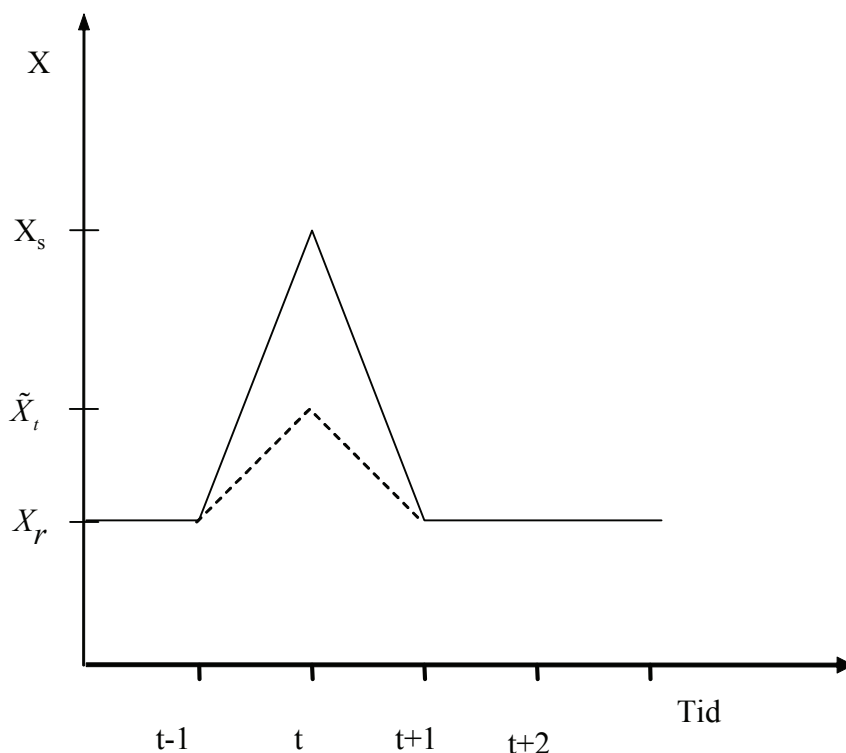
I følge Eydeland og Wolyniec (2003) finnes det to måter å ta hensyn til sprang på en enkel måte. Den ene metoden er å se på perioder uten prissprang, mens den andre metoden er å filtrere vekk sprangene. Siden det ikke eksisterer så mye data er det valgt å bruke den siste metoden. Fordelen med dette er at man kan estimere andre egenskaper til prosessen under normale omstendigheter, samtidig som man får en enkel beskrivelse av sprangstørrelse og frekvens ved å observere histogram og QQ-plott (Borovkova og Permana, 2004). Det finnes avanserte filtreringsalgoritmer (Johannes mfl., 2002), men på grunn av at dette er svært komplisert vil det ikke bli brukt ulineære filtreringsmetoder, men en enkel algoritme som filtrerer vekk sprang. Algoritmen er lagt ved i vedlegg C og gjør følgende trinn:

1. Definer sprang hvis avviket¹⁰, r_t , har større absoluttverdi enn 3 standardavvik¹¹, σ_r , (Cartea og Figueroa, 2005)
2. Hvis det eksisterer et sprang settes¹² verdien etter spranget, \tilde{X} , til gjennomsnittet mellom verdiene før og etter spranget:

$$\tilde{X}(t || r_t | > 3\sigma_r) = \frac{X(t) - \tilde{X}(t-1)}{2} \quad (4.20)$$

3. Algoritmen gjentas til alle avvik er mindre enn 3 standardavvik

Siden det blir filtrert ved hjelp av avvik vil denne algoritmen ta hensyn til både pristopper og varige forandringer etter et sprang. Som illustrasjon er det i Figur 4-4 valgt en lineær regresjon som gir estimert verdi lik en konstant, X_r . I tidspunkt t kommer det et sprang med verdi $X_t - X_r$. Hvis sprangverdien er større enn 3 standardavvik vil den nye verdien for X_t bli satt til \tilde{X}_t som er gitt av (4.20). Selv om det er både et positivt sprang og et negativt sprang så vil kun X_t bli filtrert, siden det er kun den verdien som har et avvik fra regresjonen. Det negative spranget fra t til $t+1$ vil ikke bli tatt med siden avviket til X_{t+1} vil være lik null.



Figur 4-4: Filtrering av sprang

¹⁰ Avvik er definert som differansen mellom observert verdi og estimert verdi av en regresjon.

¹¹ I en normalfordeling er det sannsynligheten for at det inntreffer hendelser som har større avstand enn 3 standardavvik fra gjennomsnitt lik 0,0027

¹² Et alternativ kunne vært å slette verdien, men siden vi blant annet ser på sesongvariasjon ville det gitt en feilkilde.

Etter fjerning av sprang vil man ha en serie kun bestående av sprang, J . Den nye prisserien uten sprang blir da:

$$\tilde{X}_i = X_i - J_i \quad (4.21)$$

hvor X_i er den originale serien og J_i er sprangserien. I Figur 4-4 er den verdien av J_i lik $X_i - \tilde{X}_i$.

5 Analyse

I de følgende delkapitler er kun modeller som har oppnådd gode resultat beskrevet og diskutert. For resultater av alle estimerte modeller og deres parameterverdier og tilhørende p-verdier, se Vedlegg G. For nærmere forklaring av statistikkbegreper brukt i oppgaven, se vedlegg A.

5.1 Data

I dette prosjektet er det benyttet daglige prisdata fra 1.1. 1996 til 31.5.2005, hentet fra FTP-serveren til NordPool. Prisene er daglige gjennomsnitt av timeprisen til elektrisitet på NordPool. Dette er til sammen 3439 observasjoner for hver serie. Det er hentet prisdata for systempris, samt for områdepris for Oslo (NO1), Trondheim (NO2) og Sverige, gitt i NOK per MWh eller EUR per MWh, med to desimaler. For Finland er det hentet daglig prisdata fra NordPool fra 1.1.1998 til 31.5.2005. Dette utgjør 2707 observasjoner. Ut i fra disse prisdataene er det laget prisserier basert på differansen mellom de forskjellige områdeprisene og systempris.

Alle prisseriene er blitt generert for priser gitt i EUR per MWh. Det er brukt vekselkurs fra Norges Bank der prisen i Euro ikke var direkte tilgjengelig fra NordPool. Før Euro ble innført er det benyttet den første valutakursen for Euro, fra fredag 1.1. 1999. Valutakurs for helgedager er satt til den samme kursen som den foregående fredagen. For helligdager er det benyttet valutakursen til den foregående dagen.

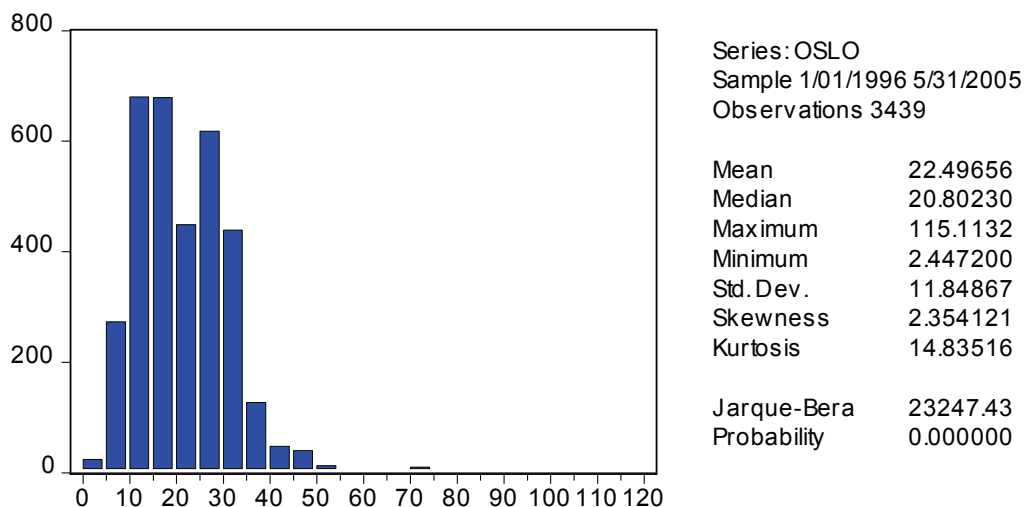
Statistikkprogram

For å utføre analysene på prisseriene generert ble statistikkprogrammet EViews, versjon 3.1., brukt. EViews er et interaktivt økonometriprogram, som inneholder verktøyene som oftest benyttes i praktisk økonometri. EViews benytter seg av maximum likelihood-funksjonen ved estimering av parametere.

Skjevhet og kurtose

Figur 5-1 viser den deskriptive statistikken for områdeprisen i Oslo. Ut i fra figuren kan man se at denne tidsrekken ikke er normalfordelt. Jarque-Bera-statistikken har en sannsynlighet på 0,00. Jo nærmere denne sannsynligheten er 1, jo nærmere en normalfordeling er dataserien. Det er en positiv skjevhet i dataene, noe som tyder på at sannsynligheten for ekstreme

økninger i prisen er høyere enn for ekstreme fall i pris. Kurtosen for dataserien er signifikant over 3, som er kurtosen for en normalfordeling. Dette betyr at ekstreme priser, både høye og lave, har en større sannsynlighet for å inntreffe enn det som er vanlig i en normalfordeling.



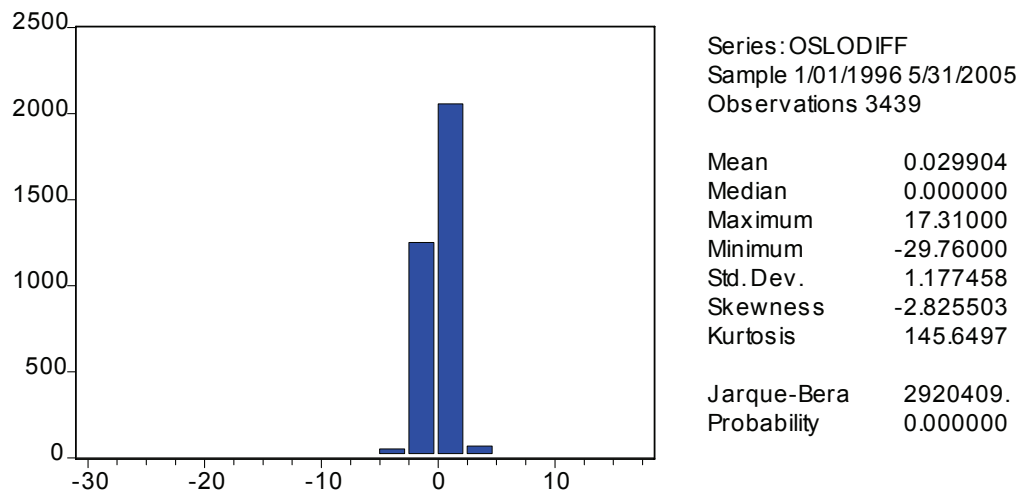
Figur 5-1: Deskriptiv statistikk for Oslo

I Tabell 5-1 er den deskriptive statistikken for alle områdeprisene listet opp. Statistikken for de forskjellige områdeprisene ligner svært mye på hverandre, og man kan fastslå at ingen av de er normalfordelte. Skjevheten og kurtosen til hver av områdeprisene er langt over det som er vanlig for en normalfordeling.

Område	Gjennomsnitt	Standardavvik	Skjevhet	Kurtose	Jarque-Bera
Oslo	22.49656	11.84867	2.354121	14.83516	23247.43
NO2	22.54069	11.56201	2.333357	15.05931	23959.12
Sverige	22.53746	11.48160	2.567255	16.81664	31131.93
Finland	22.49164	11.69844	2.863635	18.55056	30986.47
System	22.46670	11.41700	2.350226	14.97436	23711.84

Tabell 5-1: Deskriptiv statistikk for områdepriser

Figur 5-2 viser den deskriptive statistikken for prisdifferansen mellom områdepris for Oslo og systempris. Jarque-Bera-statistikken har her også en sannsynlighet på null. Skjevheten er negativ, som indikerer at sannsynligheten for at en ekstrem verdi er negativ er større enn for at den ekstreme verdien er positiv. Kurtosen er høyt over verdien til områdeprisen. Dette betyr at sannsynligheten for ekstreme verdier er større for prisdifferansen enn områdeprisen.



Figur 5-2: Deskriptiv statistikk for prisdifferanse Oslo - System

I Tabell 5-2 vises den deskriptive statistikken for prisdifferansen mellom alle områdeprisene og systempris. De ulike prisdifferansene har også svært like egenskaper. Generelt har kurtose og skjevhet en høyere verdi for prisdifferansen enn for områdeprisene. Dette gir utslag i Jarque-Bera-statistikken, som her er svært høy.

Område	Gjennomsnitt	Standardavvik	Skjevhet	Kurtose	Jarque-Bera
Oslo	0.029904	1.177458	-2.825503	145.6497	2920409
NO2	0.074045	1.434892	5.152896	175.4258	4275373
Sverige	0.070814	1.968402	16.46476	612.1849	53331808
Finland	0.025753	2.707073	6.524638	233.6683	60222833

Tabell 5-2: Deskriptiv statistikk for prisdifferanse mellom områdepris og systempris

Stasjonaritet

For å finne ut om dataseriene er stasjonære, det vil si om de har konstant gjennomsnitt, varians og kovarians for hvert lag, ble det gjennomført en Augmented Dickey-Fuller-test, både for områdepris og prisdifferanse. Det ble funnet verdier som påviser at alle prisseriene er stasjonære, se Tabell 5-3. I denne testen ble stasjonaritet undersøkt for 35 lags, for å være sikker på å unngå autokorrelasjon mellom lagene¹³. Det ble også gjennomført en Phillips-Perron-test for stasjonaritet. Her er det brukt 8 lags, som foreslått i EViews. Resultatet ble det samme: prisseriene inneholder ikke enhetsrøtter, og er derfor funnet å være stasjonære. Det at prisseriene ikke inneholder enhetsrøtter betyr at prisseriene er mean reverting (Escribano et al, 2002).

¹³ Et høyt antall av lags er nødvendig for å redegjøre for autokorrelasjonen i endringene til de relevante variable (Lucia og Schwartz, 2002)

I Tabell 5-3 er resultatene fra ADF-testen og PP-testen for de forskjellige områdeprisene og prisdifferansene vist. Kritisk verdi for ADF-test og PP-test med 5 % signifikansnivå er -2,8629.

Område	Områdepris		Prisdifferanse	
	ADF-test	PP-test	ADF-test	PP-test
Oslo	-3.261700	-4.448255	-5.822892	-33.04236
NO2	-3.195612	-5.509247	-6.051968	-37.63248
Sverige	-3.217123	-7.379213	-5.945890	-42.80405
Finland	-2.614179	-7.722642	-4.604861	-31.00141
System	-3.209455	-4.969545		

Tabell 5-3: Augmented Dickey-Fuller-test for områdepriser og prisdifferanser

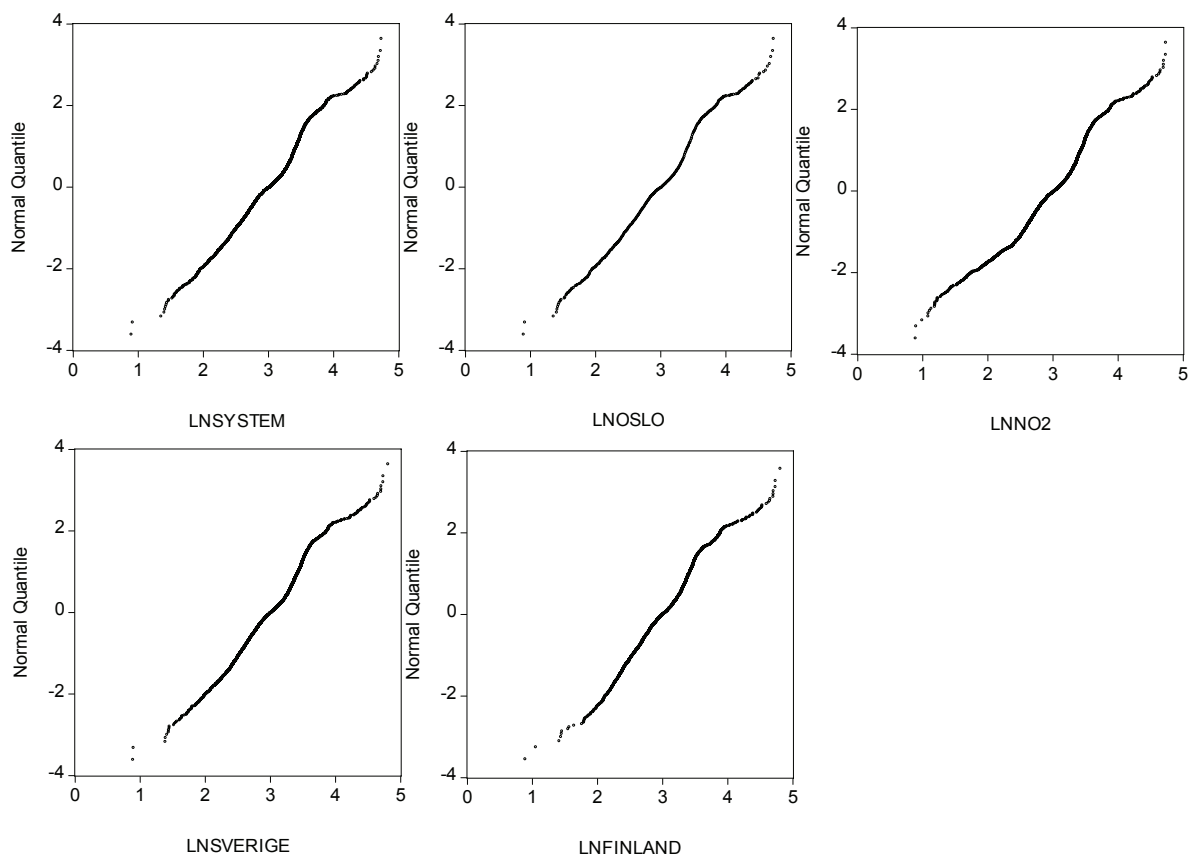
Verdiene for ADF-testen til områdeprisene er kun litt høyere enn den kritiske verdien med 5 % signifikansnivå, verdien for Finland er til og med litt lavere enn for denne testverdien. Dette er et tegn på at prisseriene har en lav mean reversion (Escribano et al, 2002).

5.2 Lognormalfordeling

Ved å lage et QQ-plott¹⁴ mellom en normalfordeling og en prisserie vil man kunne oppnå en rett linje hvis prosessen er normalfordelt (Walpole m fl, 2002). I Figur 5-3 er dette gjort for logaritmen til områdeprisene Oslo, NO2, Sverige og Finland, og systemprisen.

Det er lett å se at plottene ikke er helt rette linjer. Det eksisterer haler med flere observerte store og lave verdier enn det en normalfordeling skulle tilsi. Dette viser også kurtosen. I tillegg ser man fra Tabell 5-4 at Jarque-Bera-testen gir høye verdier, mellom 60 og 360. Dette er en signifikant forskjell fra normalfordelingen, som har Jarque-Bera-verdi på 0. Hvis JB er større enn 6 med 5 % signifikansnivå kan nullhypotesen om normalfordeling forkastes (Eydeland og Wolyniec, 2003). Logaritmen til prisserien er allikevel en bedre tilpasning til en normalfordeling enn det den vanlige prisserien er. Dette kommer frem når man sammenligner Tabell 5-4 med Tabell 5-1. Logprisene har verdier nærmere en normalfordeling enn det prisene har.

¹⁴ I et QQ-plott plottes kvantiler til kjente fordelinger på den vertikale akse mot prosessens kvantiler på den horisontale akse

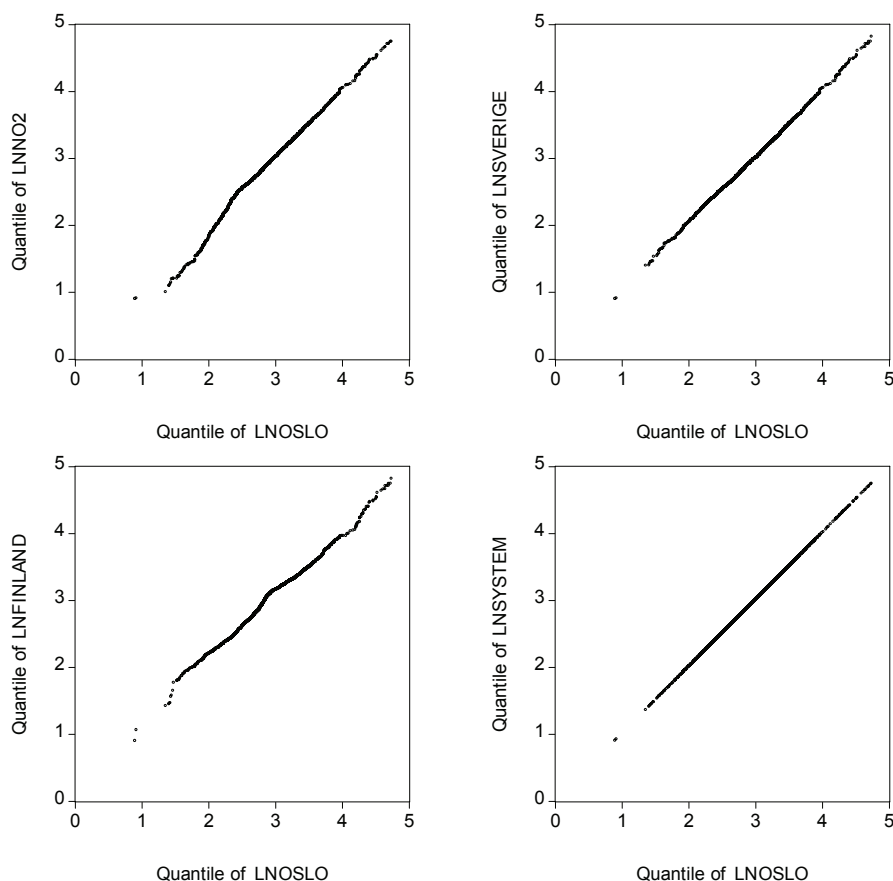


Figur 5-3: Logaritmen til områdepriser og systempris mot normalfordelingskvantiler

Område	Gjennomsnitt	Standardavvik	Skjevhet	Kurtose	Jarque-Bera
Oslo	3.003950	0.474000	-0.185229	3.552973	63.48065
NO2	2.997019	0.500647	-0.487798	4.251917	360.9636
Sverige	3.006761	0.466771	-0.122622	3.718761	82.64515
Finland	3.007418	0.453747	0.072788	3.844406	82.84387
System	3.000402	0.476724	-0.185735	3.553398	63.65574

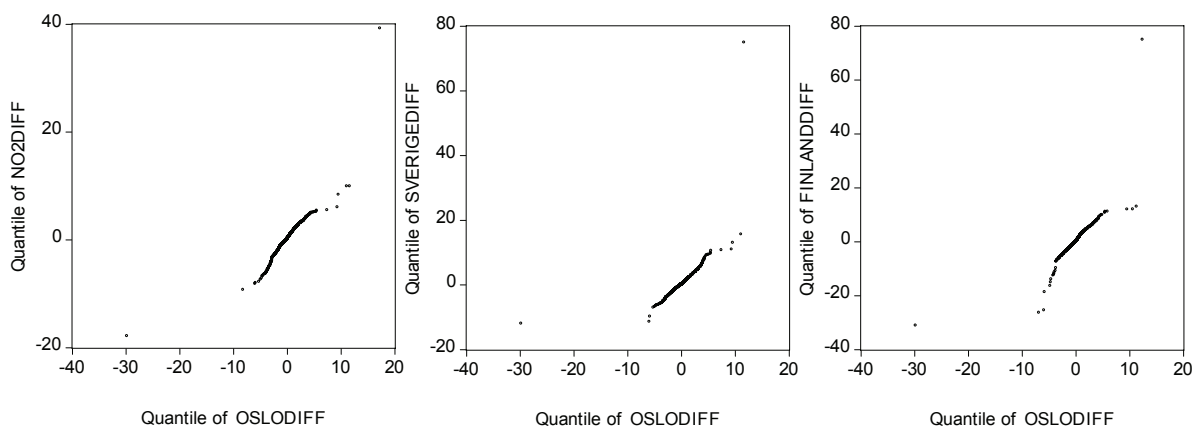
Tabell 5-4: Deskriptiv statistikk for logaritmen til områdeprisene

På samme måte som normalsannsynlighetsplottet i Figur 5-3 kan man plote forskjellige fordelinger mot hverandre for å se om de er likt fordelt. Dette er gjort i Figur 5-4 med områdeprisen for Oslo plottet mot de andre områdeprisene. Det er tydelig at de fleste observasjonene ligger langs en rett linje, dette betyr at de ulike områdeprisene og systemprisen følger den samme fordelingen. Kan man beskrive en av prisprosessene kan man med stor sannsynlighet beskrive de andre prosessene på samme måte, og få et godt resultat.



Figur 5-4: QQ-plott for logaritmen til prisen til Oslo mot NO2, Sverige, Finland og system

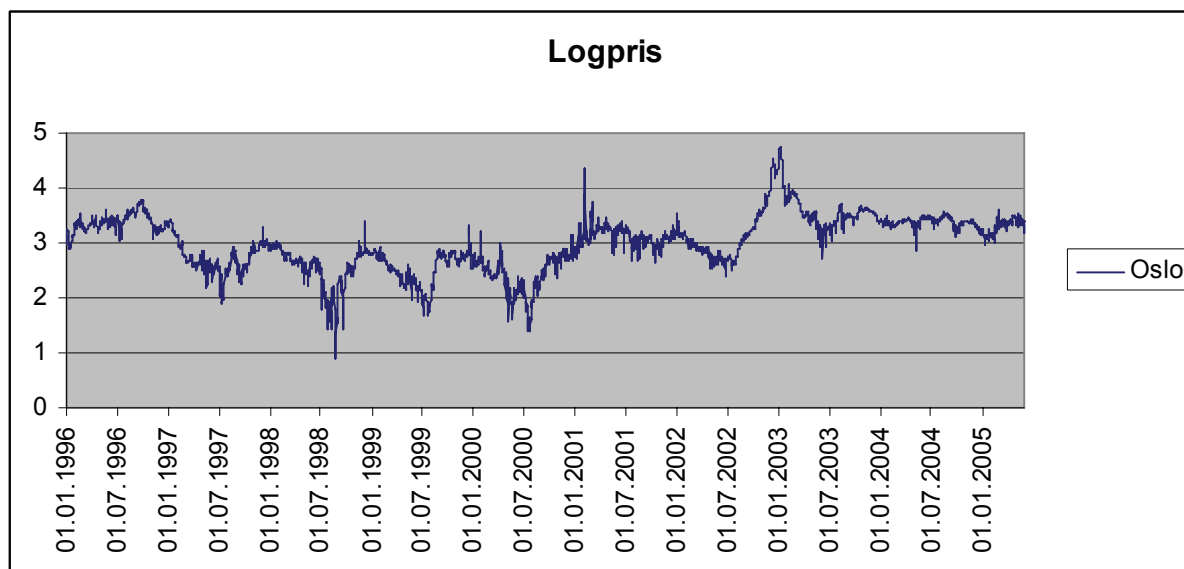
For prisdifferansen mellom områdepris og systempris kan man ikke bruke logaritmen, siden denne funksjonen krever kun positive tall. I Figur 5-5 er differansen mellom områdeprisen til Oslo og systemprisen plottet mot differansen mellom systempris og Sverige, NO2 og Finland. Her er det ikke like tydelig at det er en sammenheng, de fleste verdiene ligger langs en linje, mens ekstremverdiene avviker noe.



Figur 5-5: QQ-plott for prisdifferansen til Oslo mot prisdifferanse til NO2, Sverige og Finland

Ut i fra disse resultatene velger vi i videre modellering å bruke logaritmen til prisseriene med områdepris. Siden de forskjellige prisseriene for områdepris følger den samme fordelingen, har vi videre valgt å se på områdeprisen for Oslo. Kan vi finne en modell som samsvarer godt med denne dataserien, vil denne modellen mest sannsynlig også samsvare godt med prisseriene for de andre områdene. For prisdifferanse var denne sammenhengen ikke så fremtredende som ved områdepris, men vi velger allikevel å anta at en modell som er en god tilnærming til en av dataseriene for prisdifferansen også vil være det for de andre prisseriene for prisdifferanse. Derfor er det valgt å se videre på prisdifferansen mellom områdeprisen til Oslo og systempris.

5.3 Sesongvariasjon



Figur 5-6: Logpris for Oslo fra 1.1.1996 til 31.5.2005

Av Figur 5-6 kan man se at det finnes sesongvariasjon for logaritmen til prisdata for Oslo. For å beskrive sesongvariasjonen er det gjort en regresjon både for modellen med dummyvariable og for modellen med cosinusvariasjon. Regresjonen for modellering av sesongvariasjon med dummyvariable er:

$$X_t = \sum_{i=jan}^{des} \alpha_i \delta_i + U_t \quad (5.1)$$

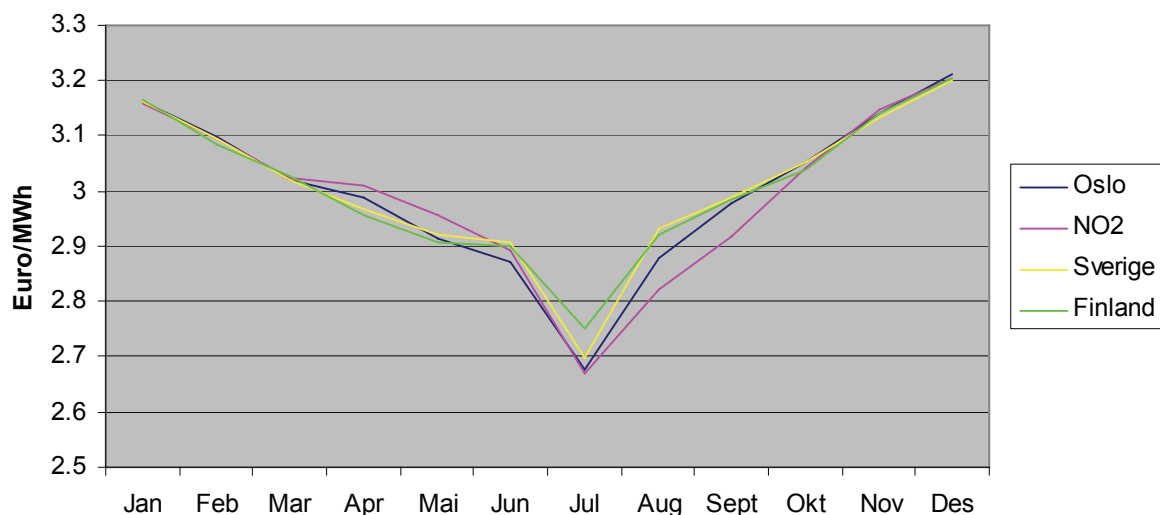
hvor U_t er avvikene fra regresjonen¹⁵. Vi har brukt EViews og minste kvadrats metode for å estimere α_i

¹⁵ Det er ofte vanlig å utelate en måned og ha et konstantledd i stedet, men siden det blir like mange parametere å estimere har vi valgt å bruke en parameter for hver måned.

Sesongvariasjon	R ²	AIC	Schwarz	LL
Dummy	0.096751	1.359905	1.381340	-2326.357
Cosinus	0.087800	1.364532	1.369890	-2343.312

Tabell 5-5: Regresjonsresultater for sesongvariasjon for områdepris Oslo

I Tabell 5-5 er regresjonsresultatene for de to metodene fremstilt. Her ser man at dummy-metoden gir bedre resultat for alle informasjonskriteriene. Denne metoden er også svært enkel, og gir en god forståelse av hva parameterne er. Dette resultatet er ikke overraskende og stemmer bra med en nordisk forbruksprofil med høyt forbruk om vinteren og lavt om sommeren. De ekstra lave verdiene i juli kan komme av at i fellesferien er det lavere kommersielt forbruk, og dermed lavere priser. Alle verdiene er sikre ved et 5 % signifikansnivå. Verdien for R² er ganske lav, men denne modellen er en svært enkel modell som ikke tar hensyn til mean reversion, sprang og stokastisk varians. Derfor vil det være en del avvik fra α_i som gir lav R².


Figur 5-7: Sesongvariasjon for områdeprisene representert med dummyvariable

De forskjellige systemprisene har relativt lik sesongvariasjon. Dette stemmer med korrelasjonskoeffisientene beregnet i Tabell 5-6. Dette er naturlig siden forbruksvariasjonen over året er ganske lik i alle områdene. Det er tydelig at de ulike områdeprisene og systempris har en høy positiv korrelasjon med hverandre.

	Oslo	NO2	Sverige	Finland	System
Oslo	1	0.975	0.958	0.942	0.993
NO2	0.975	1	0.952	0.931	0.983
Sverige	0.958	0.952	1	0.989	0.981
Finland	0.942	0.931	0.989	1	0.967
System	0.993	0.983	0.981	0.967	1

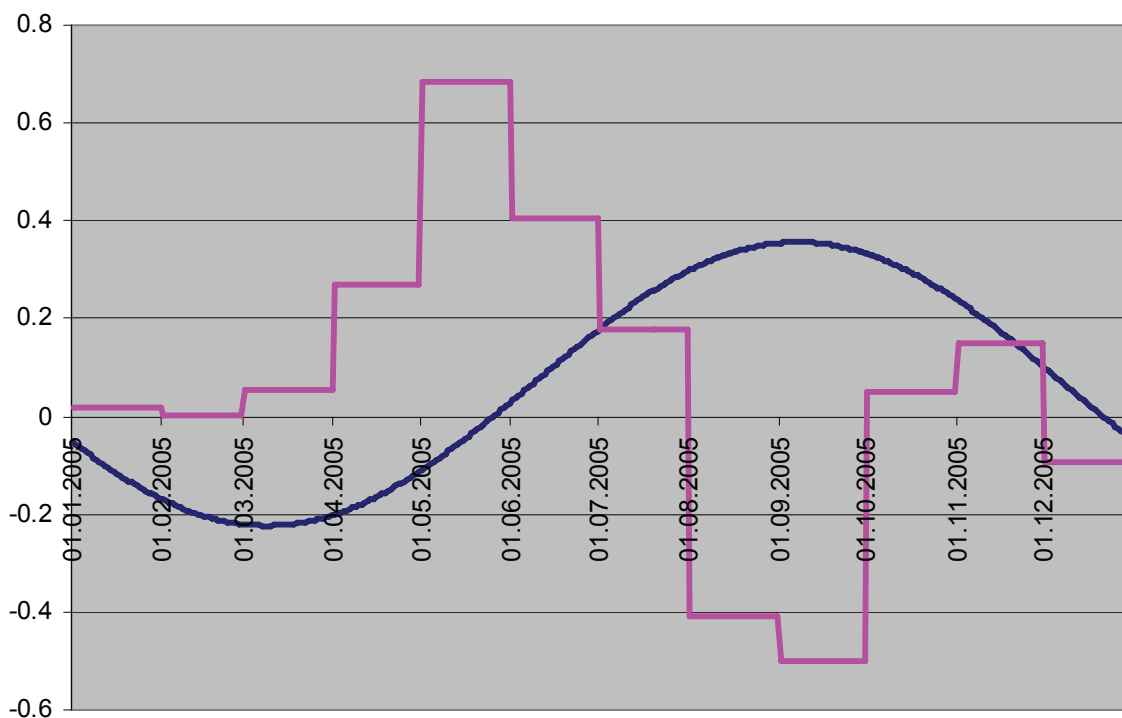
Tabell 5-6: Korrelasjonsmatrise for områdene og systempris

Ut i fra korrelasjonsmatrisen styrkes antakelsen presentert tidligere; en modell som stemmer godt overens med prisseriene for Oslo vil også stemme godt overens med de andre prisseriene.

Prisdifferanse	R ²	AIC	Schwarz	LL
Dummy	0.040929	3.129491	3.150926	-5369.160
Cosinus	0.026700	3.138984	3.144343	-5394.483

Tabell 5-7: Regresjonsresultater for sesongvariasjon for prisdifferanse Oslo-systempris

I Tabell 5-7 er regresjonsverdiene for prisdifferansen mellom områdepris for Oslo og systempris vist. Her ser vi igjen at dummy-metoden får bedre resultater enn cosinus-metoden, selv om resultatene er relativt like. Et problem med sesongvariablene er at dummy- og cosinusmodellene gir høy pris for forskjellige sesonger for differansen mellom NO2 og system. Dette er vist i Figur 5-8. Dette tyder på at parameterne er ustabile og at modellering av sesongvariasjon for differansene kan gi feilkilder. Dette blir også bekreftet av at parameterne fra regresjon er svært usikre, ved dummyregresjon har 7 av 12 verdier sannsynlighetsnivå som er over et 5 % signifikansnivå. Dette stemmer også intuitivt med at siden alle områdeprisene har lik sesongvariasjon som systemprisen, vil ikke differansene ha den samme sesongvariasjonen.



Figur 5-8: Sesongvariasjon for prisdifferansen mellom Norge 2 og System representert med dummyvariable og cosinusvariable.

Tabell 5-8 viser korrelasjonen mellom prisdifferansene, og man ser at korrelasjonskoeffisientene er både positive og negative, og har mindre absoluttverdi enn

områdeprisene. Dette betyr ikke at ikke prisdifferansen er avhengige av hverandre, men at de ikke går samme vei når en prisdifferanse oppstår. Dette skyldes at hvis et område er i underskudd på kraft, er gjerne et annet område i overskudd i forhold til at innmeldingene til systemprisen skal bli oppfylt. Denne sammenhengen er tydelig mellom Sverige og Oslo. Med andre ord skaper ikke overføringsbegrensningene sesongavhengighet i prisdifferanse. Det vil derfor ikke bli modellert sesongvariasjon for prisdifferansen mellom område og system.

	Oslo	NO2	Sverige	Finland
Oslo	1	-0.275	-0.705	0.515
NO2	-0.275	1	0.316	0.350
Sverige	-0.715	0.316	1	-0.778
Finland	0.515	0.350	-0.778	1

Tabell 5-8: Korrelasjonsmatrise for differansene mellom områdepris og systempris

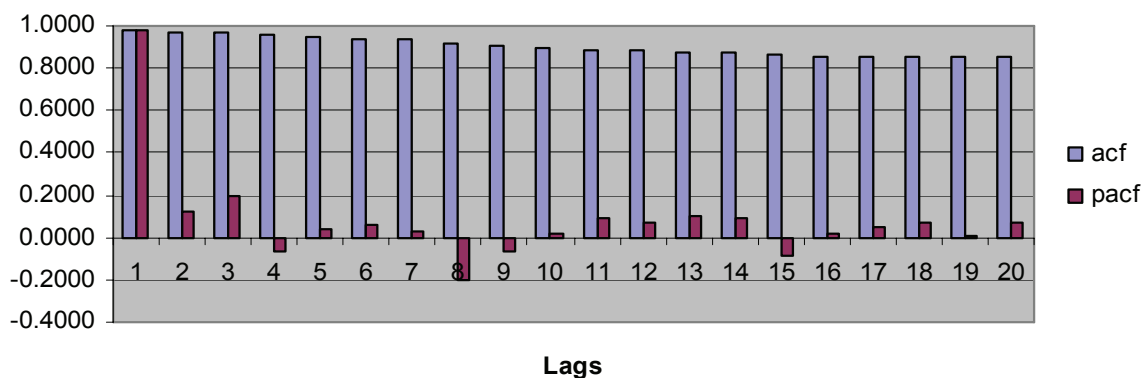
5.4 AR-modellering

Antall lag i modellen

Ved hjelp av autokorrelasjonsfunksjonen og den partielle autokorrelasjonsfunksjonen kan man beregne antallet ledd bakover i tid, altså antall lags, man skal ha med i en AR-modell. Grensen for signifikans i datasettene for prisen, hvor det er T=3439 observasjoner, gitt 5 % konfidensintervall, er:

$$\pm \frac{2}{\sqrt{T}} = 0.0341 \quad (5.2)$$

Korrelasjonsfunksjonene i dataene fra Oslo 1.1.1996-31.05.2005, gitt i Figur 5-9, viser at autokorrelasjonsfunksjonen (acf) synker gradvis med antall lag, mens den partielle autokorrelasjonsfunksjonen (pacf) svinger. Dette er en typisk karakteristikk for en AR-prosess, der acf skal synke geometrisk, mens pacf angir hvor mange lag man skal ha med i modellen.



Figur 5-9: Korrelogram for Oslo

Grensen for signifikans tilsier at mange av lagene er signifikante for AR-modellen, som Figur 5-9 viser. Lag 1 har høyest signifikans. Verdien på koeffisientene til lagene vil i stor grad samsvare med styrken på den partielle autokorrelasjonen. Det vil si at lag 1 vil ha en mye større betydning for de neste verdiene enn de andre lagene.

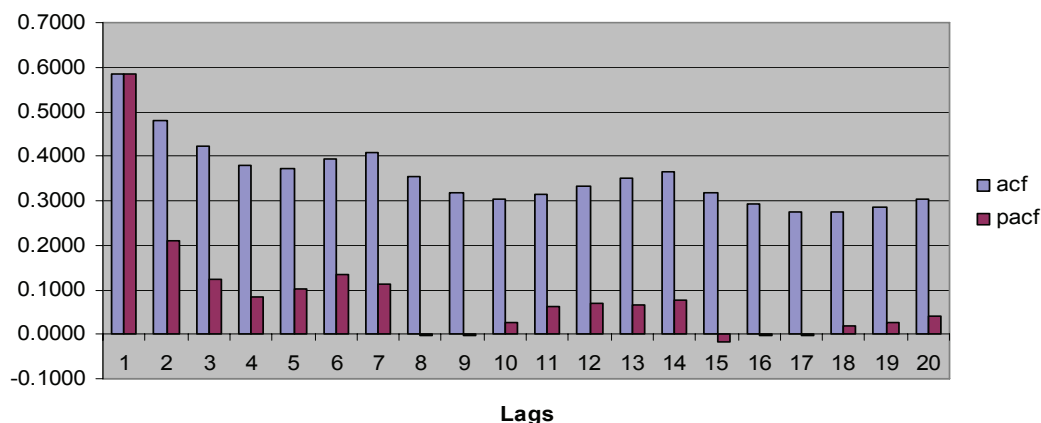
For å bevise dette, ble det utført beregninger for AR-modeller med 1, 2, 3, 5 og 7 lags. Resultater fra EViews for utvalgte informasjonskriterier er vist i Tabell 5-9. I denne tabellen kan man se at jo flere lags man har med, jo bedre blir tilpasningen til den observerte dataserien. R^2 og log likelihood-funksjonen øker svært lite når flere lag blir lagt til, mens AIC- og Schwarz-kriteriene synker svært lite. Man ser også at modellen med kun et lag gir en god tilnærming til prisdataene, og at forbedringen i resultatene for flere lags er minimal.

AR(p)	R^2	AIC	Schwarz	LL
1 lag	0.957063	-1.790591	-1.787018	3080.027
2 lags	0.957379	-1.797117	-1.791756	3091.346
3 lags	0.958971	-1.834327	-1.827176	3155.373
5 lags	0.960305	-1.865763	-1.855032	3209.515
7 lags	0.963255	-1.941238	-1.926924	3339.165

Tabell 5-9: Resultat fra EViews for AR-modeller for områdepris

Ut i fra disse resultatene kan man trekke en slutning om at en AR-prosess med kun et lag er en god tilnærming til områdeprisene i forhold til AR-modeller med flere lags. Dette fordi de ulike informasjonskriteriene øker kun svært lite når flere lags blir evaluert, samt at parameterverdien til det første laget er signifikant større enn for de etterfølgende lagene. En modell med kun et lag vil være svært mye enklere å modellere og bruke i bergninger. En slik modell vil også være mer robust enn en modell med flere lags, på grunn av at modellen har færre parametere som kan påvirke prosessen. En siste begrunnelse er at i modellen med kun et lag har man flere frihetsgrader, det vil si at færre parametere må bestemmes og flere av prisobservasjonene kan benyttes for å tilpasse modellen til dataserien.

Korrelasjonene i dataserien for prisdifferansen mellom områdepris for Oslo og systempris er gitt i Figur 5-10. Autokorrelasjonsfunksjonen og den partielle autokorrelasjonsfunksjonen har de samme egenskapene her som for områdeprisen, antall signifikante pacf angir hvor mange lag man skal ha med i en modell, mens acf gradvis avtar mot null.



Figur 5-10: Korrelogram for prisdifferansen mellom Oslo og systempris

Lag 1 i pacf er generelt større enn de påfølgende lagene, selv om mange av lagene er innenfor signifikansnivået på 0,0341. Tabell 5-10 viser resultatene for informasjonskriteriene fra EViews for AR-modeller med 1, 2, 3 og 5 lags. For prisdifferanse får man de samme resultatene som for områdepris, jo flere lags man har med, jo bedre blir tilpasningen til den observerte dataserien. Men de estimerte modellene skiller seg svært lite fra hverandre når det gjelder informasjonskriteriene R^2 , AIC og Schwarz. Log likelihood blir heller ikke særlig større. R^2 er for alle modellene for prisdifferanse liten. En R^2 med verdi lik 1 vil si at modellen passer perfekt med den modellerte dataserien. Her er verdien på rundt 0,35, det vil si at de estimerte modellene ikke er svært gode tilpasninger til dataserien med prisdifferanse.

AR(p)	R^2	AIC	Schwarz	LL
1 lag	0.340146	2.750019	2.753592	-4725.283
2 lags	0.369825	2.704871	2.710233	-4645.322
3 lags	0.379277	2.690632	2.697782	-4618.506
5 lags	0.389843	2.675211	2.685942	-4587.337

Tabell 5-10: Resultater fra EViews for AR-modeller for prisdifferanse

Koeffisientverdien til det første laget er funnet til å være betydelig større enn for de påfølgende lagene. Dette er i samsvar med Figur 5-10, hvor lag 1 har en mye større partiell autokorrelasjon enn de påfølgende lagene.

Ut i fra disse resultatene kan man her også trekke en slutning om at AR-modellen med kun et lag er å foretrekke for modellering av prisdifferanser i forhold til AR-modeller med flere lag. Siden parameterverdien til det første laget er større enn de etterfølgende, vil denne ha mest innvirkning på modellen. En modell med kun et lag vil være mer robust enn modeller med flere lag, fordi modellen har færre parametere som påvirker prosessen. Denne modellen vil også være enklere å modellere og estimere.

ARMA

Det ble også utført tester for ARMA-modeller både for områdeprisen og for prisdifferansen. Resultatene i vedlegg G viser at de ikke presterer noe bedre enn de AR-modellene gjør. Dette viser at det ikke er så stor effekt av å modellere for MA, og for å holde modellen på et så enkelt nivå som mulig blir derfor ikke modellert for MA.

Mean reversion

En AR(1) modell blir ofte også kalt mean reversion eller Ornstein-Uhlenbeck prosess. For å analysere mean reversion må ligning (4.5) diskretiseres. Siden det eksisterer sesongvariasjon, vil gjennomsnittet gå mot sesonggjennomsnittet. I ligningen er det ikke tatt med et eget konstantledd. Dette er fordi dummyparametrene vil være konstantleddene. Regresjonen blir med sesongvariasjon lik¹⁶:

$$X_t = \sum_{i=Jan}^{Des} \alpha_i \delta_i + \beta X_{t-1} + U_t \quad (5.3)$$

hvor konstantene fra ligning (4.5) blir $\beta = \kappa dt$, og $\kappa \alpha$ inngår i α_i .

Mean reversion	R ²	AIC	Schwarz	LL
Uten	0.096751	1.359905	1.381340	-2326.36
Med	0.968566	-1.997314	-1.974087	3446.383

Tabell 5-11: Regresjonsresultat for en Ornstein-Uhlenbeck-prosedy for områdepris

Modellen i ligning (5.3) ble testet for logaritmen til områdeprisen til Oslo i EViews. I Tabell 5-11 er det gitt en oversikt over informasjonskriteriene fra regresjonen til en prosedy med kun sesongvariasjon, uten mean reversion, og en modell med både en prosedy for sesongvariasjon og en OU-prosedy. Det er tydelig å se at mean reversion gir en klar forbedring av beskrivelsen til prisprosedyen i forhold til en modell med kun sesongvariasjon.

I Figur 5-11 ser man at residualleddet til mean reversion-modellen ikke er normalfordelt. Det finnes ekstremverdier som er langt unna gjennomsnittet. Den mest ekstreme verdien er over 14 standardavvik unna. I en normalfordeling er det en sannsynlighet tilnærmet lik 0 for at dette inntreffer, og det er derfor trolig at prissprang eksisterer.

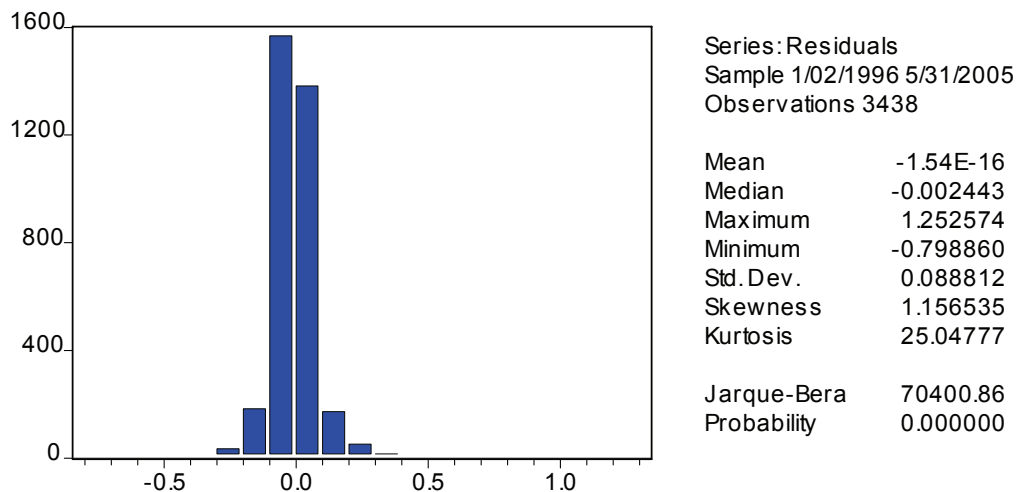
¹⁶ I Eydeland og Wolyniec (2003) blir denne presentert med differansen som

$$\Delta X_t = a + \mu X_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$$

Setter man $\sigma \varepsilon_t = U_t$ og $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ får man

$$X_t = a + (1 + \mu) X_{t-1} + U_t = a + \beta X_{t-1} + U_t$$

som stemmer overens med ligning (5.3).



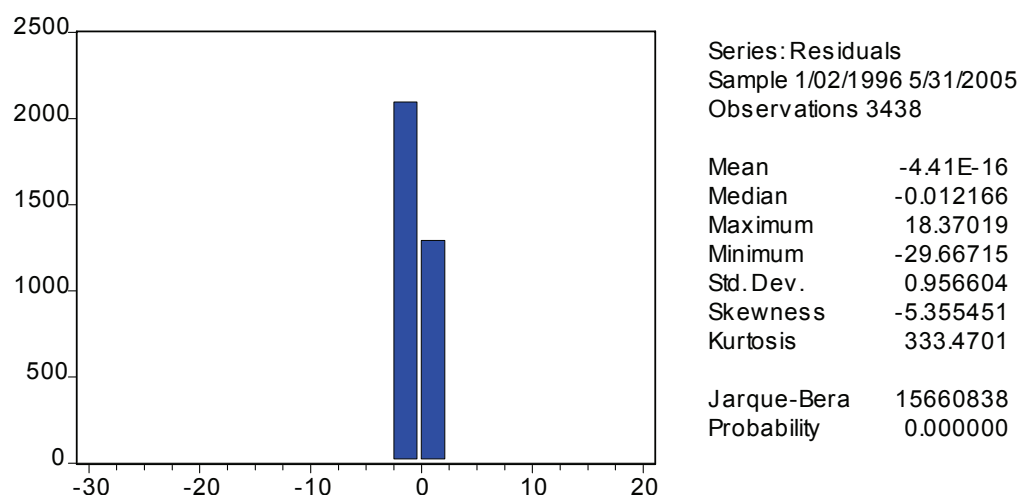
Figur 5-11: Normalitetstest av residualledd for regresjon av ligning (5.3) for områdeprisen i Oslo

Tabell 5-12 viser regresjonsresultatene for en modell med mean reversion for differansen mellom områdepris for Oslo og systempris. Estimering av datasettet får en klar forbedring ved bruk av mean reversion, slik som ved områdepriser. Likevel er ikke resultatet tilfredsstillende, informasjonskriteriet R^2 er kun en tredjedel av ideell verdi, 1.

Mean reversion	R^2	AIC	Schwarz	LL
Uten	0.000000	3.164884	3.166670	-5441.018
Med	0.340146	2.750019	2.753592	-4725.283

Tabell 5-12: Regresjonsresultat for en Ornstein-Uhlenbeck-prosess for prisdifferanse

En normalitetstest for residualleddene i modellen med mean reversion er vist i Figur 5-12. Ut i fra figuren ser man at residualene ikke er normalfordelte. Fordelingen til residualene har en stor negativ skjevhet. Dette impliserer at fordelingen har mange negative ekstremverdier. Kurtosen til fordelinga er svært høy, som viser at fordelingen har fete haler, og at mange av de estimerte verdiene ligger rundt gjennomsnittet. Det finnes ekstreme verdier som er over 35 ganger standardavviket fra gjennomsnittet i de estimerte dataene. Dette er en indikator på at det finnes sprang i den estimerte dataserien.



Figur 5-12: Normalitetstest av residualledd for regresjon av ligning (5.3) for differansen mellom Oslo og system

5.5 GARCH-modellen

Heteroskedastisitet

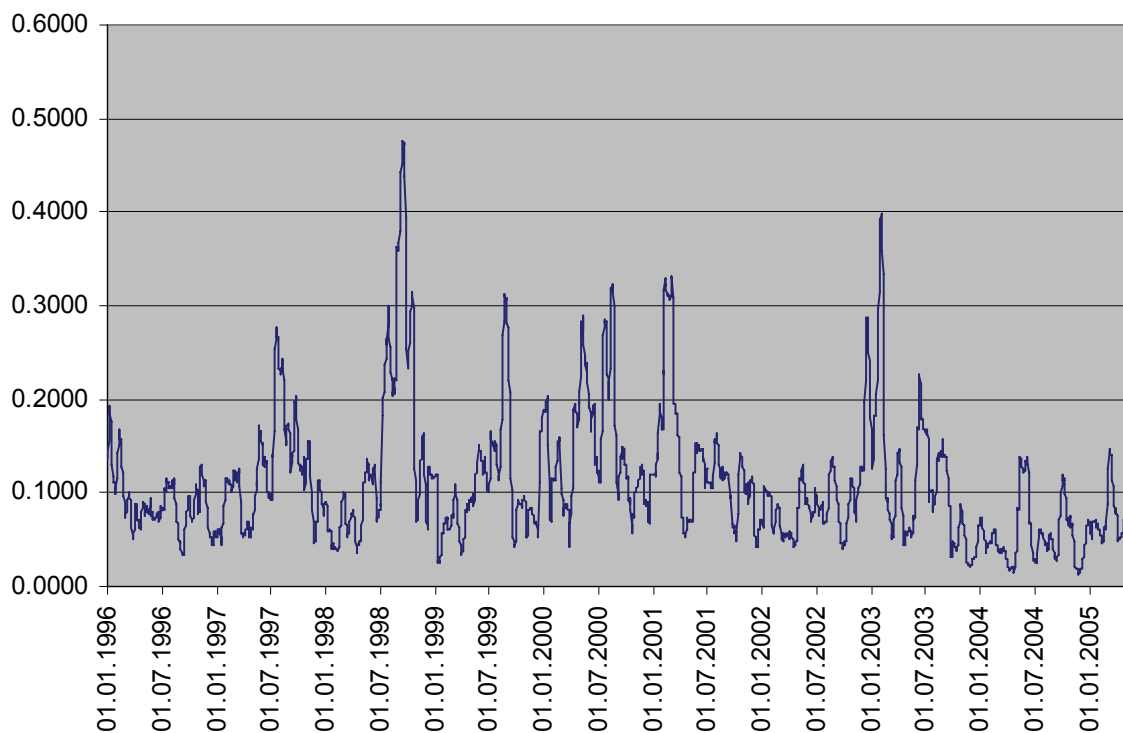
Man kan teste for heteroskedastisitet ved hjelp av en AR-modell. Heteroskedastisitet finnes når variansen til residualene ikke er konstant, $\text{var}(u_t) \neq \sigma^2$. Ved bruk av EViews kan man foreta Whites heteroskedastisitetstest. Nullhypotesen i denne testen sier at det ikke finnes heteroskedastisitet i dataene. I Tabell 5-13 er resultatene fra en test ved hjelp av en AR(1)-modell vist. For områdeprisen er det også tatt hensyn til sesongvariasjon.

	F-statistikk	p-verdi	Obs R^2	p-verdi
Områdepris	47.40341	0.000000	92.34099	0.000000
Prisdifferanse	15.54146	0.000000	191.5617	0.000000

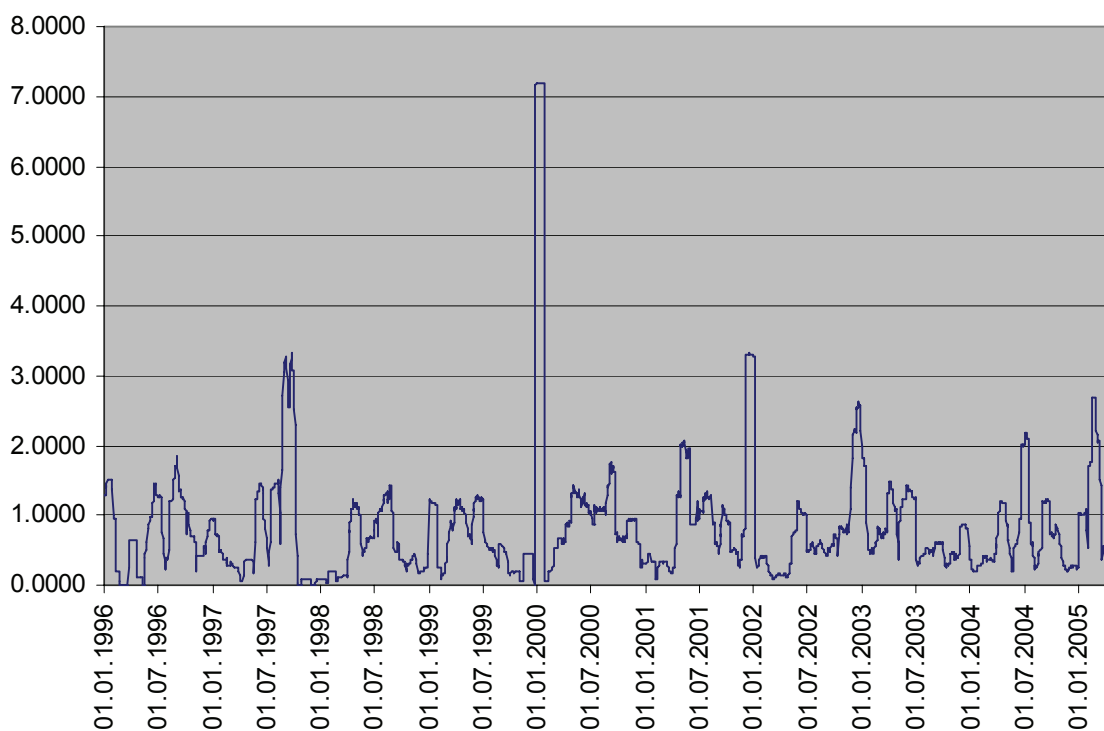
Tabell 5-13: Whites heteroskedastisitetstest for områdepris og prisdifferanse

Resultatene fra denne testen viser at dataseriene er heteroskedastiske. P-verdiene for de to teststatistikkene, F-statistikk og $Obs \cdot R^2$, er tilnærmet lik null. Det vil si at nullhypotesen kan forkastes, det finnes altså heteroskedastisitet i dataene.

Man kan se at variansen endrer seg over tid ved å plote volatiliteten til prisen, slik som i Figur 5-13 og Figur 5-14. Her ser man helt tydelig at volatiliteten endrer seg over tid. Figurene viser at det eksisterer heteroskedastisitet i dataseriene for elektrisitetspris. Det er naturlig siden strømpriser har en konveks tilbudskurve. Når man befinner seg høyt i tilbudskurven vil en liten forandring i etterspørsel føre til en større forandring i prisen enn når man befinner seg lavere i tilbudskurven. Dette vil føre til at man observerer forskjellig volatilitet etter hvor nært kapasitetsbegrensingen systemet er.



Figur 5-13: Volatilitet beregnet med 30 dagers rullerende vindu for logaritmen til områdeprisen til Oslo



Figur 5-14: Volatilitet beregnet med 30 dagers rullerende vindu for prisdifferansen mellom systemprisen og Oslo

Områdepriser

EViews ble brukt til å estimere ulike GARCH-modeller. Regresjonsresultatene av modellene med AR(1) i hovedligningen som oppnådde best resultat er vist i Tabell 5-14. I modellene er det også tatt hensyn til sesongvariasjon, slik at hovedligningen i regresjonen med AR(1) ser slik ut:

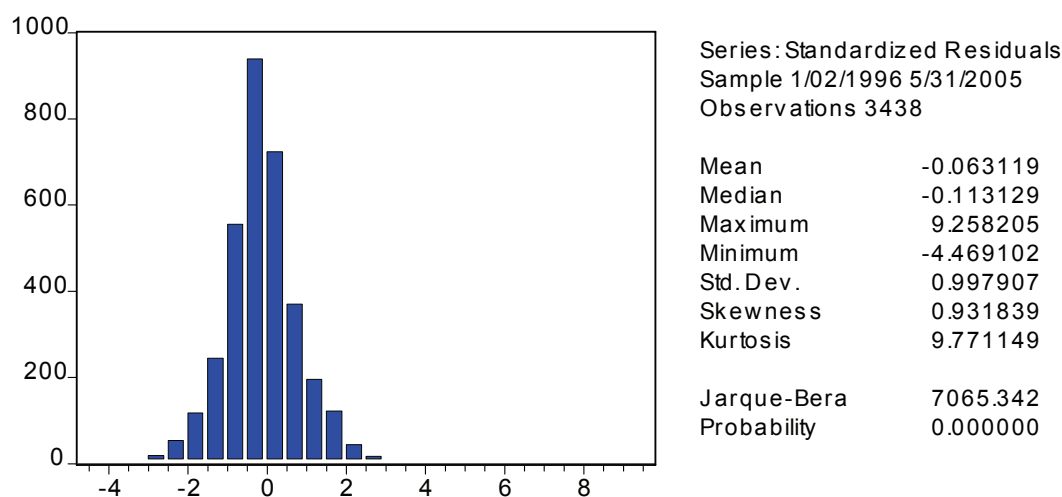
$$y_t = \sum_{i=Jan}^{Des} \alpha_i \delta_i + \phi y_{t-1} + u_t \quad (5.4)$$

Variansligningen i regresjonen er gitt i ligning (4.11) for GJR-modellen og i ligning (4.10) for GARCH-modellen.

	R^2	AIC	Schwarz	LL
AR-GARCH	0.968008	-2.564707	-2.536120	4424.731
AR-GJR	0.968345	-2.622861	-2.592487	4525.698

Tabell 5-14: Resultater fra EViews for asymmetriske GARCH-prosesser for områdepris

Ut i fra informasjonskriteriene i Tabell 5-14 ser man at en GJR-modell gir et litt bedre resultat enn en vanlig GARCH-modell. R^2 er nærmere 1 for GJR enn for GARCH, som indikerer at de estimerte verdiene til GARCH-modellen er nærmere de observerte verdiene enn de estimerte verdiene til GJR-modellen. De andre informasjonskriteriene, AIC og Schwarz, er lavere for GJR enn for GARCH, som viser at GJR-modellen også er en bedre tilnærming når både tilpasning til de observerte dataene og antallet frihetsgrader blir evaluert. Alle parametrene for GARCH og GJR med AR i hovedligningen er signifikante ved 5 % signifikansnivå.



Figur 5-15: Normalitetstest for residualene i AR-GJR-modellen

Den deskriptive statistikken til residualene fra AR-GJR-modellen er gitt i Figur 5-15. Her ser man at skjevheten til residualfordelingen er noe positiv. Kurtosen er over tre ganger høyere enn for en vanlig normalfordeling. Det kan altså avvise at residualene er normalfordelte. Den

høyeste verdien til residualene er over 9 standardavvik større enn gjennomsnittet, noe som tyder på at det finnes prissprang.

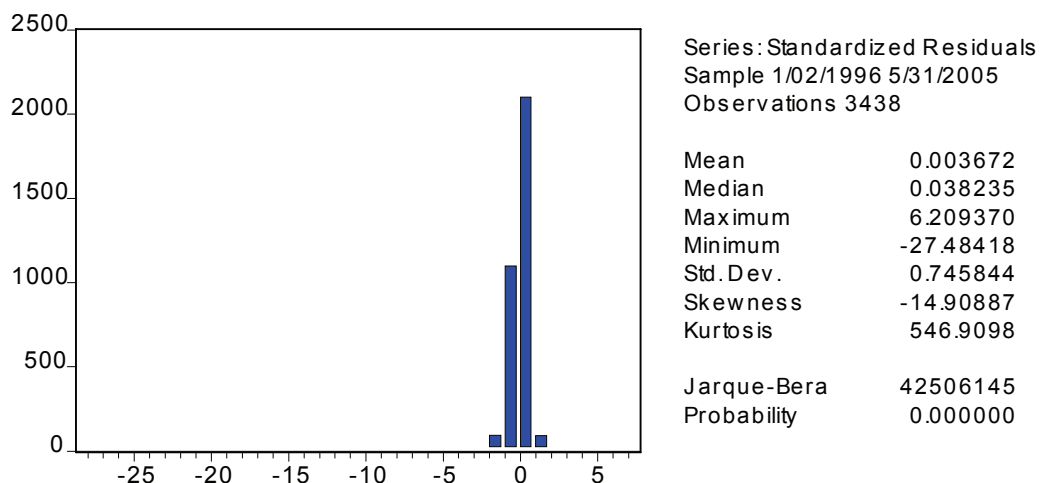
Prisdifferanse

Resultatene for en GARCH- og en AR-GARCH-prosess er vist i Tabell 5-15. I disse modellene er det ikke tatt hensyn til sesongvariasjon.

	R^2	AIC	Schwarz	LL
AR-GARCH	0.300347	2.541416	2.550349	-4363.694
AR-GARCH-M standardavvik	0.403171	2.598072	2.608792	-4460.086

Tabell 5-15: Resultater fra EViews for asymmetriske GARCH-modeller for prisdifferanse

For AR-GARCH-modellen ble resultatet at noen av koeffisientene til modellen ikke er signifikante med et 5 % signifikansnivå. AR-GARCH-M med standardavvik som et ledd i hovedligningen oppnådde både konvergens og fikk signifikante koeffisienter. Resultatene fra EViews for AR-GARCH-M med standardavvik er ikke optimale. R^2 er kun 0,4, hvor 1 er optimal tilpasning til dataserien. Selv om resultatene til AR-GARCH-M modellen er bedre enn AR-GARCH-modellen, er parameterne mer ustabile. Vedlegg F viser at δ , koeffisienten for standardavviket i hovedligningen, er svært ustabil. Dette er den parameteren som beskriver den største forskjellen mellom modellene. På grunn av denne ustabiliteten bli GARCH modellen foretrukket fremfor GARCH-M modellen.



Figur 5-16: Normalitetstest for residualene til AR-GARCH-modellen med standardavvik

Gjennomfører man en normalitetstest for residualene til AR-GARCH modellen, kan man se at disse er langt fra en normalfordeling. I Figur 5-16 ser man at fordelingen har en svært høy kurtose og en negativ skjevhet. Den mest ekstreme verdien, minimumsverdien, er mer enn 37 ganger standardavviket unna gjennomsnittsverdien.

5.6 Spranganalyse

Selv om GARCH-modellene gir en bedre beskrivelse av prosessen er det likevel et stykke igjen før avvikene fra regresjonen er normalfordelte og kan klassifiseres som BLUE¹⁷. Fremdeles er det et problem med fete haler. En mulighet er å beskrive prismodellen med en sprangprosess.

Områdepriser

Vi har brukt filtreringsalgoritmen beskrevet i kapittel 4.5 på en AR(1)-sesong og en AR(1)-GJR-sesong-modell for områdeprisen til Oslo. Regresjonen ble utført for modellene:

$$\text{AR(1):} \quad \tilde{X}_t = \sum_{i=Jan}^{Des} \alpha_i \delta_i + \beta \tilde{X}_{t-1} + U_t \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \text{AR(1)-GJR:} \quad \tilde{X}_t &= \sum_{i=Jan}^{Des} \alpha_i \delta_i + \varphi \tilde{X}_{t-1} + u_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma u_{t-1}^2 d_{t-1} \\ d_{t-1} &= \begin{cases} 1 & \text{hvis } u_{t-1}^2 < 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Hvor \tilde{X} er beskrevet i kapittel 4.5, og

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{for } i \text{ lik måned } i \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (5.7)$$

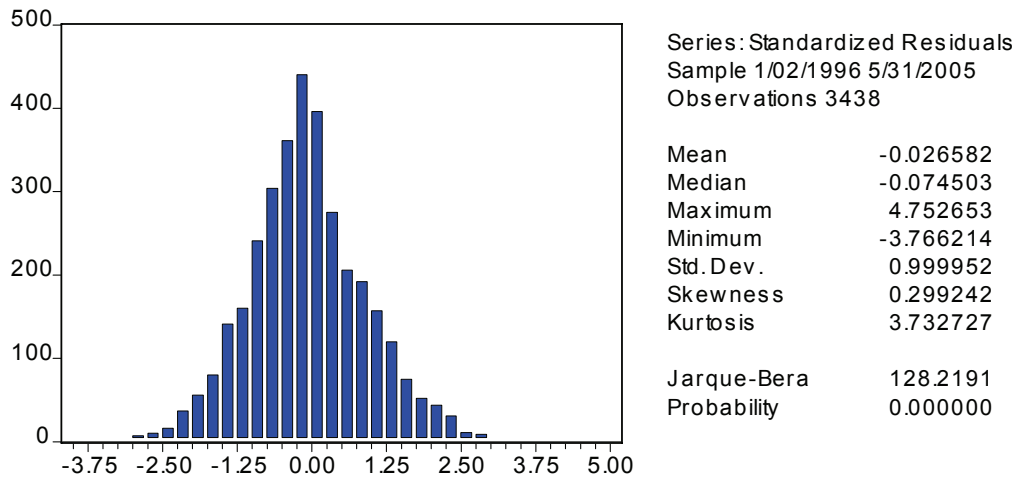
Med filter	R ²	AIC	Schwarz	LL
AR(1)	0.984676	-2.723	-2.700	4694.439
AR(1)-GJR	0.984884	-2.993	-2.963	5161.949

Tabell 5-16: Regresjonsresultat for områdeprisen til Oslo med filter

Tabell 5-16 viser regresjonsresultatene for områdeprisene med filter. Informasjonskriteriene viser at prosessen er modellert bedre for \tilde{X} enn for X ¹⁸. AIC- og Schwarz-kriteriet har bedre verdier for AR(1)-GJR-prosessen enn AR(1)-prosessen. Log likelihood-verdien er også bedre for AR(1)-GJR enn for AR(1). Denne forskjellen blir mindre etter filtrering. Dette kan komme av at når man har tatt vekk sprangene vil man også redusere volatiliteten, og variansen i volatiliteten. Dermed blir GARCH-effekten mindre. Dette er et tegn på at GJR-modellen plukker opp sprang bedre enn hva en AR-modell gjør. For begge modeller filtrerer algoritmen et ganske likt antall sprang, 249 sprang for AR(1) mot 252 sprang for AR(1)-GJR.

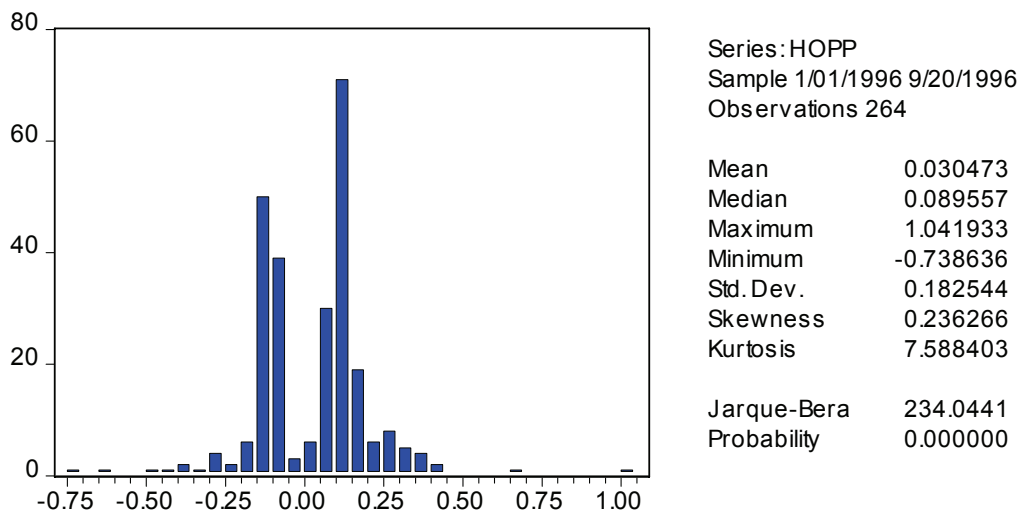
¹⁷ se vedlegg B

¹⁸ Se Tabell 5-14 for resultater uten filter



Figur 5-17: Normalitetstest for residualledd fra AR(1)-GJR etter filtrering av sprang for områdeprisen Oslo

Av Figur 5-17 kan man se at residualleddene til regresjonsligningen med AR(1)-GJR nærmer seg en normalfordeling. Kurtosen er litt høyere enn en normalfordeling, og det også finnes en liten positiv skjevhet i fordelinga. Dette gjør at Jarque-Bera-sannsynligheten fremdeles er dårlig, men denne modellen gir likevel den beste tilnærmingen til en normalfordeling i forhold til de andre modellene som er testet.



Figur 5-18: Normalitetstest for sprangene som er filtrert vekk fra en AR(1)-GJR modell for områdeprisen Oslo

I Figur 5-18 er sprangene testet for normalitet. Man kan se en tilnærmet klokkeform på histogrammet. Denne antyder en god tilnærming til normalfordelingen. Det er en litt positiv skjevhet og en litt høy kurtose i fordelingen, men på grunn av få verdier for J godtar vi en normalfordeling som beskrivelse av sprangene. Escibano mfl (2002) kommer frem til at det ikke er noen stor forskjell mellom konstant og varierende sprangintensitet, så det har derfor blitt brukt konstant sprangintensitet lik sannsynligheten for at et sprang inntreffer for Poisson-prosessen.

Differanse

For differansen mellom Oslo og systempris har filtreringsalgoritmen blitt brukt på en AR(1)- og en AR(1)-GARCH-modell.

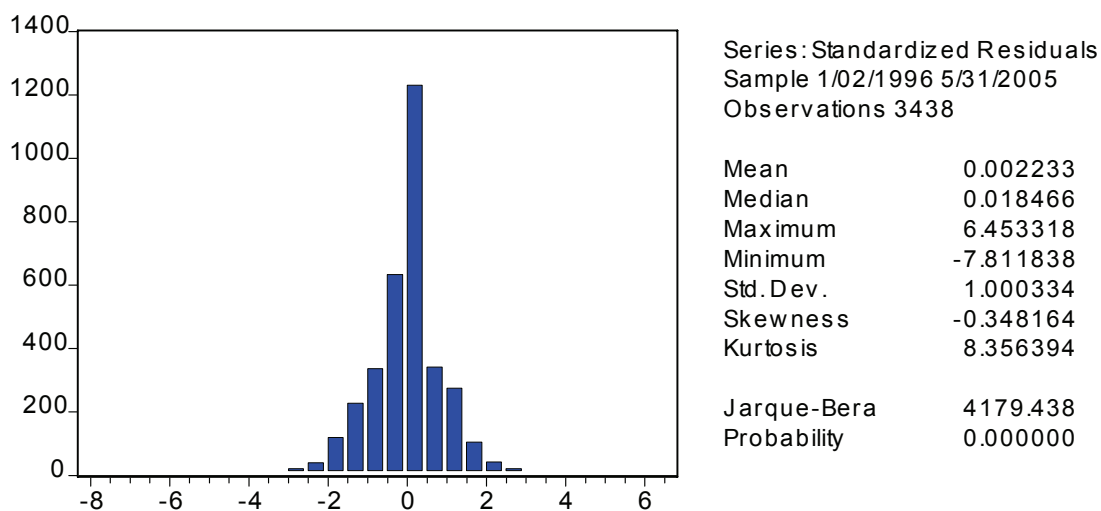
$$\begin{aligned}
 \text{AR(1):} \quad & \tilde{X}_t = \mu + \beta \tilde{X}_{t-1} + U_t \\
 \text{AR(1)-GARCH:} \quad & \tilde{X}_t = \mu + \beta \tilde{X}_{t-1} + U_t \\
 & \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

I Tabell 5-17 ser man at etter filtrering av sprang gir modellene bedre resultater. Informasjonskriteriene forbedrer seg drastisk for begge modellene¹⁹. Dette er ikke særlig overraskende når det av 3438 verdier ble filtrert vekk 984 sprang for AR(1)-modellen og 471 sprang for AR(1)-GARCH-modellen. Både med og uten filter er AR(1)-GARCH-modellen bedre på alle informasjonskriteriene i forhold til AR(1)-modellen. I tillegg har AR(1)-GARCH-modellen færre sprang, dette gjør at denne modellen er en bedre beskrivelse enn en AR(1)-modell. Man ser den samme tendensen her som for områdeprisen, informasjonskriteriene til de to modellene har kommet nærmere hverandre etter filtrering av sprang.

Med filter	R ²	AIC	Schwarz	LL
AR(1)	0.809756	0.652959	0.656533	-1120.437
AR(1)-GARCH	0.810103	0.25439	0.263324	-432.2972

Tabell 5-17: Regresjonsresultat for differansen mellom områdeprisen til Oslo og systempris med filter

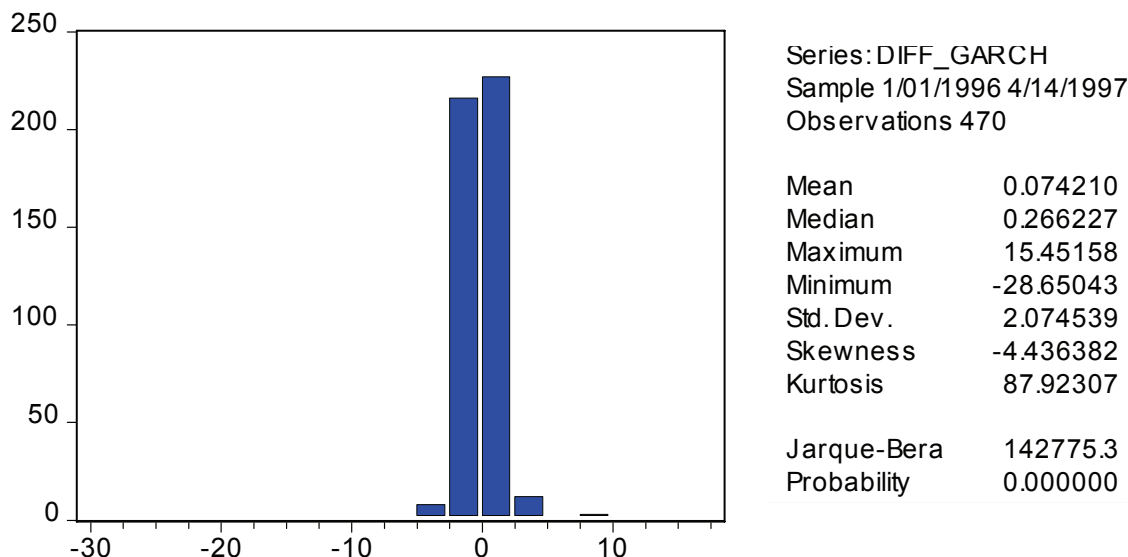
Av Figur 5-19 kan en se at residualleddene til regresjonsligningen for prisdifferansen ikke er normalfordelt. Jarque-Bera-sannsynligheten er fremdeles dårlig, noe som gjenspeiler seg i høy kurtose og negativ skjevhet.



Figur 5-19: Normalitetstest for residualledd fra AR(1)-GARCH-M etter filtrering av sprang for prisdifferanse Oslo- system

¹⁹ Se Tabell 5-15 for resultater uten filter

I normalitetstesten for de filtrerte sprangene fra AR(1)-GARCH-modellen for prisdifferanse ser man også at dataserien for sprang ikke er normalfordelt. I Figur 5-20 kan man se en svært høy kurtose og en betydelig negativ skjevhet. Dette gjør også at Jarque-Bera-statistikken blir svært høy.



Figur 5-20: Normalfordelingsstatistikk for sprangene som er filtrert vekk fra en AR(1) GARCH modell for prisdifferansen Oslo- System

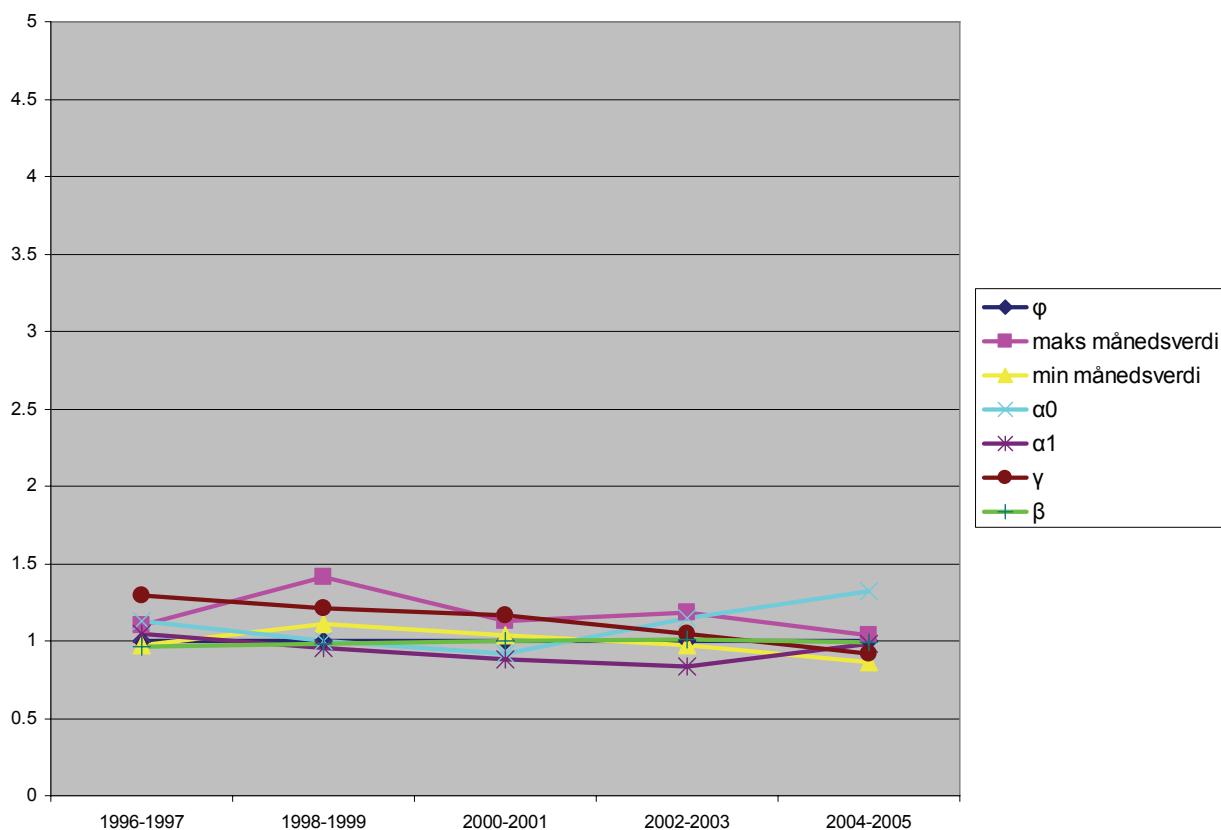
Generelt kan man se at normalfordeling er en bedre tilpasning til modellen for områdepris enn til prisdifferansmodellen. Både residualene fra modellen for områdepris og de filtrerte sprangene stemmer bedre overens med antagelsen om normalfordeling enn residualene og de filtrerte verdiene fra modellen for prisdifferanse.

5.7 Stabilitet til parametere

En viktig egenskap til en modell er at den gir stabile parametere (Eydeland og Wolyniec, 2003). Faren for overfit er stor spesielt når det er lite historiske data å estimere ut i fra. Siden vi kun har historiske data for 10 år har vi valgt å bruke hele datamengden for å estimere parametere. Det eksisterer derfor ikke ”out of sample” data til å vurdere stabiliteten til parametere. Vi har derfor valgt å vurdere stabiliteten ved å subsample testing, ved å ta ut to og to år fra dataene for å se om det påvirker parametere mye.

Figur 5-21 viser verdi for parametere når to år er tatt vekk relativt til parametere når alle årene er med for modellen for områdepriser. Det er kun tatt med maksimum- og minimumsverdi for dummyparametere for å gjøre figuren mer oversiktlig. Man ser at det er en viss ustabilitet i parametere, men at de fleste verdiene er mellom +/- 20 % av verdiene for hele perioden. Det er verdt å merke seg at parametere som varierer mest er relativt små i verdi. For eksempel er α_0 -verdien, som er konstantleddet i variansligningen, i størrelsesorden 10^{-4} . Det er derfor ikke så alvorlig at disse varierer en del siden de ikke vil ha så stor

innflytelse ved bruk av modellen. Siden mean reversion er en av de egenskapene som har forbedret modellen best er den autoregressive parameteren, ϕ , en av de viktigste parameterne. Denne parameteren er svært stabil.

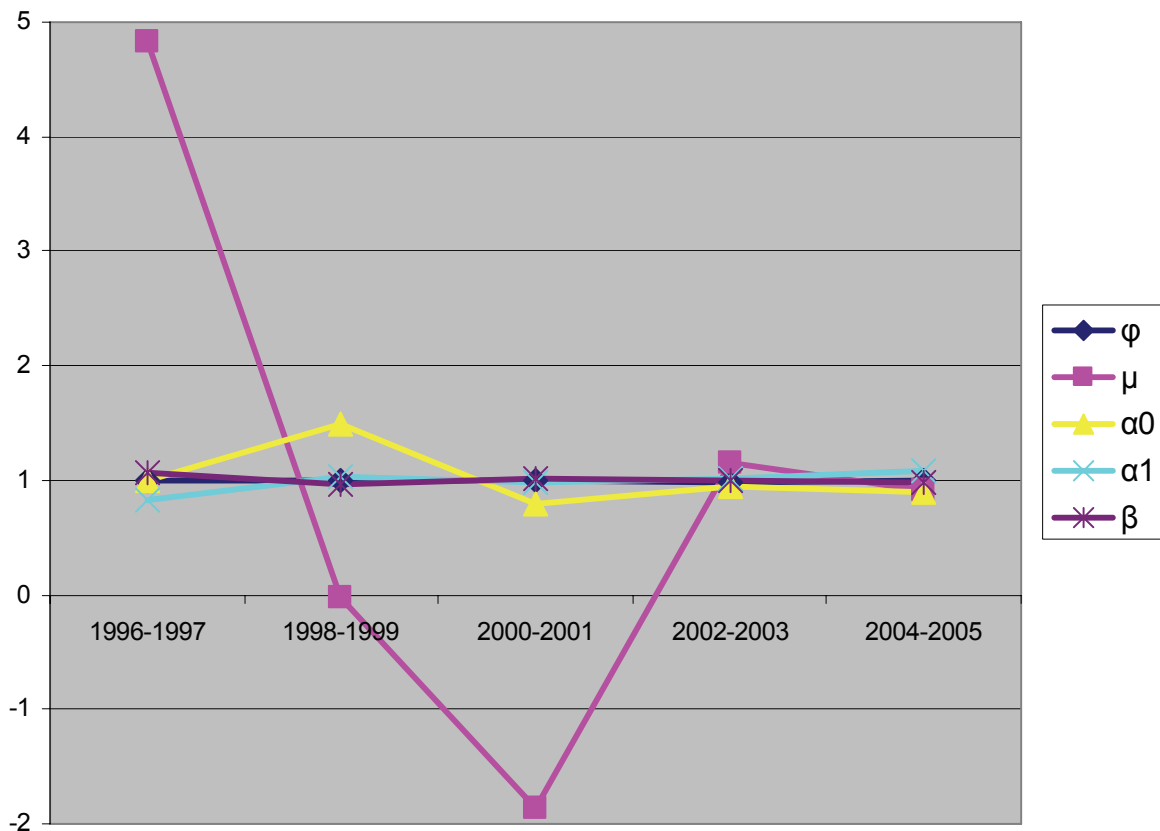


Figur 5-21: Relativ variasjon i parametere for forskjellige dataområder for en AR(1)-GJR-sesong modell for områdepris filtrert for sprang

Sesongparameterne er blant de som varierer mest. Disse parametrene har også ganske lav verdi, typisk 0,02. Det å bruke cosinusvariable i stedet for dummyvariable vil redusere antall sesongvariable fra 12 til 2. Det ble derfor utført samme test som i Figur 5-21 med cosinusvariable for å kunne se om disse parametrene ville gi en forbedring i stabiliteten til parametrene. Resultatene i vedlegg G viser at verdiene for cosinusparametrene ikke blir signifikante etter filtrering av sprang. Modellen med cosinusvariable får relativt like verdier på informasjonskriteriene AIC og Schwarz som med dummyvariable. Disse informasjonskriteriene tar hensyn til både tap av antall frihetsgrader og hvor godt modellen er tilpasset dataserien. Figuren i vedlegget viser at det ikke gir noe bedre stabilitet for sesongvariablene ved cosinusrepresentasjon enn ved dummyvariable. Dette gjør at vi vil holde fast ved å modellere sesongvariasjon med dummyvariable.

I Figur 5-22 er det vist den relative forandringen i parametrene til differansen mellom områdepris og systempris for en AR(1)-GARCH-M-modell filtrert for sprang. Denne figuren viser at variansligningen og det autoregressiveleddet har ganske stabile parametere, men at de andre parameterne er mer ustabile. Verdien μ er konstanten i hovedligningen, mens α_0 er

konstanten i variansligningen. Disse verdiene er ganske små, i størrelsesorden 0,003, slik at endringen ikke vil påvirke modellen i særlig grad.



Figur 5-22: Relativ variasjon i parametere for forskjellige dataområder for en AR(1)-GARCH-modell for prisdifferanse filtrert for sprang

5.8 Sammenligning av områdene

Sammenligning av områdepriser

Tabell 5-18 viser informasjonskriteriene fra regresjon av en AR(1)-GJR-JDP-sesongmodell for områdeprisene Oslo, NO2, Sverige og Finland. Man ser at modellen gir best beskrivelse av områdeprisen for Oslo, men de andre er også godt beskrevet. Dette er i samsvar med Tabell 5-6, hvor det ble funnet at de forskjellige områdeprisene har en høy positiv korrelasjon. Alle modellene gir signifikante parametere.

	R^2	AIC	Schwarz	LL
Oslo	0.984884	-2.99299	-2.962616	5161.949
NO2	0.980345	-2.73973	-2.709362	4762.607
Sverige	0.960177	-2.14725	-2.116871	3708.114
Finland	0.978374	-2.62380	-2.586728	3568.317

Tabell 5-18: Sammenligning av regresjonsverdier for områdeprisene

Sammenligning av prisdifferanse

Det er også blitt foretatt en sammenligning av de forskjellige prisseriene som er generert på bakgrunn av prisdifferansen mellom områdepriser og systempris. Modellen som er brukt her er en AR(1)-GARCH-JDP-modell. Tabell 5-19 viser de forskjellige informasjonskriteriene til de ulike prisseriene. Ut i fra denne tabellen kan man se at resultatene er ikke like bra for alle prisdifferanser.

	R^2	AIC	Schwarz	LL
Oslo	0.810103	0.25439	0.263324	-432.2972
NO2	0.792091	0.905235	0.915955	-1550.099
Sverige	0.815935	0.845844	0.856564	-1448.006
Finland	0.97209	-0.932848	-0.919763	1268.609

Tabell 5-19: Sammenligning av regresjonsverdier for prisdifferanser

Modellen vi har kommet fram til er på grunnlag av prisserien til differansen mellom områdepris for Oslo og systempris. I tabellen kan man se at informasjonskriteriene til denne prisserien har gode verdier. Det samme gjelder prisserien til differansen mellom områdepris for Finland og systempris. I Tabell 5-8 kom det frem at differansen for Oslo og Finland er positivt korrelert med hverandre. Ut i fra dette er det naturlig at prisserien for Finland også passer bra til den modellen vi har funnet for prisserien til Oslo. I korrelasjonsmatrisen kom det også frem at prisserien til Oslo er negativt korrelert med prisseriene til NO2 og Sverige. Det er derfor ingen overraskelse at disse dataseriene ikke samsvarer like godt med AR(1)-GARCH-JDP-modellen. Det er også verdt å merke seg at for alle prisseriene ble det funnet koeffisientverdier som ikke er signifikante.

6 Diskusjon og modellvalg

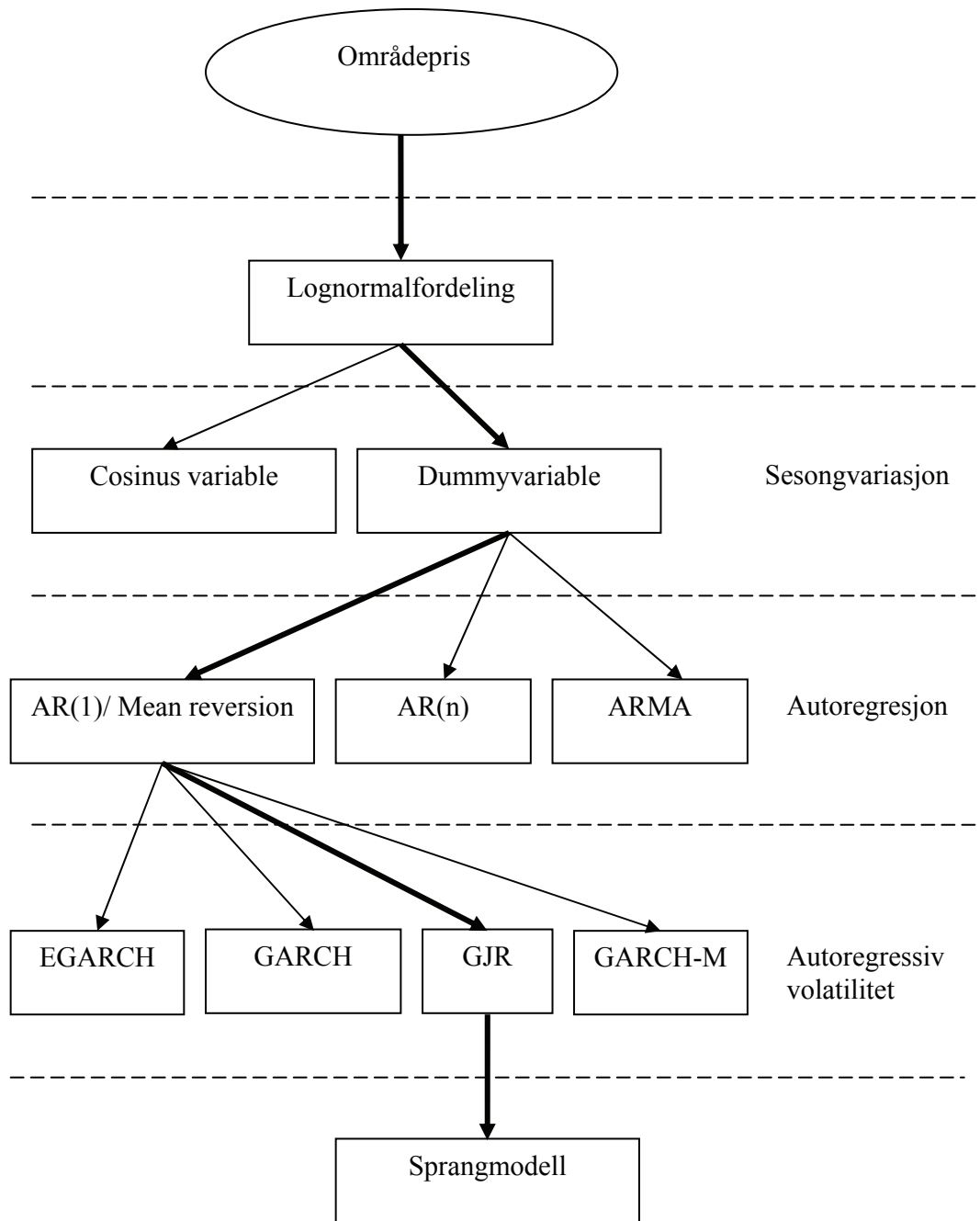
Figur 6-1 viser en oversikt over de modellvalgene vi har kommet frem til for områdeprisene. En pil inn i en boks viser at vi har testet modellen, mens en pil ut av en boks viser at vi har tatt med modellen videre. Man kan dermed lese at vi for eksempel har forkastet ARMA-modeller. De tykkere pilene viser modellveien frem til den modellen vi har funnet til å prestere best, en AR-GJR-sprang modell med sesongvariasjon.

Det er tydelig at det eksisterer sesongvariasjon for områdeprisene. Dette er som ventet siden områdeprisene har lik fordeling som systemprisen, og det finnes også mange studier som viser at det er eksisterer sesongvariasjon for systemprisen (se for eksempel Eydeland og Wolyniec, 2003). I modellen med kun sesongvariasjon kommer variasjonene tydelig frem i koeffisientene, se Figur 5-7. Dette er fordi koeffisientene her vil tilsvare et gjennomsnitt av månedsprisen.

Regresjonsresultatene viser at det er ganske liten grad av mean reversion. Dette kommer frem både i kapittel 5.4 og man ser det ved at verdien for AR(1)-leddet i ligningen er nær 1. Likevel gir introduksjonen av mean reversion en av de beste forbedringene i beskrivelsen av prisprosessen. Det er ikke tatt med flere autoregressive ledd eller moving average-ledd siden de ikke gir noen stor forbedring av prosessen. De gir heller ikke noen bedre forståelse for hvordan prisen på NordPool utvikler seg.

Alle testene for heteroskedastisitet viser at det er ikke er konstant volatilitet i residualene. Dette kommer også frem ved at GARCH-modellene presterer bedre enn hva AR-modellene gjør.

Et av de store problemene med modellene som vi har testet er at det er eksisterer fete haler i fordelinga til prisseriene. Selv ikke de mest avanserte GARCH-modellene unngår dette problemet. Filtrering og modellering av sprang gjør at modellene tilpasser seg data på en bedre måte. Introduksjonen av sprang ”spiser opp” en god del av den positive effekten ved å modellere heteroskedastisitet. Grunnen til dette er at filtreringen av sprangene gjør at mange av de store prissvingningene forsvinner. Dette betyr at volatiliteten ikke vil svinge like mye som før filtrering av sprang. Dermed minker også ”GARCH-effekten” siden den er avhengig av residualene. Kombinasjonen av AR(1)-GJR og sprang gir likevel bedre resultater enn hva en AR(1) med sprang gir, men forskjellen mellom modellene blir mindre etter filtrering av sprang.



Figur 6-1: Oversikt over modellvalg for estimering av områdepriser

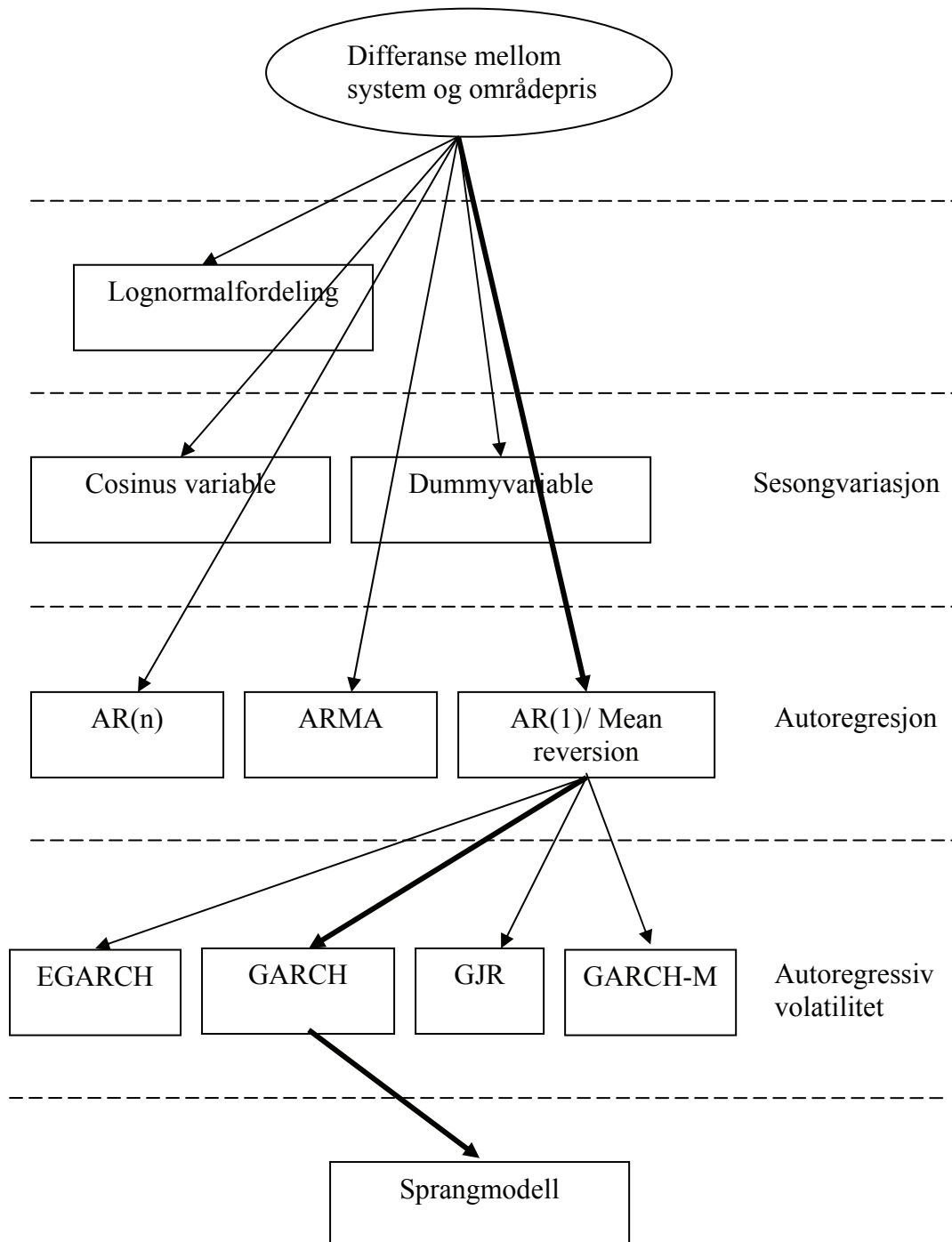
Kombinasjonen av AR(1), GJR, sesong og sprang gir den beste fremstillingen av områdeprisen til Oslo. Dette er kanskje ikke overraskende, siden det er den mest komplekse modellen vi har testet. Denne burde derfor fange opp de fleste av abnormalitetene til strømpriser. Dette gir en viss mulighet for å få ”overfit” i modellen, spesielt når det ikke eksisterer mye historiske data, men ut i fra stabilitetstesten vi har gjennomført gir denne modellen også relativt stabile parametere. Et annet problem med denne modellen kan være at den delen som beskriver prosessen uten sprang blir godt beskrevet, mens sprangprosessen har færre verdier og blir dermed vanskeligere å beskrive.

Den asymmetriske GJR-modellen gir en bedre tilpasning enn en vanlig GARCH-modell. Hvis koeffisienten til dummyvariabelen i en GJR-modell, γ , er større enn null, impliserer det at det er større volatilitet når prisen er på vei ned enn når den er på vei opp. Denne koeffisienten er estimert til en verdi over null for dataserien med områdepris. Dette kan komme av at pristoppen ofte er i januar eller februar, selv om det fremdeles kan komme kaldere perioder enn forventet. Hvis det kommer slike kalde perioder, og det er relativt tomme magasiner på det tidspunktet, vil man kunne få større volatilitet på pris. Usikkerhet om tidspunkt for vårflom vil også kunne gi prisvariasjoner. På høsten vil prisene avhenge mer av verdien av vannet som er i magasinene, samt forventet forbruk om vinteren, og dette er enklere å prognosere på forhånd.

Analyserer man koeffisientene for sesongvariasjon for AR(1)-GJR-modellen ser man at disse ikke gir et like godt bilde av sesongvariasjon som modellen kun for sesongvariasjon gjør. Dette er en effekt av å inkludere en GARCH-prosess i modellen. Denne prosessen vil fange opp en del av variasjonen i prisdatabene, og sesongavhengigheten vil ikke komme like tydelig frem i de estimerte dataene som i de observerte prisdatabene. Det er verdt å merke seg at modellen AR(1)-GJR med sesongvariasjon allikevel oppnår bedre resultater enn en enkel AR(1)-GJR-modell. Dette kan skyldes den økte kompleksiteten til modellen, som gjør at estimeringen vil fange opp mer av de unormale svingningene i prisserien.

Modellen passer bra for alle områdene på NordPool som vi har testet. Dermed stemmer antagelsen vi gjorde i kapittel 5.2 om at områdeprisene er likt fordelt, og en modell som beskriver et område vil også kunne beskrive de andre områdene godt. Dette er naturlig siden prisen settes sentralt og områdeprisene vil følge systemprisen. I tillegg har de forskjellige områdene ganske like forbruksmønstre selv om produksjonsmiksen kan være forskjellig.

Figur 6-2 viser modellvalgene for differansen mellom områdepris og systempris. Disse valgene er illustrert på samme måte som i Figur 6-1. Modelleringen av differansen mellom områdepris og systempris er generelt vanskeligere enn modellering av områdeprisen. En modell av differansen må kunne bli negativ, slik at man ikke kan se på logpriser. I tillegg kan overføringene mellom to områder være svært varierende, noe som fører til at prisdifferansene blir svært volatile og preget av sprang. Den beste beskrivelsen av de testede modellene blir gitt av en AR-GARCH med JDP. Denne modellen er kun en av få modeller som gir signifikante koeffisienter for prisdifferansen. Ved gjennomføring av en stabilitetstest ble det funnet at parametrene i denne modellen ikke er særlig stabile. En modell med GARCH i stedet for GARCH-M ble funnet til å prestere bedre i forhold til stabilitet i parametrene.



Figur 6-2: Oversikt over modellvalg for estimering av differansen mellom områdepris og systempris

Som nevnt tidligere er prisdifferansen preget av sprang, og det er flere observerte sprang for differansen enn for områdeprisen. Dette funnet gjør at en Lévy-prosess kan tenkes å beskrive differansen bedre. En annen mulighet for å beskrive differansen kan være ved å modellere områdepris og systempris hver for seg, og så ta differansen av dem etterpå. Det er da trolig at

man må se på hvordan de forskjellige områdeprisene korrelerer med hverandre. Dette gir mening ut i fra det økonomiske systemet. Systemprisen settes uten overføringsbegrensninger. Når en overføringsbegrensning oppstår er det et område som ikke får importert tilstrekkelig med elektrisitet, og et område som ikke får eksportert nok elektrisitet, sett ut i fra et samfunnsøkonomisk synspunkt. I et slikt tilfelle vil ikke systemprisen kunne opprettholdes i begge områdene. Det vil da være et område med høyere pris og et med lavere pris enn systemprisen. Dette vil likevel ikke si at når en områdepris beveger seg fra systemprisen i en retning, så må summen av de andre områdeprisene bevege seg i den andre retningen. Helningen til tilbudskurven kan være forskjellig i de forskjellige områdene, og man må ta hensyn til mengden elektrisitet som det er behov for å overføre. Dette gjør at modellen kan forbedres betraktelig ved å bruke informasjon om system og overføringskapasitet, for å si noe om muligheten for at det blir begrensninger mellom områdene.

7 Konklusjon

Målet med denne oppgaven var å foreta en økonomisk analyse av kraftpriser, og lage en modell som estimerer områdeprisene.

Ved hjelp av historiske prisdata har vi kommet fram til to ulike modeller, en for områdepriser, og en for differansen mellom områdepriser og systempris. De forskjellige områdene har like fordelinger, og det har derfor blitt brukt Oslo som analyseområde for valg av modell. I prosessen med å finne frem til de modellene som samsvarer mest med de historiske data er det blitt testet og forkastet en rekke modeller.

For estimering av områdeprisen har vi funnet at modellen AR(1)-GJR-sesong med sprang presterer best. Denne modellen gir gode resultater for alle de testede områdeprisene i det nordiske kraftmarkedet, og alle de estimerte koeffisientene er signifikante ved et 5 % signifikansnivå. Denne modellen har også relativt stabile parametere.

Det viste seg å være vanskeligere å modellere differansen mellom områdepris og systempris. Modellen som gir best tilpasning til dataene er AR(1)-GARCH-M med JDP. Denne modellen fungerer ikke like bra på de forskjellige prisdifferansene. Dette medfører at modellen er best tilpasset den prisdifferansen vi har brukt til å finne den optimale modellen ut i fra de vi har testet. I de estimerte modellene for de ulike prisseriene for differansen mellom områdepris og systempris forekommer det parametere som ikke er signifikante ved et 5 % signifikansnivå. I stabilitetstesten kom det fram at verdien på parametrene ikke er særlig stabile. Likevel er dette den beste modellen for prisdifferansen som vi har funnet.

8 Kritikk og videre arbeid

I denne oppgaven har hovedfokuset vært å beskrive områdeprisen best mulig. I videre arbeid vil det være interessant å se mer på hvordan resultatene kan brukes i praksis. Spesielt prising av CfD-kontrakter vil være et tema som bør belyses. Dette er også et interessant tema for Troms Kraft. Noen av utfordringene med dette kan være prising av lite likvide kontrakter, samt å finne en god modell for prisdifferansen, som har vist seg å være vanskelig å beskrive. Det kan være interessant å se videre på om en Lévy-prosess kan beskrive prisdifferansen bedre. Det er også ønskelig å se på hvordan man kan bruke informasjon om systemet og fra markedet bedre.

En annen kritikk ved modellen er at det ikke er tatt hensyn til vekting av data. Man kan se av Figur 4-1 at det kan virke som det er en forskjell i prisprosessen etter 2001-2002. GARCH-modellene skal fange opp deler av denne forandringen i prisene, siden de modellerer forandring i volatiliteten. Det kan allikevel være interessant å sammenligne resultatene man får ved å bruke en form for vekting av dataene med resultater uten vekting av data.

9 Referanser

Bjørndal, Mette, Knut Jörnsten og Virginie Pignon (2003), *Congestion Management in the Nordic Power Market – Counter Purchases and Zonal Pricing*, Journal of Network Industries, 4, 273-296

Bjørndal, Mette og Kurt Jörnsten (2001), *Koordinering av nordiske systemoperatører i kraftmarkedet – gevinster ved bedret kapasitetsutnyttelse og mer fleksibel prisområdeinndeling*, SNF rapport nr.29

Bjørndal, Mette og Knut Jörnsten (2001), *Zonal Pricing in a Deregulated Electricity Market*, The Energy Journal, 22, 51-73

Bollerslev, T (1986), *Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, 31, 307-327

Borovkova, S., Permana, F. J., (2004), *Modelling electricity prices by the potential jump-diffusion*. Proceedings of the Stochastic Finance 2004 Conference.

Brooks, C. (2002), *Introductory Econometrics for Finance*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Campbell, John Y, Andrew W. Lo og A. Craig MacKinlay (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton: Princeton University Press

Cartea, A., Figueroa, M. G., (2005), *Pricing in electricity markets: A mean reverting jump diffusion model with seasonality*. Applied Mathematical Finance, kommende.

Clewlow, L. and C. Strickland, (2000), *Energy derivatives: Pricing and Risk Management*, London: Lacima Publications

Cortazar, G., Schwartz, E., Riera F. (2000), *Market-based Forecasts of Commodity Prices using Futures*, 4th Annual Conference Real Options: Theory Meets Practice International, Cambridge University/ROG Cambridge, July 7-8.

Darnell, A.C (1994), *A Dictionary of Econometrics*, Cheltenham: Edward Edgar Publishing Limited

Escribano, A., J.I. Peña and P. Villaplana, (2002), *Modeling electricity prices: international evidence*, Universidad Carlos III, working paper

- Eydeland A and Wolyniec K, (2003), *Energy and Power Risk Management: New Developments in Modeling, Pricing and Hedging*, New York: John Wiley & Sons
- Fleten, Stein Erik og Jacob Lemming (2003), *Constructing forward price curves in electricity markets*, *Energy Economics*, 25, 409-424
- Glosten, L.R, Jagannathan, R. and Runkle, D.E (1993), *On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*, *The Journal of Finance*, 48(5), 1779-1801
- Johannes, M., N. G. Polson, and J. Stroud. (2002), *Nonlinear Filtering of Stochastic Differential Equations with Jumps*. Columbia University, Unpublished manuscript
- Johnson B. and G. Barz, (1999), *Selecting stochastic process for modelling electricity prices*, *Energy Modelling and the Management of Uncertainty*, RiskPublications 3-21
- Knittel, C.R. and M.Roberts, (2001), *An empirical examination of deregulated electricity prices*, UCEI Working Paper-087, tilgjengelig på:
<http://www.ucei.berkeley.edu/ucei/PDF/pwp087.pdf>
- Koekebakker, Steen (2001), *Forward curve dynamics in the Nordic electricity market*, Working paper, Agder University College, Norway.
- Kristiansen, Tarjei (2004), *Congestion management, transmission pricing and area price hedging in the Nordic region* *Electrical Power and Energy Systems* 26 (2004) 685 – 695
- Kristiansen, Tarjei (2004), *Risk Management in Electricity Markets Emphasizing Transmission Congestion*, Doktoravhandling NTNU
- Lucia, J og Schwartz, E (2002), *Electricity Prices and Power Derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange* *Published Review of Derivatives Research*, 5(1), 5–50
- McDonald, Robert L. (2003), *Derivatives Markets*, Boston: Addison Wesley.
- NordPool (2004), *Trade at NordPools financial market*, tilgjengelig på www.nordpool.no
- NordPool (2004), *The Nordic Power Market*, tilgjengelig på www.nordpool.no
- Pilpovic, Dragana (1998), *Energy Risk: Valuing and Managing Energy Derivatives*, New York: McGraw-Hill
- Pirrongo C. and M. Jermakyan, (1999), *The price of power: the valuation of power and weather derivatives*, WP, Olin School of Business, Washington University.
- Popova, Julia, (2004), *Spatial Pattern in Modeling Electricity Prices: Evidence from the PJM Market*. West Virginia University Working Paper.
- Rottmann, Karl (1999), *Matematisk formelsamling*, Oslo: Spektrum forlag

Schwartz, Eduardo S. (1997), *The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging*, Journal of Finance, (July 1997), 923-973.

Simonsen, Ingve (2004), *Volatility of power markets*, Physica A 355, 10-20

Sollibakke, Per Bjarte (2001), *A stochastic volatility model specification with diagnostics for thinly traded equity markets*, Journal of Multinational Financial Management, 11, 385-406

Taylor, S.J (1986), *Forecasting the Volatility of Currency Exchange Rates*, International Journal of Forecasting 3, 159-170

Walpole, Myers, Myers, and Ye. (2002), *Probability & statistics for engineers & scientists*, Pearson Education, pages 126–131,

Wangensteen, Ivar (2005), *Kompendium i Kraftmarkeder*, kompendium i faget TET 4185 ved NTNU

Wangensteen, Ivar og Sverre Aam (2001), *Electricity transmission/distribution network as a transport system and a physical trading place*, World Energy Council 18th Congress, Buenos Aires, October 2001

Vedlegg A – Statistikk: begreper og tester

I dette vedlegget blir de viktigste begreper og tester innen statistikken som er benyttet i oppgaven forklart.

1. **Skjevhet** er et mål på asymmetri i fordelinga til serien rundt gjennomsnittet. Skjevhet er beregnet som:

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - \bar{y}}{\hat{\sigma}} \right)^3 \quad (\text{A.1})$$

hvor $\hat{\sigma}$ er basert på den biaserte estimatoren for varians.

Skjevheten til en symmetrisk fordeling, slik som normalfordelingen, er null. Positiv skjevhet betyr at fordelingen har en lang høyre hale og negativ skjevhet betyr at fordelingen har en lang venstre hale.

2. **Kurtose** er et mål på spissheten eller flatheten til fordelinga til serien. Kurtose blir beregnet slik:

$$K = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - \bar{y}}{\hat{\sigma}} \right)^4 \quad (\text{A.2})$$

hvor $\hat{\sigma}$ er basert på den biaserte estimatoren for varians.

Kurtosen til en normalfordeling er 3. Hvis kurtosen overstiger 3, er fordelingen spisset (lepotkurtisk) i forhold til normalfordelingen. Hvis kurtosen er mindre enn 3, er fordelingen flat (platykurtisk) i forhold til normalfordelingen.

3. **Jarque-Bera** er en statistikktest for å finne ut om dataseriene er normalfordelte. Testen måler differansen i skjevhet og kurtose mellom serien og en normalfordeling. Formelen er som følger:

$$JB = \frac{N-k}{6} \left(S^2 + \frac{1}{4}(K-3)^2 \right) \quad (\text{A.3}) \quad \text{hvor}$$

S ser skjevheten, K er kurtosen, og k er antallet estimerte koeffisienter som er benyttet til å lage dataserien.

Under nullhypotesen for en normalfordeling er Jarque-Bera-statistikken χ^2 -fordelt med to frihetsgrader. Sannsynligheten som blir oppgitt er sannsynligheten for at Jarque-Bera-statistikken overskrider den observerte verdien under nullhypotesen, i absoluttverdi. En liten sannsynlighetsverdi fører til forkastning av nullhypotesen, om at fordelingen er normalfordelt.

4. **t-statistikk** er beregnet som forholdet mellom en estimert koeffisient og dens standardavvik. Dette er brukt til å teste hypotesen om at en koeffisient er lik null. For å tolke t-statistikken må man se nærmere på sannsynligheten for å observere t-

statistikken gitt at koeffisienten er lik null. Denne sannsynligheten er kjent som p-verdi.

5. **p-verdi** er sannsynligheten for å få en t-statistikk så ekstrem som den virkelig observerte, under antagelsen om at feilleddene er normalfordelte, eller at de estimerte koeffisientene er asymptotisk normalfordelte. P-verdien kalles også det marginale signifikansnivået. Har man en gitt p-verdi, kan man med en gang si om man forkaster hypotesen om at den virkelige koeffisienten er null mot et to-sidig alternativ som er forskjellig fra null eller ikke. For eksempel, hvis man utfører en test med 5 % signifikansnivå, og p-verdien er lavere enn 0,05, er dette et bevis på å forkaste nullhypotesen om at koeffisienten er lik null. P-verdiene er beregnet ut i fra en t-fordeling med T-k frihetsgrader.

6. **R²** -statistikken måler suksessen for regresjonen i å forutse verdiene til den avhengige variabelen innen dataserien. R² er et mål på kvadratet av korrelasjonskoeffisientene mellom y og \hat{y} , det vil si kvadratet av korrelasjonen mellom verdiene til den avhengige variabelen og de korresponderende tilpassede verdiene fra modellen. R² kan bli beregnet slik:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_t \hat{u}_t^2}{\sum_t (y_t - \bar{y})^2} = \frac{\sum_t (y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_t (y_t - \bar{y})^2} \quad (\text{A.4})$$

hvor u_t^2 er kvadratsummen av feilleddene, y er de observerte dataene for den avhengige variabelen, \bar{y} er gjennomsnittsverdien for dataene, og \hat{y} er de tilpassede verdiene.

R² skal alltid ligge mellom 0 og 1. En verdi av R² nærme 1 indikerer at modellen forklarer nesten all variasjon av den avhengige variabelen rundt sitt gjennomsnitt. En verdi nærme 0 vil si at modellen ikke passer bedre enn gjennomsnittsverdien til den avhengige variabelen. R² kan være null hvis regresjonen ikke inneholder en konstant.

7. **SSR** – sum of squared residuals, er et informasjonskriterium. Denne verdien er beregnet ved å finne feilleddene til hver observasjon, ta kvadraten av disse, og summere de sammen:

$$\sum_t \hat{u}_t^2 = \sum_t (y_t - \hat{y}_t)^2 \quad (\text{A.5})$$

hvor \hat{u} er feilleddene, y er de observerte verdien av den avhengige variabelen og \hat{y} er de tilpassede verdiene i modellen.

Jo mindre SSR er, dess bedre er modellen tilpasset de observerte verdiene. Modellen med minst SSR er da å foretrekke.

8. **AIC** (Akaike Information Criterion) (Akaike, 1971) er et mål for hvor bra den statistiske modellen er tilpasset dataene. Ideen bak dette informasjonskriteriet er å undersøke kompleksiteten til modellen samt tilpasningsdyktigheten til dataserien, for å produsere et mål som balanserer mellom disse to. Formelen for AIC er gitt ved:

$$AIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2k}{T} \quad (\text{A.6})$$

hvor $\hat{\sigma}^2$ er variansen til feilleddene, k er totalt antall estimerte parametere og T er antallet observasjoner i dataserien. En modell med mange parametere vil gi en veldig god tilpasning til dataene, men vil ha få frihetsgrader, og vil være til begrenset nytte. Den foretrukne modellen er den med lavest AIC-verdi.

- 9. Schwarz criterion**, eller Schwarz Bayesian Information Criterion, er et alternativ til AIC, som pålegger en større straff for ekstra koeffisienter i regresjonsmodellen. SBIC blir beregnet slik:

$$SBIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{k}{T} \ln T \quad (\text{A.7})$$

hvor $\hat{\sigma}^2$ er variansen til feilleddene, k er totalt antall estimerte parametere og T er antallet dataobservasjoner.

Den beste modellen er den med lavest verdi på kriteriet.

- 10. F-statistikk** tester hypotesen om at alle koeffisientene, unntatt konstanten, i en regresjon er null. For minste kvadraters metode-modeller er F-statistikken beregnet som:

$$F = \frac{R^2 / (k - 1)}{(1 - R^2) / (T - k)} \sim F(k - 1, T - k) \quad (\text{A.8})$$

hvor k er totalt antall estimerte parametere og T er antallet dataobservasjoner. Under nullhypotesen med normalfordelte feilledd, vil denne statistikken ha en F-fordeling lik $F(k - 1, T - k)$.

Den tilhørende p-verdien er det marginale signifikansnivået for F-statistikken. Hvis p-verdien er mindre enn signifikansnivået man tester, vil man forkaste nullhypotesen om at alle koeffisientene er lik null.

- 11. Korrelasjon** er et numerisk mål på styrken av det lineære forholdet mellom to tilfeldige variable. Korrelasjon refererer til avvik for to variable fra uavhengighet. Korrelasjonen ρ_{xy} mellom to tilfeldige variabler X og Y med forventningsverdier μ_x og μ_y og standardavvik σ_x og σ_y er definert som:

$$\rho_{xy} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{E((X - \mu_x)(Y - \mu_y))}{\sigma_x \sigma_y} \quad (\text{A.9})$$

Siden $\mu_x = E(X)$ og $\sigma_x^2 = E(X^2) - E^2(X)$, og likeså for Y , kan vi også skrive:

$$\rho_{xy} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - E^2(X)}\sqrt{E(Y^2) - E^2(Y)}} \quad (\text{A.10})$$

Korrelasjon er kun definert hvis begge standardavvikene er endelige, og i hvert fall en av dem ikke er null. Det er en naturlig konsekvens av Cauchy-Schwarz-ulikheten at korrelasjonen ikke kan overskride 1 i absoluttverdi.

Hvis korrelasjonen er 1, er det et økende lineært forhold mellom variablene. Er korrelasjonen -1, er dette et tilfelle av et avtagende lineært forhold. En verdi i mellom -1 og 1 indikerer graden av lineær avhengighet mellom variablene. Jo nærmere

koeffisienten er til enten -1 eller 1, jo sterkere er korrelasjonen mellom variablene. Hvis variablene er uavhengige av hverandre, er korrelasjonskoeffisienten lik 0.

12. Autokorrelasjonsfunksjonen (acf) for en dataserie er estimert ved:

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2} \quad (\text{A.11})$$

hvor \bar{y} er seriens gjennomsnittsverdi av de observerte dataene y , k er antall lags og T er antall observasjoner. Dette er korrelasjonskoeffisienten for verdier av serien som er k perioder fra hverandre. Hvis r_k ikke er null, betyr det at verdiene er 1. ordens autokorrelerte. Hvis r_k mer eller mindre synker geometrisk med økende lag k , er dette et tegn på at serien følger en autoregressiv (AR) prosess. Hvis funksjonen faller til null etter kun et lite antall lags, er dette et tegn på at serien følger en moving average (MA) prosess.

Er acf innenfor grensene for to standardavvik, er den ikke signifikant forskjellig fra null ved 5 % signifikansnivå. Verdien til to standardavvik kan beregnes slik:

$$\pm \frac{2}{\sqrt{T}} \quad (\text{A.12})$$

13. Partiell autokorrelasjonsfunksjon (pacf) måler korrelasjonen mellom en observasjon k perioder siden og dagens observasjon, altså korrelasjonen mellom y_t og y_{t-k} , etter å ha fjernet påvirkningen fra $y_{t-k+1}, y_{t-k+2}, \dots, y_{t-1}$. Ved lag 1 vil autokorrelasjonen og den partielle autokorrelasjonen være lik. For lag 2 vil pacf være:

$$r_{22} = \frac{(r_2 - r_1^2)}{(1 - r_1^2)} \quad (\text{A.13})$$

hvor r_1 og r_2 er autokorrelasjonskoeffisientene ved lag 1 og lag 2. For lags større en 2 vil formelen være mer kompleks. Pac til en autoregresjonsprosess av orden p , AR(p), skjæres av ved lag p , mens pacf til en moving average-prosess (MA) vil gradvis synke mot null. Er pacf innenfor grensene for to standardavvik, er den ikke signifikant forskjellig fra null ved 5 % signifikansnivå.

14. Kvantil-kvantil (QQ)-plot er et enkelt, men kraftig verktøy for å sammenligne to fordelinger. Kvantilene til en valgt serie vil bli plottet mot kvantilene til en annen serie eller en teoretisk fordeling. Hvis de to fordelingene er like, vil QQ-plottet ligge på en rett linje. Hvis dette ikke er tilfellet, avviker de to fordelingene fra hverandre i en eller annen dimensjon. Mønsteret på avviket fra linearitet gir en indikasjon på forskyvingens natur

15. Stasjonæritet er definert som en prosess med konstant gjennomsnitt, varians og autokovarians for hvert lag. For å forklare enhetsrot-testen, som avslører stasjonæritet, kan en ta utgangspunkt i AR(1) prosessen:

$$y_t = \mu + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (\text{A.14})$$

hvor μ og ϕ er konstanter og ε_t er hvit støy. Hvis $-1 < \phi < 1$ så er y en stasjonær prosess. Hvis $\phi = 1$ så har en ikke-stasjonær prosess, også kalt tilfeldig sti med drift, som vil kunne vandre langt vekk fra gjennomsnittet. Dette vil tilsvare en enhetsrot.

Hvis $\phi > 1$ så har man en eksploderende prosess, som er lite naturlig i kraftmarkedet. Testen for stasjonæritet tester derfor følgende hypoteser:

$$H_0 : \phi = 1$$

$$H_1 : \phi < 1$$

(A.15)

Dickey-Fuller tester følgende prosess:

$$\Delta y_t = \psi y_{t-1} + \mu + \lambda t + \varepsilon_t$$

(A.16)

hvor $\psi = \phi - 1$, μ er drift og λ er en tidstrend. Hvis $\lambda = \mu = 0$ så er det en AR(1) modell, hvis $\lambda = 0$ og $\mu \neq 0$ så er det en AR(1) med drift og hvis $\lambda \neq 0$ og $\mu \neq 0$ så er det en AR(1) med drift og tidstrend. Testen har hypotesene:

$$H_0 : \Delta y_t = \varepsilon_t, (\psi = 0)$$

$$H_1 : \Delta y_t = \psi y_{t-1} + \mu + \lambda t + \varepsilon, \psi < 0$$

(A.17)

På grunn av at t-statistikken for nullhypotesen for en enhetsrot ikke har konvensjonell t-statisikk, kan en ikke bruke en vanlig t-test. Dickey og Fuller har laget derfor kritiske verdier for teststatistikken vist i Tabell 0-1.

Signifikansnivå	1 % ²⁰	5 %	10 %
AR(1)	-2.5664	-1.9394	-1.6157
AR(1) med drift	-3.4353	-2.8629	-2.5675
Ar(1) med drift og tidstrend	-3.9662	-3.4138	-3.1286

Tabell 0-1: Kritisk nivå for forstørret Dickey-Fuller test

En har også en mer generell formulering som tar hensyn til autokorrelasjon, og som gir grunnlaget for Forstørret Dickey-Fuller test:

$$\Delta y_t = \psi y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta y_{t-i} + \mu + \lambda t + \varepsilon_t \quad (\text{A.18})$$

hvor p er antall lags som tas med. Hvis $p=0$ så har man (A.16).

16. Phillip-Perron-test (PP) er en ikke-parametrisk metode for å kontrollere for høyere orden autokorrelasjon i en dataserie. Testregresjonen for en PP-test er AR(1)-prosessen:

$$\Delta y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + u_t \quad (\text{A.19})$$

Mens ADF-testen korrigerer for høyere orden autokorrelasjon ved å legge til laggede differanser på høyre side, gjør PP-testen en korreksjon i t-statistikken for koeffisienten fra AR(1)-regresjonen. Korreksjonen er ikke-parametrisk, siden testen bruker et estimat av spekteret av feilleddet med frekvens lik null som er robust for heteroskedastisitet og autokorrelasjon i ukjent form.

Den asymptotiske fordelinga til PPs t-statistikk er den samme som for ADF t-statistikk.

17. Log likelihood-funksjonen (LLF) evaluerer de estimerte verdiene av koeffisientene, ved antatt normalfordelte feilledd. Funksjonen beregnes som følger:

20 MacKinnon gjorde i 1991 flere simuleringer enn det Dickey og Fuller gjorde i 1979. Dette førte til nye kritiske verdier for forkasting av null hypotesen.

$$l = -\frac{T}{2} \left(1 + \log(2\pi) + \log\left(\frac{u_i^2}{T}\right) \right) \quad (\text{A.20})$$

hvor u_i^2 er feilleddene fra regresjonen. I statistikkprogrammer som EViews vil LLF finnes ved hjelp av iterative teknikker. Gitt et sett av initiale verdier av parameterestimaterne, så blir parameterverdiene oppdatert for hver iterasjon til programmet fastsetter at et optimum er nådd. Har man en ikke-lineær modell kan denne ha mange lokale maksima. Dette kan føre til at statistikkprogrammet kan finne forskjellige optimum ut i fra forskjellige iterasjonsprosedyrer.

18. Maximum likelihood er en populær statistisk metode for å trekke slutninger om parametrene til den underliggende sannsynlighetsfordelingen som ligger til grunn i en dataserie. Metoden finner de mest sannsynlige verdiene på parametrene, gitt de faktiske data. En log likelihood-funksjon blir formet, og det blir søkt etter de verdiene til parametrene som maksimerer funksjonen.

Maximum likelihood-estimering kan finne parameterverdier for både lineære og ulineære modeller.

19. Hvit støy er en prosess med ingen merkbar struktur. En definisjon på en hvit støy-prosess er:

$$E(y_t) = \mu \quad (\text{A.21})$$

$$\text{var}(y_t) = \sigma^2 \quad (\text{A.22})$$

$$\gamma_{t-r} = \begin{cases} \sigma^2 & \text{for } t=r \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

En hvit støy-prosess har altså konstant gjennomsnitt og varians, og ingen autokovarians, γ , unntatt ved lag 0. En hver observasjon er ukorrelert med alle de andre verdiene i dataserien. I en slik prosess er det en vanlig antakelse at y_t er normalfordelt, $y_t \sim N(\mu, \sigma^2)$.

20. Whites heteroskedastisitetstest (White, 1980) tester om feilleddene fra en minste kvadrats metode-regresjon er heteroskedastiske. Nullhypotesen er at det ikke finnes heteroskedastisitet i dataene. Teststatistikken er beregnet ved en hjelperegresjon, hvor man utfører en regresjon på kvadratet av feilleddene for alle mulige kryssprodukter av regressorene.

Test-statistikken brukt i E-views er $\text{Obs} \cdot R^2$, som er beregnet som antallet observasjoner multiplisert med R^2 fra testregresjonen. Den endelige utvalgsfordelingen til F-statistikken under H_0 er ikke kjent, men Whites teststatistikk er asymptotisk fordelt som en χ^2 -fordeling med antall frihetsgrader lik antallet koeffisienter, med unntak av konstanten, i testregresjonen.

White beskriver denne metoden som en generell test for feilspesifikasjon i modellen, siden nullhypotesen antar at feilleddene både er homoskedastiske og uavhengige av regressorene, og at den lineære spesifikasjonen av modellen er korrekt. Brudd på hvem som helst av disse betingelsene kan føre til en signifikant teststatistikk. Og omvendt, en ikke signifikant teststatistikk tyder på at ingen av de tre betingelsene er brutt.

Vedlegg B - Antakelser i regresjonsmodeller

Regresjon har som formål å beskrive og evaluere forholdet mellom en gitt variabel og en eller flere andre variable. En klassisk lineær regresjonsmodell (CLRM) ser slik ut:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t \quad (\text{A.1})$$

Data for x_t er observerbar, men siden y_t også avhenger av u_t , er det viktig å være spesifikk om hvordan feilleddene u_t skal genereres. Det blir ofte gjort fem antakelser angående de uobserverbare feilleddene og deres fortolkning (Brooks, 2002):

1. $E(u_t) = 0$
2. $\text{var}(u_t) = \sigma^2 < \infty$
3. $\text{cov}(u_t, u_j) = 0$
4. $\text{cov}(u_t, x_t) = 0$
5. $u_t \sim N(0, \sigma^2)$

Hvis antakelsene 1-5 holder, vil estimatorene $\hat{\alpha}$ og $\hat{\beta}$ være BLUE (best linear unbiased estimators).

Vedlegg C – VBA-kode for filtrering

```
Sub filtrer()  
stdav = Cells(2, 7).Value  
For i = 4 To 3441  
    residual = Cells(i, 3).Value  
    If Abs(residual) > 3 * stdav Then  
        If Cells(i, 4).Value = "" Then  
            Cells(i, 4).Value = Cells(i, 2).Value  
        End If  
        Cells(i, 2).Value = (Cells(i - 1, 2).Value + Cells(i, 2).Value) / 2  
        Cells(i, 3).ClearContents  
        Cells(i, 5).Value = Cells(i, 4).Value - Cells(i, 2).Value  
    End If  
Next  
End Sub
```


Vedlegg D – Ito's lemma

Itô's Lemma sier at hvis forandringen til prisprosessen følger Geometrisk Brownsk bevegelse:

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dZ(t) \quad (C.1)$$

og $C[S(t)]$ er en dobbeltderiverbar funksjon av $S(t)$. Ved bruk av Taylor rekkeutvikling blir forandringen i C , $dC[S(t),t]$, lik:

$$\begin{aligned} dC[S, t] &= C(S + dS, t + dt) \\ &= C(S, t) + C_S dS + C_t dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[C_{SS} (dS)^2 + C_{tt} (dt)^2 + V_{St} dS dt \right] \\ &\quad + \frac{1}{6} \left[C_{SSS} (dS)^3 + 3C_{SSt} (dS)^2 dt + 3C_{Stt} dS (dt)^2 + V_{ttt} (dt)^3 \right] \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (C.2)$$

hvor notasjonen C_S er den partiellderiverte av C med hensyn på S , og det ledd nummer n i utviklingen blir

$$\frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (dS)^i (dt)^{n-i} C_{S^i t^{n-i}} \quad (C.3)$$

McDonald (2003) gir regnereglene

$$\begin{aligned} dt \times dZ &= 0 \\ (dt)^2 &= 0 \\ (dZ)^2 &= dt \\ dZ \times dZ' &= \rho dt \end{aligned} \quad (C.4)$$

Ved bruk av (C.4) på (C.2) og (C.3) forsvinner høyere ledd og en kommer frem til

$$\begin{aligned} dC(S, t) &= C_S dS + \frac{1}{2} C_{SS} (dS)^2 + C_t dt \\ &= \left\{ C_S [\alpha S(t)dt + \sigma S(t)dZ(t)] \right. \\ &\quad \left. + C_{SS} [\alpha S(t)dt + \sigma S(t)dZ(t)]^2 + C_t dt \right\} \\ &= \left[\alpha S C_S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS} + C_t \right] dt + \sigma S C_S dZ \end{aligned} \quad (C.5)$$

Ved å sette $C = X = \ln S$ får vi:

$$X_s = \frac{\delta X}{\delta S} = \frac{1}{S}; X_{ss} = \frac{\partial^2 X}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2};$$
$$X_t dt = \frac{\delta X}{\delta t} dt = \frac{\delta X}{\delta S} \frac{\delta S}{\delta t} = \frac{1}{S} \frac{\alpha S dt + \sigma S dZ}{dt} dt = \alpha dt + \sigma dZ = 0 \quad (\text{C.6})$$

Ved å sette (C.6) inn i (C.5) får vi:

$$dX = \left[\alpha S \frac{1}{S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{1}{S^2} + 0 \right] dt + \sigma S \frac{1}{S} dZ = \left(\alpha + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dZ \quad (\text{C.7})$$

Vedlegg E - Lévy-prosess

En Lévy-prosess, kalt opp etter den franske matematikeren Paul Lévy, er en kontinuerlig stokastisk prosess som har stasjonære uavhengige inkremitter. De mest kjente eksemplene på en slik prosess er Poisson-prosess og Wiener-prosess.

Definisjon (Lewis, 2001): En tilpasset realverdiprosess X_t , med $X_0 = 0$, er kalt en Lévy-prosess hvis:

- i. den har uavhengige inkremitter, det vil si, for ethvert valg av $n \geq 1$ og $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, er de tilfeldige variablene $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ uavhengige
- ii. den er tidshomogen, det vil si at fordelinga av $\{X_{t+s} - X_s; t \geq 0\}$ avhenger ikke av s
- iii. den er stokastisk kontinuerlig, det vil si at for enhver $\varepsilon > 0$, $\Pr\{|X_{s+t} - X_s| > \varepsilon\} \rightarrow 0$ når $t \rightarrow 0$
- iv. som en funksjon av t er den høyrekontinuerlig med grenser mot venstre

Prosesser som tilfredsstiller i) og ii) blir kalt prosesser med stasjonære uavhengige inkremitter (PIIS). Noen forfattere definerer en Lévy-prosess som en PIIS-prosess med $X_0 = 0$ (Bertoin 1996). Sånne prosesser kan bli sett på som analoge til en kontinuerlig random walk-prosess.

Generelt kan man si at Lévy-prosesser er en kombinasjon av lineær drift, en brownsk bevegelse og en jump-prosess. Når det kommer et hopp, hopper X_t med $\Delta X_t = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

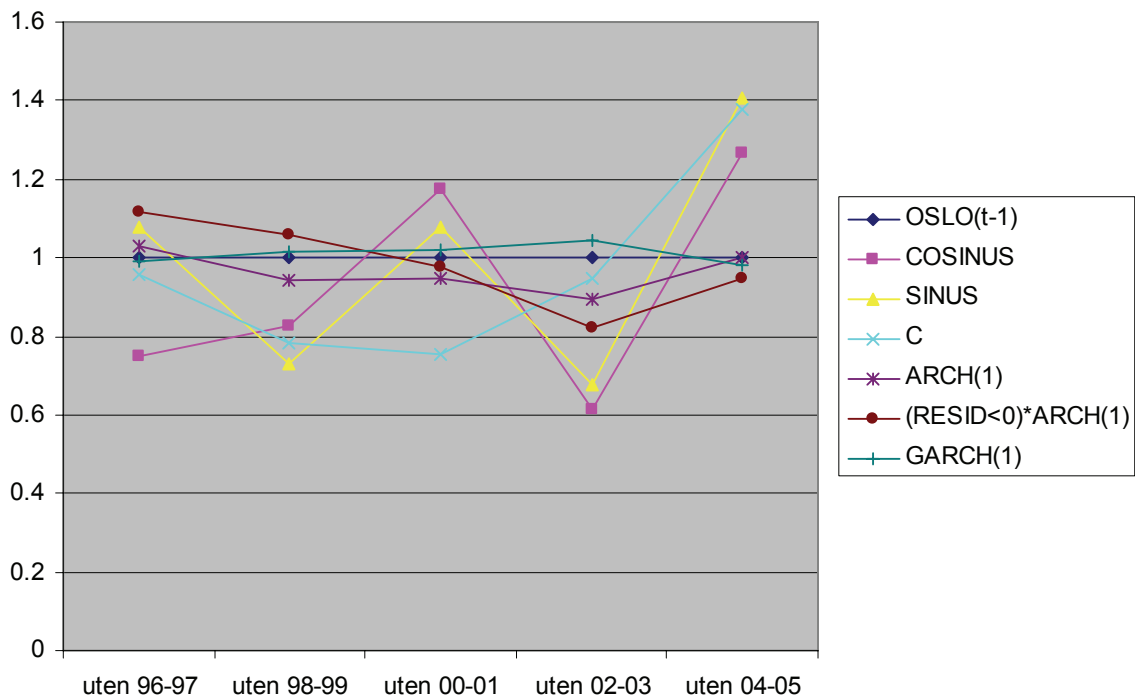
Notasjonen betyr at man ekskluderer null som et sannsynlig hopp. Hvis man så ser på et lukket intervall, $A \in \mathbb{R}$, som ikke inneholder startpunktet, er det kumulative antallet av hopp i tidsintervallet $[0, t]$ med en størrelse som hører hjemme i A , N_t^A , en tilfeldig variabel. Dette er et tilfeldig mål med heltallsverdier, og blir ofte skrevet som $N_t^A = \nu([0, t], A)$. Når A er fast er N_t^A en Poissonfordeling med gjennomsnittsverdi $t \int_A \mu(x) dx$, der $\mu(x) dx$ er en Lévy-størrelse som måler den relative forekomsten av forskjellige hoppamplituder.

Man kan skille mellom to typer Lévy-prosesser med hoppkomponenter. I alternativ 1, Poisson-tilfellet, har man at Lévy-størrelsen er et endelig tall, $\int_{\mathbb{R}} \mu(x) dx < \infty$. Man kan omformulere dette til $\mu(x) = \lambda f(x)$, hvor $\lambda = \int_{\mathbb{R}} \mu(x) dx$ er Poisson-intensiteten (gjennomsnittlig hopp-rate), og $f(x) dx = dF(x)$ hvor $F(x)$ er en kumulativ sannsynlighetsfordeling. Dette tilfellet kalles også jump-diffusion. Et eksempel på denne typen prosesser er Mertons jump-diffusion-modell (1976), hvor x er normalfordelt:

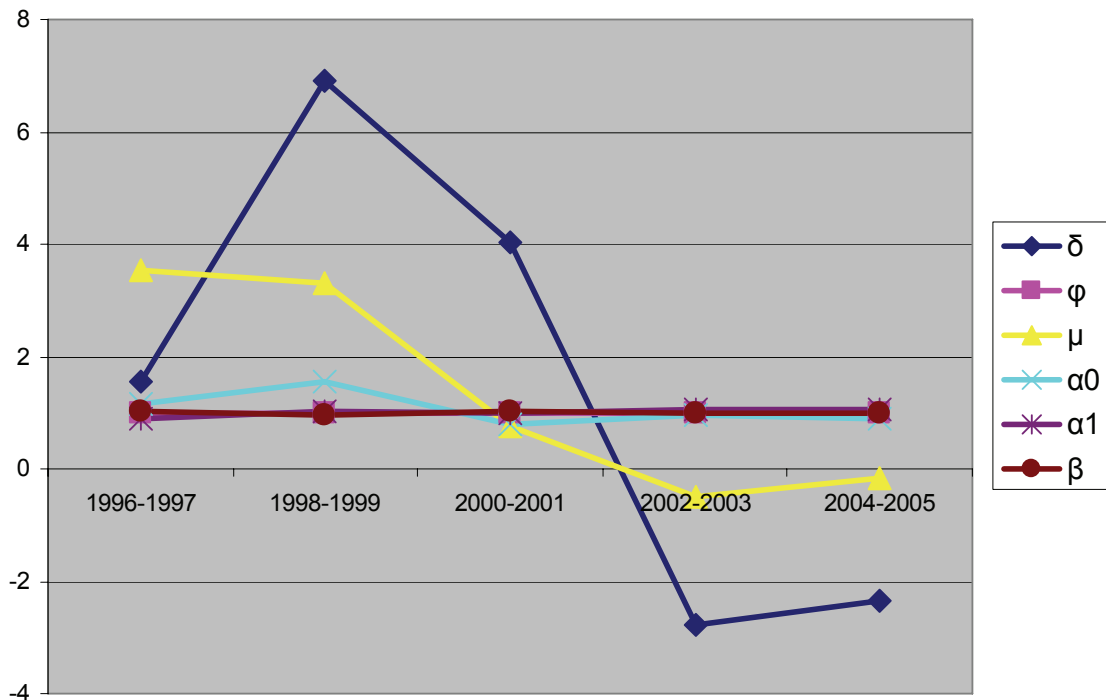
$$\mu(x) = \lambda f(x) = \lambda \exp\left[-(x - \alpha)^2 / 2\delta^2\right] / (2\pi\delta^2)^{1/2} \quad (\text{D.1})$$

I alternativ 2 er Lévy-størrelsen uendelig, $\int_{\mathbb{R}} \mu(x) dx = \infty$, og ingen generell Poisson-intensitet kan bli definert. Et enkelt eksempel er Lévy α -stabil prosess: $\mu(x) = \frac{c_{\pm}}{|x|^{1+\alpha}}$, $0 < \alpha < 2$, hvor c_{\pm} er to konstanter for $x < 0$ og $x > 0$. I alternativ 2 er det at $\mu(x)$ ikke er integrerbar i startpunktet kilden til divergens, fordi det er for mange småhopp. Divergens ved starttidspunktet er alltid kilden til integrasjonsfeil for $\mu(x)$ i alternativ 2 – modeller.

Vedlegg F – Stabilitetstest



Figuren viser relativ variasjon i parametere for en AR(1)-GJR-modell med cosinusvariable for modellering av sesongvariasjon.



Figuren viser relativ variasjon i parametere for forskjellige dataområder for en AR(1)-GARCH-M modell for prisdifferanse filtrert for sprang

Vedlegg G - Regresjonsresultater

Regresjonsverdier for sesongvariasjon med dummy

Parameter	Områdepris		Prisdifferanse	
	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi
Jan	3.160548	0.000000	0.305452	0.000000
Feb	3.096961	0.000000	0.003145	0.963500
Mar	3.021097	0.000000	0.090613	0.167300
Apr	2.987467	0.000000	0.242633	0.000300
Mai	2.914613	0.000000	-0.324774	0.000000
Jun	2.871222	0.000000	-0.411889	0.000000
Jul	2.677849	0.000000	-0.102975	0.136500
Aug	2.880143	0.000000	-0.186810	0.006900
Sept	2.977296	0.000000	0.128074	0.068500
Okt	3.053871	0.000000	0.068710	0.320400
Nov	3.141704	0.000000	0.104852	0.135900
Des	3.210645	0.000000	0.419570	0.000000

Regresjonsverdier for sesongvariasjon med cosinus

Parameter	Områdepris		Prisdifferanse	
	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi
μ	2.989951	0.000000	0.028332	0.153300
Cosinus	0.210565	0.000000	0.271384	0.000000
Sinus	0.000835	0.942200	-0.030431	0.276400

Regresjonsverdier for ARMA-modeller

Parameter	ARMA områdepris		ARMA prisdifferanse	
	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi
μ			0.002292	0.724500
Jan	0.038004	0.000100		
Feb	0.036145	0.000100		
Mar	0.033560	0.000300		
Apr	0.033574	0.000300		
Mai	0.034667	0.000100		
Jun	0.033842	0.000100		
Jul	0.029327	0.000500		
Aug	0.042276	0.000000		
Sept	0.038709	0.000000		
Okt	0.039382	0.000000		
Nov	0.041786	0.000000		
Des	0.039848	0.000000		
ϕ	0.987776	0.000000	0.913063	0.000000
θ	-0.161704	0.000000	-0.586641	0.000000

Resultat fra Eviews for ARMA-modeller

	R2	AIC	Schwarz	LL
Områdepris	0.969055	-2.012434	-1.987421	3473.375
Prisdifferanse	0.389524	2.672822	2.678182	-4591.581

Regresjonsverdier for AR-modeller for områdepris

Parameter	AR(1)		AR(2)		AR(3)		AR(5)		AR(7)	
	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi
μ	0.375494	0	0.327858	0	0.047786	0	0.036433	0.0005	0.02378	0.019
m	0.983446	0.000000	0.859721	0	0.879707	0	0.844425	0	0.77781	0
ω_1			0.125833	0	-0.088864	0.0001	-0.094769	0	-0.0812	0.0002
ϕ_1					0.193271	0	0.114499	0	0.08689	0.0001
ψ_1							-0.022933	0.3027	-0.0113	0.5988
ϕ_2							0.146675	0	-0.0443	0.0388
ϕ_3									0.1322	0
ϕ_4									0.13213	0

Resultat fra EViews for områdepris

	R2	AIC	Schwarz	LL
ARMA-GARCH	0.968227	-2.564763	-2.534389	4425.828
ARMA-GJR	0.96832	-2.622285	-2.590124	4525.707
AR-GARCH	0.968008	-2.564707	-2.53612	4424.731
AR-GJR	0.968345	-2.622861	-2.592487	4525.698
AR-EGARCH	0.968384	-2.645874	-2.615501	4565.258
AR-GARCH-M std.av	0.96801	-2.564098	-2.533724	4424.684
AR-GARCH-M varians	0.968215	-2.564224	-2.53385	4424.901

Regresjonsverdier for AR-modeller for prisdifferanse

Parameter	AR(1)		AR(2)		AR(3)		AR(5)	
	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi
μ	0.012166	0.456100	0.009314	0.559500	0.008040	0.612000	0.006439	0.682300
m	0.583412	0.000000	0.459798	0.000000	0.433801	0.000000	0.415380	0.000000
ϕ_1			0.212232	0.000000	0.155890	0.000000	0.134193	0.000000
ϕ_2					0.122604	0.000000	0.072384	0.000100
ϕ_3							0.039091	0.033900
ϕ_4							0.101857	0.000000

Resultat fra Eviews for prisdifferanse

	R2	AIC	Schwarz	LL
ARMA-GARCH	0.354348	2.4135	2.42422	-4142.806
ARMA-GJR	0.355231	2.409512	2.422019	-4134.951
AR-GARCH	0.300347	2.541416	2.550349	-4363.694
AR-GJR	0.301244	2.416082	2.426802	-4147.245
AR-EGARCH	0.308614	2.411396	2.422116	-4139.19
AR-GARCH-M std.av	0.403171	2.598072	2.608792	-4460.086
AR-GARCH-M varians	0.416754	2.418322	2.429042	-4151.096

Regresjonsverdier for filtrerte dataserier

Parameter	Områdepris				Prisdifferanse			
	AR		AR-GJR		AR		AR-GARCH-M	
	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi
μ					0.001749	0.759900	-0.002683	0.678300
Jan	0.026704	0.000700	0.025036	0.000200				
Feb	0.023865	0.002300	0.021037	0.001000				
Mar	0.023362	0.002100	0.021746	0.000900				
Apr	0.022954	0.002400	0.028516	0.000100				
Mai	0.023927	0.001100	0.025657	0.000400				
Jun	0.023445	0.001400	0.024947	0.000100				
Jul	0.020127	0.003900	0.022546	0.000400				
Aug	0.030730	0.000000	0.033425	0.000000				
Sept	0.028631	0.000200	0.027571	0.000000				
Okt	0.027790	0.000300	0.027505	0.000000				
Nov	0.030749	0.000100	0.028233	0.000000				
Des	0.028104	0.000500	0.026530	0.000400				
ϕ	0.991412	0.000000	0.991841	0.000000	0.900200	0.000000	0.858092	0.000000
δ							0.004740	0.883300
α_0			0.000139	0.000000			0.003285	0.000000
α_1			0.114838	0.000000			0.313775	0.000000
β			0.763638	0.000000			0.705874	0.000000
γ			0.201275	0.000000				

Analyse av områdepriser på NordPool

Regressionsverdier for områdepris med sesongvariasjon

Parameter	Ulen mean reversion		AR		ARMA-GARCH		ARMA-GJR		AR-GARCH		AR-GJR		AR-EGARCH		AR-GARCH-M standardavvik		AR-GARCH-M varians	
	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi
Jan	3.166728	0.000000	0.055163	0.000000	0.056510	0.000000	0.046478	0.000100	0.059891	0.000000	0.046450	0.000200	0.043132	0.000000	0.059987	0.000300	0.060958	0.000100
Feb	3.097625	0.000000	0.052903	0.000000	0.052613	0.000000	0.043910	0.000100	0.055864	0.000000	0.043872	0.000100	0.040141	0.000000	0.055948	0.000300	0.056940	0.000000
Mar	3.022689	0.000000	0.049475	0.000000	0.054179	0.000000	0.043768	0.000500	0.057565	0.000000	0.043682	0.000600	0.040217	0.000100	0.057649	0.000400	0.058595	0.000100
Apr	2.993317	0.000000	0.049872	0.000000	0.058403	0.000000	0.044749	0.000100	0.061996	0.000000	0.044648	0.000100	0.043634	0.000000	0.062091	0.000100	0.063056	0.000000
Mai	2.882031	0.000000	0.049890	0.000000	0.065202	0.000000	0.049393	0.000100	0.069224	0.000000	0.049275	0.000100	0.046539	0.000000	0.069324	0.000100	0.070686	0.000000
Jun	2.836271	0.000000	0.048579	0.000000	0.060758	0.000000	0.045085	0.000000	0.064427	0.000000	0.045018	0.000000	0.041980	0.000000	0.064532	0.000000	0.066666	0.000000
Jul	2.646784	0.000000	0.044287	0.000000	0.056085	0.000000	0.042401	0.000100	0.059604	0.000000	0.042345	0.000100	0.040833	0.000000	0.059698	0.000100	0.060869	0.000000
Aug	2.855243	0.000000	0.056957	0.000000	0.065669	0.000000	0.053403	0.000000	0.063080	0.000000	0.050120	0.000000	0.050120	0.000000	0.069170	0.000000	0.070087	0.000000
Sept	2.973635	0.000000	0.054660	0.000000	0.059260	0.000000	0.046946	0.000000	0.062686	0.000000	0.046891	0.000000	0.045191	0.000000	0.062802	0.000100	0.063742	0.000000
Oktober	3.055242	0.000000	0.055599	0.000000	0.059119	0.000000	0.046448	0.000000	0.062445	0.000000	0.046391	0.000000	0.047158	0.000000	0.062539	0.000100	0.063482	0.000000
Nov	3.143039	0.000000	0.058538	0.000000	0.060294	0.000000	0.048373	0.000000	0.063742	0.000000	0.048307	0.000000	0.046299	0.000000	0.063839	0.000100	0.064748	0.000000
Des	3.219690	0.000000	0.057006	0.000000	0.079397	0.000000	0.070042	0.000500	0.083701	0.000700	0.069765	0.000700	0.062909	0.000700	0.083869	0.001800	0.084547	0.001100
φ			0.982433	0.000000	0.982897	0.000000	0.985314	0.000000	0.981880	0.000000	0.985337	0.000000	0.986224	0.000000	0.981857	0.000000	0.981637	0.000000
δ			-0.037892	0.132300	-0.037892	0.132300	0.003722	0.891600	0.003722	0.891600	0.003722	0.891600	0.003722	0.891600	0.003722	0.891600	-0.108115	0.638100
α_0			0.000241	0.000000	0.000241	0.000000	0.000357	0.000000	0.000241	0.000000	0.000358	0.000000	-1.015021	0.000000	0.000240	0.000000	0.000237	0.000000
α_1			0.361761	0.000000	0.361761	0.000000	0.149630	0.000400	0.364912	0.000000	0.150027	0.000400	0.231741	0.000000	0.365030	0.000000	0.363077	0.000000
β			0.673470	0.000000	0.673470	0.000000	0.588467	0.000000	0.672024	0.000000	0.587926	0.000000	0.587926	0.000000	0.672139	0.000000	0.674340	0.000000
γ							0.643947	0.000000	0.643947	0.000000	0.643947	0.000000	0.587483	0.000000	0.643947	0.000000	0.643947	0.000000
ω																		

Regressionsverdier for prissifferanse

Parameter	Ulen mean reversion		AR		ARMA-GARCH		ARMA-GJR		AR-GARCH		AR-GJR		AR-EGARCH		AR-GARCH-M standardavvik		AR-GARCH-M varians	
	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi
μ	0.029904	0.136500	0.012166	0.456100	-0.000745	0.950400	0.000700	0.947500	-0.009513	0.429300	0.001001	0.938400	0.047402	0.391100	0.000000	0.000000	-0.054186	0.172100
φ			0.583412	0.000000	0.853810	0.000000	0.852676	0.000000	0.782533	0.000000	0.780686	0.000000	0.757675	0.000000	0.761230	0.000000	0.778211	0.000000
θ					-0.233553	0.000000	-0.235647	0.000000										
δ															1.273611	0.000000	0.073909	0.073600
α_0					0.527395	0.155700	0.506892	0.157500	1.017306	0.001000	0.508771	0.145300	-0.551466	0.049500	1.261686	0.000000	0.569725	0.104800
α_1					0.398803	0.091700	0.519108	0.090500	0.256967	0.157700	0.472085	0.104100	0.270831	0.287500	0.202191	0.000000	0.354307	0.118800
β					0.054886	0.615000	0.105511	0.390700	-0.007780	0.224100	0.111067	0.300500	0.637941	0.000000	-0.080889	0.023900	0.043503	0.555100
γ																		
ω							-0.341938	0.113800			-0.266902	0.185100	0.052717	0.794800				

Regresjonsverdier for en AR(1)-GJR-sesongmodell for filtrerte områdepriser

Parameter	Oslo		Informasjonskriterier	
	Koeffisient	p-verdi	R2	
Cosinus	-0.001818	0.0809		0.985197
Sinus	-0.002312	0.0079	AIC	-3.000785
φ	1.000106	0	Schwarz	-2.988278
			LL	5165.35
α_0	0.000158	0.000000		
α_1	0.119769	0.000000		
β	0.753996	0.000000		
γ	0.204052	0.000000		

Regresjonsverdier for AR(1)-GJR-JDP-sesongmodell for filtrerte områdepriser

Parameter	Oslo		NO2		Sverige		Finland	
	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi
Jan	0.025036	0.000200	0.032038	0.000000	0.050939	0.000000	0.032669	0.000000
Feb	0.021037	0.001000	0.024317	0.000400	0.044427	0.000000	0.027884	0.000200
Mar	0.021746	0.000900	0.027682	0.000000	0.045235	0.000000	0.026621	0.000100
Apr	0.028516	0.000100	0.031725	0.000000	0.047711	0.000000	0.032495	0.000000
Mai	0.025657	0.000400	0.029973	0.000000	0.049996	0.000000	0.030995	0.000000
Jun	0.024947	0.000100	0.031094	0.000000	0.055705	0.000000	0.033169	0.000000
Jul	0.022546	0.000400	0.023960	0.000400	0.042204	0.000000	0.021616	0.002300
Aug	0.033425	0.000000	0.036935	0.000000	0.057318	0.000000	0.041354	0.000000
Sept	0.027571	0.000000	0.031765	0.000000	0.051889	0.000000	0.031548	0.000000
Okt	0.027505	0.000000	0.031524	0.000000	0.048621	0.000000	0.034179	0.000000
Nov	0.028233	0.000000	0.031732	0.000000	0.053210	0.000000	0.035165	0.000000
Des	0.026530	0.000400	0.032019	0.000000	0.057173	0.000000	0.035701	0.000000
φ	0.991841	0.000000	0.990348	0.000000	0.983694	0.000000	0.989491	0.000000
α_0	0.000139	0.000000	0.000209	0.000000	0.000533	0.000000	0.000374	0.000000
α_1	0.114838	0.000000	0.104817	0.000000	0.093066	0.000000	0.089747	0.000000
β	0.763638	0.000000	0.765710	0.000000	0.712457	0.000000	0.703449	0.000000
γ	0.201275	0.000000	0.199287	0.000000	0.320035	0.000000	0.324534	0.000000

Regresjonsverdier for AR(1)-GARCH-M-JDP for filtrerte prisdifferanseserier

Parameter	Oslo		NO2		Sverige		Finland	
	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi	Koeffisient	p-verdi
μ	-0.002683	0.678300	0.001373	0.8859	-0.009465	0.2404	3.94E-05	0.9864
φ	0.858092	0.000000	0.839249	0.000000	0.859416	0.000000	0.990093	0.000000
δ	0.004740	0.883300	0.005215	0.866	0.035766	0.1937	-0.019772	0.2836
α_0	0.003285	0.000000	0.007982	0.0001	0.004907	0.0001	0.001954	0.000000
α_1	0.313775	0.000000	0.275506	0	0.298382	0	0.847575	0.000000
β	0.705874	0.000000	0.713226	0	0.720878	0	0.317815	0.000000