

Elektrisitetsprisen ved EEX: Empiriske egenskaper og mulige faktormodeller

Torbjørn Sæthre Øyvind S. Kristoffersen

Høst 2006

Forord

Denne prosjektoppgaven er utført ved Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse ved NTNU høsten 2006. Oppgaven er utarbeidet i fordypningsemnet TIØ 4700 - Investering, finans og økonomistyring.

Prosjektoppgaven er utarbeidet som et forstudium til en senere diplomoppgave og hovedmålet med oppgaven var å opparbeide kunnskap om European Energy Exchange (EEX) og å sette seg inn i ulike faktormodeller for modellering av fremtidige spotpriser og forwardkurver.

Denne rapporten er skrevet i L^AT_EX med TeXnicCenter som brukergrensesnitt. Microsoft Excel og GiveWin 2.10 er brukt for å estimere forskjellige empiriske egenskaper.

Vi ønsker å takke vår veileder ved NTNU, Stein-Erik Fleten, for god veiledning og vår kontaktperson i Agder Energi, Fridthjof Ollmar, for nyttige innspill, kommentarer og for anskaffelse av data fra EEX.

Trondheim, 20.12.2006

Torbjørn Sæthre

Øyvind S. Kristoffersen

Sammendrag

Økende overføringskapasitet mellom ulike kraftmarkeder vil i fremtiden gjøre forskjellige markeder mer og mer avhengig av hverandre. Forskjellen mellom de ulike kraftmerkedenes tilbud og etterspørsel gjør markedene særegne, slik at kunnskap om egenskapene til de ulike markedene er svært viktig. For å få større forståelse for EEX, analyserer denne oppgaven spot- og forwardpriser og ser på ulike faktormodeller for modellering med data fra EEX som underliggende.

Elektrisitetsprisen på EEX har klare variasjoner på sesong-, ukes- og døgnnivå. Spotprisen er også preget av ekstreme prissjokk, ofte i positiv retning, som kommer som en følge av den store andelen termisk produksjonskraft på EEX. Dette bidrar til en ekstremt høy volatilitet på spotprisen på 626 %. Volatiliteten viser klare tegn til sesongvariasjoner som bør tas hensyn til i en modellering.

Vi finner stasjonaritet i spotprisen, logaritmen til spotprisen, den logaritmiske avkastningen til spotprisen og volatiliteten til spotprisen som gir at modellering av de ulike tidsseriene bør gjøres med en mean reversion-prosess. Et forsøk på å modellere dragningskoeffisienten mislykkes på grunn av elektrisitetsprisens ekstreme prishopp. Det blir funnet høyere volatilitet for kontrakter over kortere perioder enn lengre. Samuelsoneffekten blir bare funnet for månedskontrakter.

Vi sammenligner ulike faktormodeller for spotpris og forwardkurve, og setter de opp mot et krav om realisme, enkelhet og egnethet til hedging. For å få en god konsekvensanalyse ved ulike forutsetninger bør tofaktormodellen med sesongvariasjon til Lucia & Schwartz, hoppmodellen til Geman & Roncoroni og SABR-modellen til Hagan, Kumar, Lesniewski & Woodward benyttes i senere arbeid.

Innhold

1	Innledning	1
2	European Energy Exchange	3
2.1	Deskriptiv Statistikk	4
2.1.1	Skjevhet	4
2.1.2	Kurtose	4
2.1.3	Test om normalfordeling	5
3	Stiliserte fakta om elektrisitetspris	6
3.1	Egenskapene til strømprisen	6
3.2	Sesongvariasjoner	6
3.3	Prissjokk og mean reversion	7
3.4	Volatilitet	9
3.5	Samuelsoneffekten	9
3.6	Andre karakteristikk	10
4	Empiriske data fra EEX	11
4.1	Mean reversion	11
4.2	Volatilitet	13
4.3	Volatilitet til spot	14
4.4	Volatilitet til futurekontrakter	14
4.5	Stasjonaritet	15
5	Faktormodeller	17
5.1	Schwartz (1997)	17
5.2	Schwartz & Smith (2000) / Lucia & Schwartz(2002)	18
5.3	Geman & Roncoroni (2006)	19
5.4	Clelow & Strickland (1999)	20
5.5	Kiesel, Schindlmayr & Boerger (2005)	21
5.6	Benth & Koekebakker (2005)	21
5.7	Hagan, Kuman, Lesniewski & Woodward(2002)	21

6	Modellenes egnethet for EEX	23
6.1	Kriterier for valg av modell	23
6.2	Valg av modell	23
7	Konklusjon	25
8	Referanser	26
A	Statistiske begreper	29
B	Empiriske tester	31

Figurer

3.1	Gjennomsnittlig døgnvariasjon for spotpris	7
3.2	Gjennomsnittlig ukesvariasjon for spotprisen i 2005	7
3.3	Forwardkontrakter tilgjengelig 28.09.2006	8
3.4	Logaritmisk avkastning døgnpriser i 2005	8
3.5	Gjennomsnittlig dagspris 2000-2006	9
3.6	Gjennomsnittlig volatilitet for månedskontrakter august 2005 - oktober 2006	10
4.1	Fordeling av priser for Δx mot x	12
4.2	Årlig historisk volatilitet til EEX spot	14
4.3	Årlig volatilitet for EEX spot - rullende vindu	15
4.4	Volatilitet til gjennomsnittlig kontraktspriser - rullende vindu	15
4.5	Volatilitet for månedskontrakter rundt prisfallet i CO_2 kvoter	16

Tabeller

2.1	Installert kapasitet for EEX	4
2.2	Deskriptiv statistikk for EEX	4
4.1	Dragningskoeffisient for EEX	12
4.2	ADF-test for tilstedeværelse av enhetsrøtter	16

Kapittel 1

Innledning

De siste årene har mulighetene for å importere og eksportere kraft mellom forskjellige kraftmarkeder økt betraktelig, og den vil fortsette å øke de neste årene ettersom det er planlagt og startet utbygging av overføringskapasiteten mellom de forskjellige markedene. Dette fører til at prisene på elektrisitet innenfor de forskjellige markedene i fremtiden vil bli mer og mer avhengig av hverandre, og det er derfor viktig for aktørene å kjenne til egenskapene til de andre markedene og hvordan de reagerer på forskjellige hendelser. Økningen av eksport og import fører også til større muligheter for å øke profitten en har for salg av kraft.

Fordelingen av kraftproduksjon hos European Energy Exchange(EEX) viker veldig fra Nord Pool når det kommer til hvordan kraften produseres. I Norden står vannkraft for omtrent 50% av produksjonen, mens i Tyskland står den bare for 1.4% av den samlede produksjonen. Denne store forskjellen i vannkraftproduksjonen betyr at prisene i Tyskland er mindre avhengig av nedbør og snøsmelting sammenlignet med det nordiske markedet. I et marked basert på termisk kraft, som det tyske markedet er, er det også tilnærmet ingen endringer i produksjonskapasiteten fra et år til det neste bortsett fra ved utvidelse av kapasiteten eller eventuell nedbygging. Ellers er de variable kostnadene i et termisk basert kraftmarked høyere enn det er i et vannbasert marked, noe som i utgangspunktet fører til at det er begrensninger på hvor lave prisene kan bli. Prisen vil i utgangspunktet også være mer stabil i et termisk basert marked, men faktorer som ekstremt lave eller høye temperaturer og hyppige prissjokk kan føre til mer ustabile priser.

Vi har tatt for oss de empiriske egenskapene til EEX og sett på forskjellige spotpris- og forwardkurvmodeller og hva de vektlegger. Gjennom dette arbeidet håper vi å kartlegge eventuelle forskjeller mellom EEX og Nord Pool og hvilke/n modeller som passer best for å modellere prisene hos EEX for fremtiden. Kravene vi setter til modellene som er aktuelle for å jobbes videre med er at de skal være enkle, realistiske og være egnet for hedging på opp til 1 års sikt. Når det gjelder hedging baserer den generelle opsjonsteorien, med bakgrunn i Black & Scholes(1973), seg på at underliggende følger en enkel geometrisk brownsk bevegelse som er lognormalfordelt som igjen gir at avkastningen er

normalfordelt. Empiriske studier viser at denne antagelsen ikke holder for elektrisitetsmarkeder (Audet, Heiskanen, Keppo & Vehvilinen, 2004). Det er to hovedkategorier innenfor opsjonsteori for å beskrive avviket fra Black & Scholes sine antagelser. Den første er å prøve å tilpasse Black & Scholes sin formel, mens den andre er å bruke mer komplekse, og forhåpentligvis mer realistiske, faktormodeller for å beskrive underliggendes prisprosess. Bjerksund, Rasmussen & Stensland (2005) hevder at enfaktormodeller egnert seg for prising, men når det kommer til hedging så presterer de dårligere enn ønsket. Hensikten med dette prosjektet er å gi forfatterne bedre innsikt i det tyske kraftmarkedet samt en bedre oversikt og innsikt i forskjellige spotpris- og forwardkurvemodeller.

I denne oppgaven har vi fokusert mest på de egenskapene til elektrisitetsprisen som brukes for å estimere de forskjellige spotpris- og forwardkurvemodellene. Volatiliteten er nøye gjennomgått for å få en nærmere forståelse av hvordan prisen varierer i forhold til sesongvariasjoner, samt for å stadfeste i hvilken grad prisseriene er ikke-stasjonære.

Rapportens struktur er som følger. I kapittel 2 ser man nærmere på EEX og enkel deskriptiv statistikk for markedet. I kapittel 3 tar man for seg generelle egenskaper for elektrisitetspriser og i kapittel 4 går man nærmere inn på de empiriske resultatene som dataene fra EEX gir. Kapittel 5 ser nærmere på forskjellige spotpris- og forwardkurvemodeller og kapittel 6 omhandler hvilke modeller som egnert seg best for å bruke opp i mot dataene fra EEX. Konklusjonen av rapporten er i kapittel 7.

Kapittel 2

European Energy Exchange

Det tyske elektrisitetmarkedet ble deregulert i 1998, og i 2000 ble det opprettet to energibørser, European Energy Exchange (EEX) i Frankfurt og Leipzig Power Exchange (LPX) i Leipzig. Begge basert på Nord Pool sin struktur. I 2002 fusjonerte disse børsene og resultatet ble dagens EEX stasjonert i Leipzig. EEX Phelix står for fysisk elektrisitetsindex. Elektrisitetsprisen består av en 24 timers daglig serie for hver time av en dag for alle årets dager. Prisene oppgis i euro per MWh.

1. juli 2002 lanserte EEX finansielle kontrakter med elektrisitetsprisen som underliggende. Kontraktene som formidles over EEX deles inn i 2 hovedgrupper; Base som står for det aritmetiske gjennomsnittet av døgnet 24 timer og Peak som blir beregnet ut i fra det aritmetiske gjennomsnittet av time 9 til time 20. Kontraktene som kan handles er årskontrakter, inntil seks år frem i tid, kvartalskontrakter syv kvartaler fremover og månedskontrakter for de syv neste månedene. For alle kontraktene kan det handles for både Base og Peak. EEX benytter seg av aritmetisk gjennomsnitt for alle prisene som en referanse for oppgjør for finansielle kontrakter. Resten av oppgaven benytter dagspriser som er et aritmetisk gjennomsnitt av timesprisene.

Siden oppstarten av derivathandelen for elektrisitetskontrakter i 2002 har likviditeten til markedet steget gradvis fra år til år. I 2005 ble det omsatt elektrisitetskontrakter på 517 TWh, som var en oppgang på 53 % fra året før. EEX får stadig flere aktører som handler på markedet. Per 21. november 2006 var det 156 aktører fra 19 land registrert på EEX, og det ble for første gang registrert mer en 300 TWh i åpne posisjoner på markedet. Dette tyder på at likviditeten i markedet fortsatt er stigende.

EEX har per november 2006 installert i overkant av 67 GW i produksjonskapasitet. Av tabell 2.1 se vi at termiske anlegg med kull står for 50 % av denne kapasiteten mens atomkraft står for 30 %. Denne høye andelen av kullkraft og spesielt atomkraft gjør systemet mindre dynamisk for endringer, siden de i mindre grad kan reguleres i forhold til forbruksvariasjoner i løpet av døgnet.

<i>Kraft</i>	<i>MWh</i>	<i>Prosent</i>
Kjernekraft	20 251	30.2
Brunkull	18 690	27.9
Steinkull	14 875	22.2
Gass	9 399	14.0
Olje	2 682	4.0
Vann	972	1.4
Annet(vind, bio, etc)	193	0.3
Totalt	67 070	100

Tabell 2.1: Installert kapasitet for EEX

2.1 Deskriptiv Statistikk

2.1.1 Skjevhet

Skjevheten¹ til en prisserie sier noe om sjansen for at en skal få store prissprang (positiv skjevhet) eller store prisfall (negativ skjevhet) i prisen sammenlignet med sannsynligheten for at det skjer i en prisserie som er normalfordelt. Som man ser av tabell 2.2, så er det en positiv skjevhet i spotprisen, logaritmen til spotprisen og i avkastningen til logaritmen til spotprisen. Dette tyder på at det er størst sjanse for at man får store prishopp i spotprisen.

<i>EEX</i>	<i>Spotpris</i>	<i>Logaritmen til spotpris</i>	<i>Logaritmen til avkastning av spotpris</i>
Gjennomsnitt	31.9636	3.3442	0.0003
Standardavvik	18.6016	0.4789	0.3274
Skjevhet	3.9935	0.1669	0.8393
Kurtose	35.7361	1.1193	3.8973
Jarque-Bera	129840.39	132.12	1742.98

Tabell 2.2: Deskriptiv statistikk for EEX

Sammenligner man skjevheten til spotprisen med skjevheten til logaritmen til spotprisen, så ser man at det er betydelige forskjeller. Grunnen til dette er at logaritmen til spotprisen er en bedre tilnærming til en normalfordeling enn det spotprisen er. En ser også ut av tabell 2.2 at logaritmen til spotprisen er en bedre tilnærming til normalfordeling enn det logaritmen til avkastning til spotprisen er.

2.1.2 Kurtose

Tabell 2.2 viser at kurtosen² er over 0 for alle tre alternativene. For en normalfordeling er den overskytende kurtosen 0 og dette betyr at fordelingene er leptokurtiske og at det

¹Se Tillegg A

²Her brukes overskytende kurtose, se ellers Tillegg A

er større sannsynlighet for både ekstreme høye og lave priser sammenlignet med en normalfordelt prisserie. Dette ser man som prissjokk i spotprisene og at fordelingen er mye spissere rundt gjennomsnittet enn det en vanlig normalfordeling er.

2.1.3 Test om normalfordeling

Ved å utføre en Jarque-Bera-test³ vil man se om en prisserie er normalfordelt eller ikke. Som verdiene i tabell 2.2 viser, så er ingen av de testede seriene normalfordelt. At spotprisen og logaritmen til spotprisen ikke er det, er som ventet ut fra opsjonsteorien basert på Black & Scholes, men at avkastningen ikke er normalfordelt er et tegn på at den generelle opsjonsteorien, uten større tilpasninger, ikke kan brukes opp mot elektrisitetsmarkedet som blant annet Haug(2006) hevder.

³Se Tillegg B

Kapittel 3

Stiliserte fakta om elektrisitetspris

3.1 Egenskapene til strømprisen

Elektrisitetsprisen inneholder mange unike karakteristikk sammenlignet med andre finansielle markeder. For en aktør innenfor elektrisitetsmarkedet er kunnskap om den fremtidige utviklingen og dynamikken til spot- og forwardprisene svært viktig. At elektrisitetsprisen ikke nødvendigvis er lik marginalkostnad for produksjon (Bunn & Karakatsani, 2003) og at elektrisitet ikke kan lagres over tid, men må konsumeres i det den blir produsert, gjør modelleringen av elektrisitetsprisen meget utfordrende. Samtidigheten i produksjon og konsum på grunn av svært begrensede lagringsmuligheter fører til at arbitrasjemulighetene vil være tilnærmet lik null (Lucia & Schwartz, 2002).

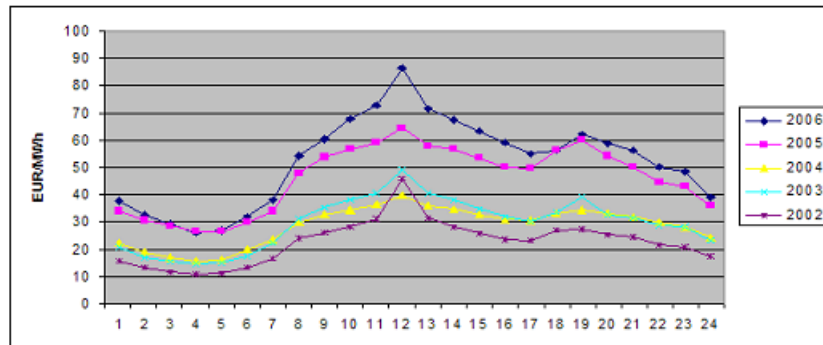
Elektrisitetsprisene blir påvirket av mange faktorer, både direkte og indirekte. Nedbør, temperatur og brenselpriser er sentrale siden de i stor grad påvirker tilbud og etterspørsel etter strøm. Andre faktorer som er blitt påvist i elektrisitetsprisen er i følge blant annet Knittel & Roberts (2001); sesongvariasjoner, sjokk, mean reversion og ekstrem volatilitet.

3.2 Sesongvariasjoner

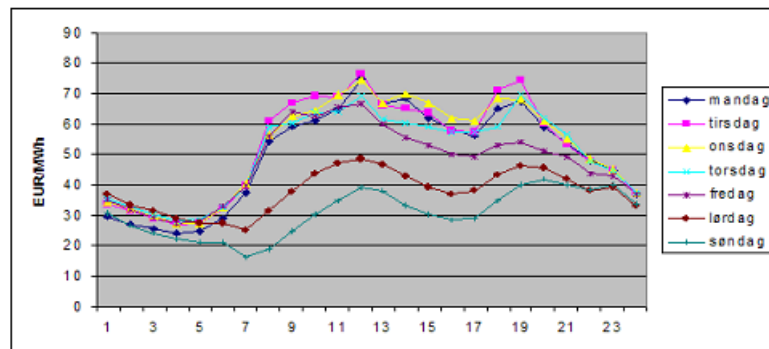
Sesongavhengigheten er et svært viktig element innenfor elektrisitetsmarkedet. Variasjonene skjer både på års-, ukes- og dagsnivå. Lucia & Schwartz (2002) hevder, gjennom studier av det nordiske kraftmarkedet, at spesielt sesongvariasjonene er svært viktig for å forklare formen til en forwardkurve. Empiriske studier av elektrisitetsmarkedet i California viser sterke deterministiske sykluser innenfor dags-, ukes- og årseffekter (Knittel & Roberts, 2001).

Ser en på spot- og forwarddata fra det tyske elektrisitetsmarkedet viser det også klare variasjoner innenfor både dag, uke og år. Figur 3.1 viser døgnvariasjonen til spotprisen for årene 2002 til oktober 2006. Figuren viser at det er store forskjeller i pris mellom dag og natt, hvor prisene i den dyreste timen mellom kl.11 og kl.12 er over dobbelt så høy som prisen kl. 04. Figur 3.2 viser ukesvariasjonen for spotprisen og en kan tydelig se at prisen

er lavere i helgen enn på arbeidsdagene. Prisene på mandag til fredag er meget like, med unntak av fredag etter kl.13 hvor prisene delvis synker ned mot prisen for lørdager.



Figur 3.1: Gjennomsnittlig døgnvariasjon for spotpris

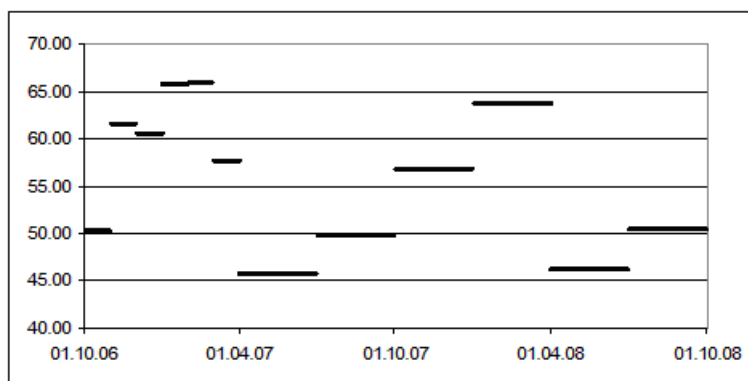


Figur 3.2: Gjennomsnittlig ukesvariasjon for spotprisen i 2005

Årlige sesongvariasjoner har sammenheng med etterspørselen etter elektrisitet. Under den kalde perioden om vinteren, når elektrisiteten blir brukt til oppvarming, er prisene høyere enn ellers. Ser en på forwardkontraktene som en kan kjøpe ser en tydelig sesongvariasjonen til elektrisitetsprisene. Figur 3.3 viser måneds- og kvartalskontraktene for Phelix base som det gikk an å få kjøpt den 28. september 2006.

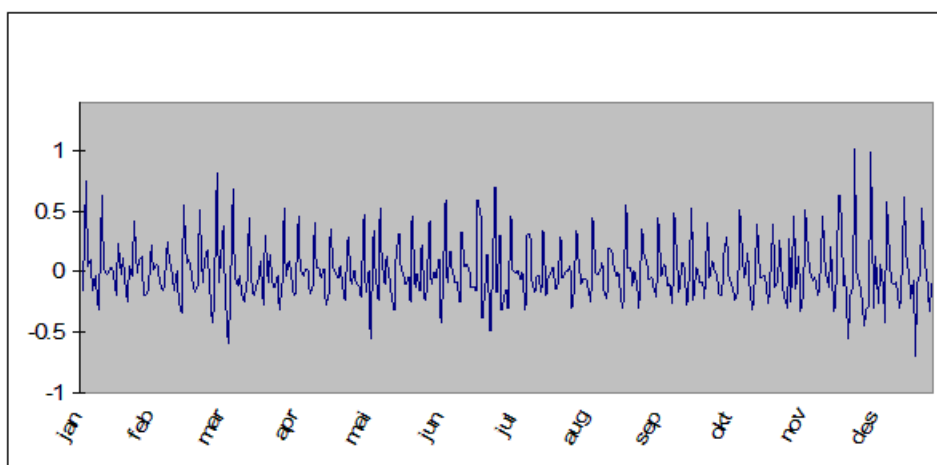
3.3 Prissjokk og mean reversion

Sjokk og mean reversion er faktorer som i stor grad påvirker spotprisprosessen. Lund & Ollmar(2003) finner at ved unormal etterspørsel etter elektrisitet vil spotprisen kunne oppleve prissjokk eller rask mean reversion. I følge Eydeland & Wolyniec(2003) har prissjokk sammenheng med den begrensede produksjonskapasiteten med ulike marginalkostnad, som for eksempel gass, kull og atomkraft som står for brorparten av produksjonen på EEX. Analyserer en logaritmisk avkastning fra døgnprisene til



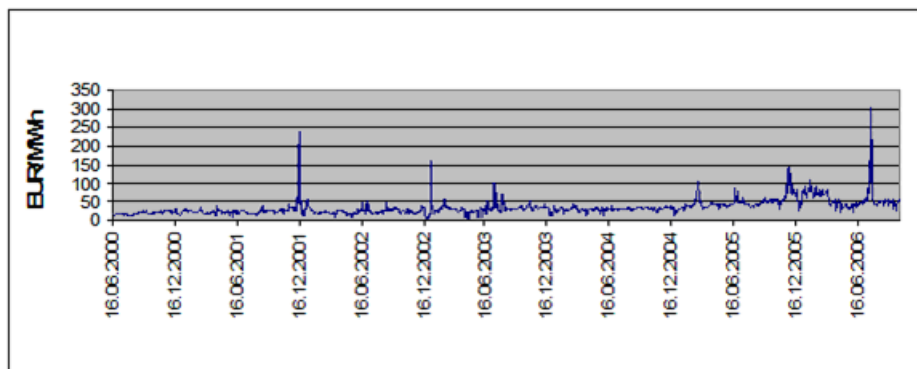
Figur 3.3: Forwardkontrakter tilgjengelig 28.09.2006

2005(figur 3.4), ser en klart at det ofte inntreffer store diskontinuerlige prisendringer. Ofte vil disse sprangene i pris inntreffe i form av et prissjokk. En overskytende kurtose på 3.9 og en positiv skjevhet på den logaritmiske avkastningen til spotprisen indikerer at ekstreme priser inntreffer ganske hyppig og at de fleste er i positiv retning.



Figur 3.4: Logaritmisk avkastning døgntpriser i 2005

Mean reversion vil generelt si at prisen trekker tilbake mot en forventning. Ser en på den historiske spotprisutviklingen, ser en klart at hurtig mean reversion kommer etter et prissjokk. For det nordiske kraftmarkedet er det funnet en langsom mean reversion som har sammenheng med vannkraftproduksjonen til systemet(Lund & Ollmar, 2003). Schwartz(1997) argumenterer for at langsiktig mean reversion er lange tidshorisonter fordi lave priser på strøm vil presse enkelte aktører ut av markedet slik at prisnivået presses opp, mens høye priser vil trekke til seg nye aktører slik at prisene presses nedover.



Figur 3.5: Gjennomsnittlig dagspris 2000-2006

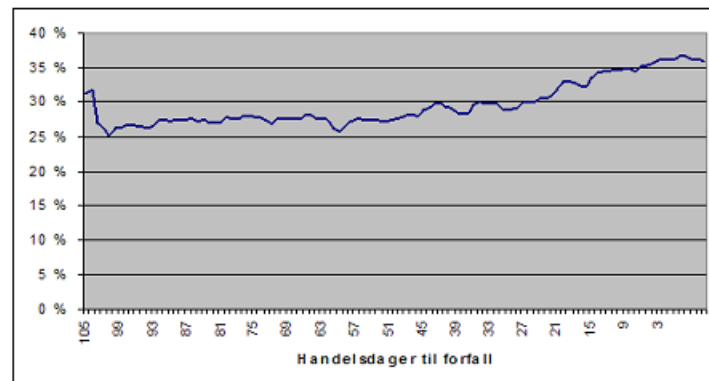
3.4 Volatilitet

Volatiliteten til elektrisitetmarkedet skiller seg ut fra volatiliteten til de fleste andre handelsvarer ved at den er svært høy og at den forandrer seg med tiden. Lucia & Schwartz(2002) estimerte volatiliteten til det nordiske markedet for perioden 1993-1999 til 189%, samt at de fant bevis på en ikke-stasjonær volatilitet til spotprisen. Ser en på historisk volatilitet for det tyske markedet er denne signifikant høyere en for det nordiske med en gjennomsnittlig historisk volatilitet på 626 %. Volatiliteten er også avhengig av sesongsvingninger og etterspørselen etter elektrisitet. Volatiliteten er høyere under perioder med større etterspørsel etter kraft og omvendt(Knittel & Roberts, 2001).

3.5 Samuelsoneffekten

Samuelsoneffekten går ut på at ved liten asymmetrisk informasjon mellom aktørene i et marked, så vil volatiliteten til en kontrakt øke(minke) når tiden til innløsningstidspunktet minker (øker). Samuelson(1965) viser at dette skjer når prisprosessen for spotprisen er mean reverting, samtidig som det ikke finnes arbitrasjemuligheter. Figur 3.6 viser hvordan Samuelsoneffekten opptrer for månedskontrakter. Når volatiliteten avtar med økende tid, betyr det at prisen på en forward vil trekkes mot forwardkurven på lengre sikt. Dette er mean reversion. Det er også viktig å huske at mer relevant informasjon blir tilgjengelig noe som fører til en ennå mer symmetrisk informasjon blant aktørene, noe som igjen tilsier at Samuelsoneffekten oftere blir observert. Disse kontraktene blir også mer omsatt historisk sett som igjen gir en høyere volatilitet (Eydeland & Wolyniec, 2003).

Brudd på Samuelsoneffekten kan likevel forekomme. Om mengden er stor nok (Fama & French, 1988),(Routledge, Seppi & Spatt, 2000) eller om informasjonen er veldig asym-



Figur 3.6: Gjennomsnittlig volatilitet for månedskontrakter august 2005 - oktober 2006

metrisk mellom aktørene (Hong, 2000) kan en få brudd på den i noen handelsvaremarked-er. Sannsynligheten for at dette skjer er likevel i mindre grad til stede i elektrisitets-markedet. Dette fordi informasjon om for eksempel planlagt vedlikehold og nedetider skal informeres om ut til markedet. Om det kommer nedetider som ikke er planlagt vil markedet likevel få informasjonen omtrent på samme tidspunkt. Når det gjelder mengden, så er elektrisitet en ikke-lagringsbar handelsvare noe som betyr at produksjonen tilpasses etterspørselen og dermed ikke blir for stor.

3.6 Andre karakteristikk

Det er vanlig å modellere forward- og spotprisen basert på muligheten til å lagre handelsvaren. Dette kalles 'Theory of storage', men fungerer ikke så godt for elektrisitet da strøm ikke er mulig å lagre på samme vis som andre handelsvarer. Det har derfor blitt utviklet en annen innfallsvinkel for å gjøre dette, nemlig likevektsmodeller som ser på forholdet mellom forwardprisen og forventet spotpris.

Routledge, Seppi & Spatt(2001) ser på effektene av lagring og konverteringsmuligheter har for spot- og derivatprisene til oppstrøms og nedstrøms handelsvarer. De viser at flere av de karakteristiske kjennetegnene til elektrisitetsprisen kommer av den underliggende økonomien innen tilbud og etterspørsel for disse. Ved hjelp av empiriske eksempler viser de at fordelingen av prisseriene for handelsvarer er heteroskedastiske¹. Dette betyr at ved høy volatilitet er prisene høye og ved lav volatilitet er prisene lave. Ellers viser de at prisene har en positiv skjevhet og likevektsmodellen deres får fram at det eksisterer mean reversion for prisene til handelsvarer.

¹Heteroskedastisk vil si at restleddet til estimeringen har varierende varians

Kapittel 4

Empiriske data fra EEX

I dette kapitlet testes datamateriale fra EEX med tanke på mean reversion, volatilitet og stasjonaritet. Vi finner en historisk gjennomsnittlig volatilitet på 626 % med store forskjeller i løpet av året. Det blir testet for mean reversion uten å finne en dragningskoeffisient¹. Dette har trolig samsvar med store og frekvente sprang i prisen på EEX. Stasjonaritet blir påvist for spotprisen, logaritmen til spotprisen og den logaritmiske avkastningen som gir at modellering av elektrisitet bør gjøres med en mean reversion prosess.

4.1 Mean reversion

Estimerer graden av mean reversion i logaritmen til spotprisen hos EEX. Man tar utgangspunkt i en mean reversion-prosess for logaritmen til spotprisen fra Clewlow & Strickland(2000). Denne modellen tar også hensyn til sesongvariasjon ved at prisen skal gå mot den langvarige gjennomsnittsprisen \bar{x} .

$$dx = \alpha(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \quad (4.1)$$

Dette blir diskretisert til:

$$\Delta x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \sigma \epsilon_t \quad (4.2)$$

hvor

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha \bar{x} \Delta t \\ \alpha_1 &= -\alpha \Delta t \end{aligned} \quad (4.3)$$

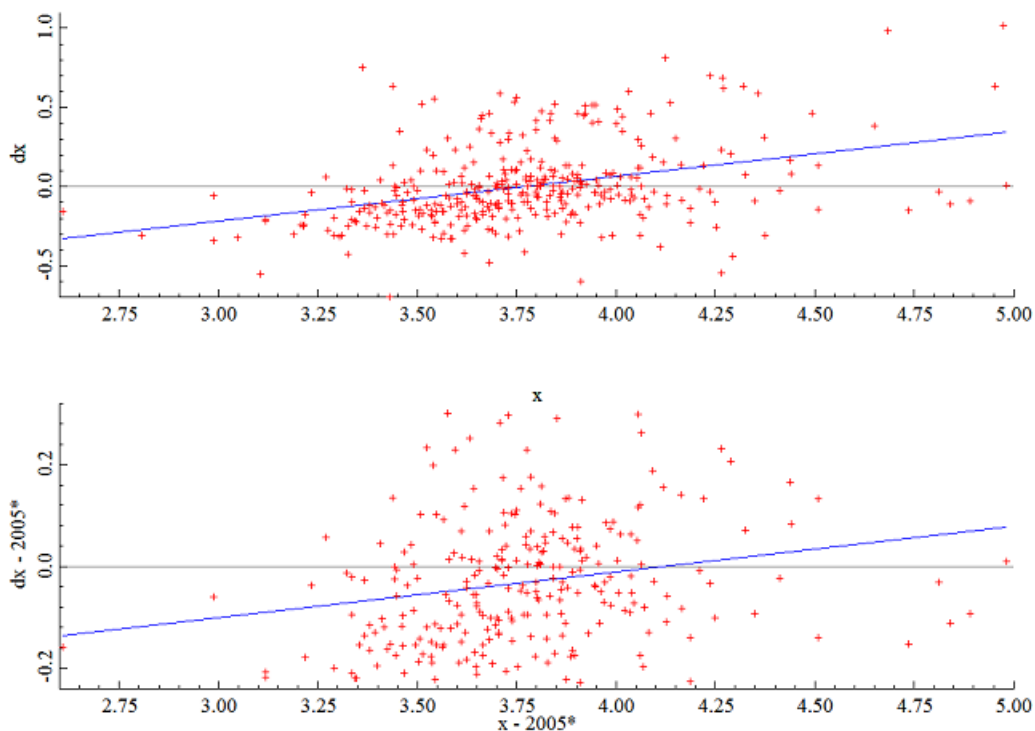
Dette betyr at observasjonene av spotprisen kan bli sett på som observasjoner til den lineære sammenhengen mellom Δx_t og x_t i nærværet av støyen, $\sigma \epsilon_t$.

¹mean reversion rate

Ut fra tabell 4.1 ser man at dragningskoeffisienten α er negativ. Det går i mot Eydeland & Wolyniec (2003) som kom fram til at $1 > \alpha > 0$ er et krav for mean reversion. Ved $\alpha > 1$ vil man nemlig ha en vekst i gjennomsnittet og ved negativ α vil gjennomsnittet synke. Grunnen til at prisseriene fra EEX gir negativ α er mest sannsynlig de store og til tider hyppige sjokkene som forekommer i elektrisitetsprisen. Selv om de utvalgte seriene er fra perioder med færre ekstreme sjokk blir koeffisienten negativ. At dragningskoeffisienten er negativ kan også bety at modellen ikke er godt nok spesifisert for å beregne en slik koeffisient for elektrisitetsprisen.

Tidsperiode	α_0	α_1	α	R^2	Halveringstid
2000-2006	-0.78107(0.0451)	0.23366(0.0133)	-542.8	0.116771	N/A
2004	-1.80277(0.1570)	0.54281(0.0471)	-198.7	0.267827	N/A
2005	-1.06422(0.1418)	0.28283(0.0375)	-103.1	0.135998	N/A
2005*	-0.36976(0.0889)	0.08980(0.0235)	-26.0	0.052740	N/A
2005**	-0.20581(0.0705)	0.04400(0.0186)	-11.7	0.025835	N/A

Tabell 4.1: Dragningskoeffisient for EEX

Figur 4.1: Fordeling av priser for Δx mot x

2005*² og 2005**³ er prisserier uten ekstreme sjokk⁴. Grunnen til at disse ble fjernet er at det er ønskelig å ha en regresjonslinje som er nedadgående. Dette for å oppnå at $\alpha_0 > 1$ og at $\alpha_1 < 0$ noe som gir en positiv α ut fra ligning 4.3. Figur 4.1 viser fordelingen av prisene for Δx i forhold til x og regresjonslinjen for 2005 og 2005*. Figur 4.1 for 2005* har en regresjonslinje med skjæringspunkt nærmere 0 og en vekstkoeffisient som er mindre enn vekstkoeffisienten til 2005. R^2 viser også for alle seriene at modellen ikke forklarer dataene særlig bra ettersom den høyeste verdien for noen av seriene er på 0.267. Men fjerningen av de ekstreme negative sjokkene er altså ikke nok til å få estimert en dragningskoeffisient. Det er altså meget vanskelig å estimere dragningskoeffisienten til elektrisitetsprisen (Eydeland & Wolyniec, 2003).

4.2 Volatilitet

Eydeland & Wolyniec(2003) oppgir to forskjellige formler for utregning av historisk volatilitet. Antar man homoskedastisk⁵ volatilitet kan en benytte ligning 4.4 hvor σ gir årlig volatilitet. Ligning 4.5 beregner heteroskedastisk volatilitet ved hjelp av et såkalt rullende vindu. Her antas det at volatiliteten σ holder seg konstant over en kortere periode og en kan regne ut volatiliteten til perioden t_k .

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\ln P_i - \ln P_{i-1}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\ln P_i - \ln P_{i-1}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \right)^2} \quad (4.4)$$

$$\sigma(t_k) = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=k-m+1}^k \left(\frac{\ln P_i - \ln P_{i-1}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} - \frac{1}{m} \sum_{i=k-m+1}^k \frac{\ln P_i - \ln P_{i-1}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \right)^2} \quad (4.5)$$

hvor n er antall observasjoner. Setter en $t_i - t_{i-1}$ som en del av et år, får man σ som årlig volatilitet. Oppdelingen av året må gjøres med bakgrunn i observasjonene en har. Har man data med handelsdager benyttes 250 som en tilnærming av flere forfattere, mot 365 ved kalenderdager. I formel 4.5 er m definert som størrelsen på det rullende vinduet og satt til 20 av Eydeland & Wolyniec(2003).

Volatilitetsberegningene tar ikke hensyn til at prisendringene er delvis predikerbar gjennom kobling mot sesongvariasjoner. Dette vil føre til at den beregnede volatiliteten blir litt lavere. Dette er ikke tatt høyde for i denne oppgaven. Se Bjerksund et al(2000) og Lucia & Scwartz (2002) for ytterligere informasjon.

²Prisserie uten de 50 mest positive sjokkene og uten de 50 mest sjokkene

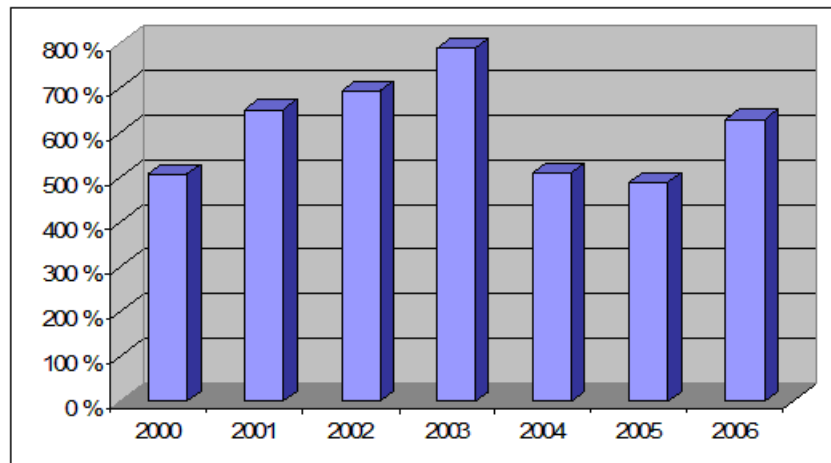
³Prisserie uten de 75 mest positive sjokkene og uten de 75 mest negative sjokkene

⁴Med sjokk menes de dagene hvor forandringen fra dagen før har vært størst

⁵Homoskedastisk vil si at restleddet til estimeringen har konstant varians

4.3 Volatilitet til spot

Antar man at volatiliteten til spotprisen på EEX er homoskedastisk gir ligning 4.4 med daglige data fra 16.6.2000 til 26.10.2006 en historisk volatilitet på 625.5%. Denne volatiliteten er over 3 ganger så høy som tilsvarende volatilitet funnet på Nord Pool av Lucia & Swartz(2002). Dette har sammenheng med at kraftproduksjonen i det tyske markedet er i stor grad drevet av termiske anlegg. De termiske anleggene har mye høyere kostnader forbundet med endringer i produksjon enn vannkraft som står for halvparten av kraftproduksjonen på Nord Pool. Den årlige homoskedastiske variasjonen i historisk volatilitet er gitt av figur 4.2



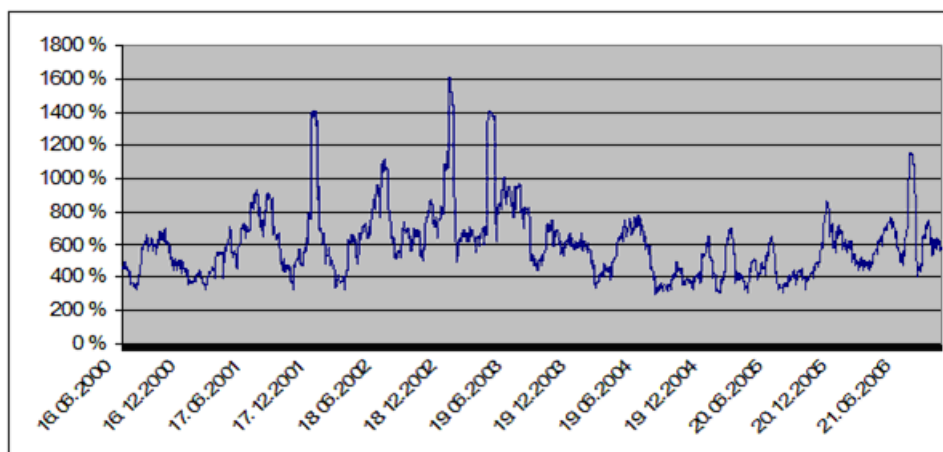
Figur 4.2: Årlig historisk volatilitet til EEX spot

Benytter en formelen for heteroskedastisk volatilitet, ligning 4.5, for å estimere den historiske volatiliteten ser man av figur 4.3 at volatiliteten endrer seg stort både i løpet av året og mellom ulike år. En ser at prissjokkene i spotprisen har stor innvirkning på volatiliteten, men at innvirkningene av prissjokkene har mindre effekt på volatiliteten de siste årene enn etter 2002 da finansielle kontrakter ble først handlet. Dette kan ha sammenheng med den økte likviditeten til markedet.

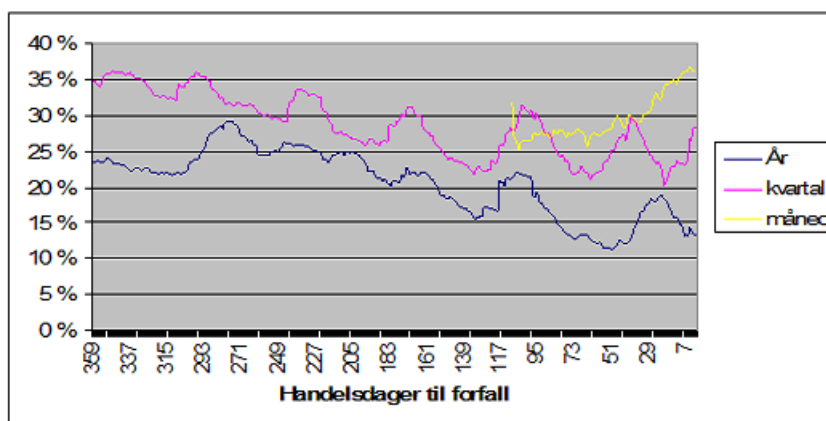
4.4 Volatilitet til futurekontrakter

Kiesel, Schindlmayr & Boerger(2005) fant for kontrakter fra California at kontrakter med lang leveringsperiode er mindre volatile enn for kortere perioder. Figur 4.4 viser gjennomsnittlig volatilitet for måneds-, kvartals- og årskontrakter på EEX⁶ og viser at det samme er tilfelle for EEX. Derimot er det ikke noe klart bevis for Samuelson-effekten er til stede for kvartals- og årskontraktene.

⁶Kontrakter benyttet er årskontrakter for peak og base med forfall i 2004-06, kvartalskontrakter for base fra kvartal 2-2005 til kvartal 4-2006, månedskontrakter for base fra august 2005 til oktober 2006



Figur 4.3: Årlig volatilitet for EEX spot - rullende vindu

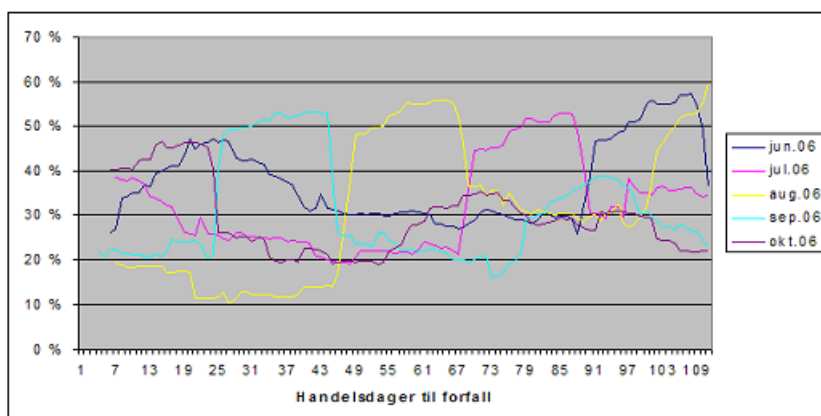


Figur 4.4: Volatilitet til gjennomsnittlig kontraktspriser - rullende vindu

Volatiliteten til kontrakter er sterkt bundet til spotprisen og dens endringer. Sprang i spotprisen fører med seg økt volatilitet i kontraktene. Dette kommer av at sprangene er forårsaket av samme underliggende faktor, som påvirker nåværende og framtidige kostnader eller etterspørsel. Ser en på volatiliteten til månedskontraktene med forfall etter at prisen på CO_2 kvoter fikk et kraftig fall i månedsskiftet april-mai 2006, ser en at volatiliteten stiger drastisk rundt denne perioden mens endringene er mye mindre ellers i kontraktslevetiden (figur 4.5).

4.5 Stasjonaritet

Stasjonariteten til spotprisen, logaritmen til spotprisen, den hetroskedastisk volatiliteten til spotprisen og spotprisens logaritmiske avkastning er testet gjennom en augmented

Figur 4.5: Volatilitet for månedskontrakter rundt prisetallet i CO_2 kvoter

Dickey-Fuller(ADF)⁷ t-test for enhetsrøtter. Testen ble gjennomført med 21 lag for å holde feilledet i testen ukorrelert. Testen har som nullhypotese at tidsserien inneholder enhetsrøtter(er ikke-stasjonær), men null hypotesen forkastes ved ADF lik -3.44 på 1 % nivå og -2.86 på 5 % nivå. Tabell 4.2 viser at ADF-testen forkastet tilstedeværelsen av enhetsrøtter på 5% signifikansnivå for logaritmen til spotprisen og på 1% nivå for spotprisen, volatiliteten og den logaritmiske avkastningen og avviser at tidsseriene er ikke-stasjonære.

Serie	$S(t)$	$\ln S(t)$	$\sigma(t_k)$	$\ln\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}\right)$
ADF-verdi	-3.712	-3.014	-4.639	-15.54

Tabell 4.2: ADF-test for tilstedeværelse av enhetsrøtter

Stasjonariteten som blir påvist gjennom ADF-testen indikerer at de ulike tidsseriene bør modelleres gjennom en mean reversion-prosess, ikke som en prosess som bygger på en enkel geometrisk brownsk bevegelse. Selv om det i kapittel 4.1 ikke ble påvist en dragningskoeffisient, gir ADF-testen at modellering av spotprisen, logaritmen til spotprisen og spotprisens logaritmiske avkastning bør gjøres med en mean reversion-modell. Dette støtter Barz & Johnson(2001) sin konklusjon basert på tester fra Nord Pool om at mean reversion-prosesser bedre forklarer markedets elektrisitetsmarkedet enn en geometrisk brownsk bevegelse.

Den heteroskedastisk volatiliteten til spotprisen blir funnet stasjonær, som gir at volatiliteten vender tilbake til et gjennomsnittsnivå etter et hopp. Av figur 4.3 ser man at volatiliteten er høyere om vinteren og om sensommeren. Siden prisendringene er delvis predikerbare gjennom blant annet sesongvariasjoner, bør dette tas hensyn til i beregning av volatilitet og modellering av elektrisitetspriser.

⁷Se Tillegg B for beskrivelse av enhetsrøtter og ADF-testen.

Kapittel 5

Faktormodeller

Dette kapitlet tar for seg ulike faktormodeller for spotpris og forwardkurver som baserer seg på stokastiske differensialligninger. Kapitlet er ment som en introduksjon til modeller som har blitt lansert for å forklare elektrisitetsprisens endringer. Litteraturen som omhandler elektrisitetsmarkeder har fokus på å finne en mer realistisk modell for prisutviklingen, da en ren geometrisk brownsk bevegelse, som Black & Scholes(1973) opsjonsteori er bygget på, dårlig beskriver elektrisitetsmarkedets utvikling(Barz & Johnson, 2001). I kapitlet blir det presentert ulike modeller lansert av Schwartz & Smith, Lucia & Schwartz, Clewlow & Strickland, Kiesel et al, Hagan et al, Benth & Koekebakker og Geman & Roncoroni. Modellene kan benyttes til å modellere volatilitetskurver, forwardkurver og fremtidig spotpris, og fungerer derfor som et viktig støttegrunnlag for beslutninger om produksjon, investering og risikostyring innenfor elektrisitetsmarkedet.

5.1 Schwartz (1997)

Schwartz (1997) presenterer tre forskjellige faktormodeller for modellering spotpris for handelsvarer. Modellene blir testet ut på olje, gull og kobber som er handelsvarer med lagringsmuligheter. Modellene og hans funn er likevel viktige siden flere av nyere faktormodeller for elektrisitet, som Lucia & Schwartz (2002) og Clewlow & Strickland (1999), bygger på arbeidet til Schwartz (1997).

Enfaktormodell med mean reversion:

$$\frac{dS}{S} = \kappa(\mu - \ln S) dt + \sigma dZ \quad (5.1)$$

Tofaktormodell med korrelert geometrisk brownsk bevegelse og mean reversion, presentert av Gibson & Schwartz (1990):

$$\frac{dS}{S} = (\mu - \delta) dt + \sigma_1 dZ_2 \quad (5.2)$$

$$d\delta = \kappa(\alpha - \delta) dt + \sigma_2 dZ_2 \quad (5.3)$$

$$dZ_1 dZ_2 = \rho dt \quad (5.4)$$

Trefaktormodell som er en kombinasjon av Gibson & Schwartz sin tofaktormodell og Vasicek sin rentesatsmodell¹:

$$\frac{dS}{S} = (r - \delta) dt + \sigma dZ_1^* \quad (5.5)$$

$$d\delta = \kappa (\hat{\alpha} - \delta) dt + \sigma_2 dZ_2^* \quad (5.6)$$

$$dr = \alpha (m^* - r) dt + \sigma_3 dZ_3^* \quad (5.7)$$

$$dZ_1^* dZ_2^* = \rho_{12} dt \quad dZ_1^* dZ_3^* = \rho_{13} dt \quad dZ_2^* dZ_3^* = \rho_{23} dt \quad (5.8)$$

Schwartz (1997) konkluderer med at tofaktormodellen beskriver markedene betraktelig bedre enn enfaktormodellen. Det er derimot lite å tjene på å utvide modellen til tre faktorer ved å inkludere Vasicek sin rentesats.

5.2 Schwartz & Smith (2000) / Lucia & Schwartz(2002)

Schwartz & Smith(2000) presenterer en korttid-langtids tofaktormodell (5.9 - 5.12) som tar for seg prising av fysiske handelsvarer ved hjelp av spot- og forwardpriser. På kort sikt tillater den ene faktoren i modellen mean reversion for å inkludere kortsiktige endringer i prisen mens den andre faktoren fanger opp usikkerheten i prisene på lang sikt. De viser også at tofaktormodellen er en reparametrisering av Gibson & Schwartz(1990) sin modell (5.2 - 5.4), men at deres modell på lengre sikt har en fordel når perioder med lang tid til forfall skal estimeres i forhold til Gibson & Schwartz. Modellen bygger på at langtidskontrakter i markedet gir informasjon om fremtidig gjennomsnittspris, mens forskjellen i korttids- og langtidskontrakter forteller om de kortsiktige endringene i markedet som for eksempel sesongvariasjoner. På denne måten tar man hensyn til korrelasjonen mellom kortsiktig og langsiktig prisutvikling.

$$\ln S = \chi + \xi \quad (5.9)$$

$$d\xi = \mu dt + \sigma_\xi dZ_\xi \quad (5.10)$$

$$d\chi = -\kappa \chi dt + \sigma_\chi dZ_\chi \quad (5.11)$$

$$dZ_\xi dZ_\chi = \rho dt \quad (5.12)$$

¹Vasicek(1977) lanserte en enfaktormodell for å beskrive rentebevegelser

Schwartz & Smith(2000) nevner at ligning 5.9 kan utvides med et sesongavhengig ledd for handelsvarer som er sesongavhengige. Lucia & Schwartz(2002) utvider korttid-langtids modellen med et sesongledd, $f(t)$, og viser at sesongleddet bedrer estimeringen av fremtidige priser ved modellering av priser fra Nord Pool. Funksjonen $f(t)$ er enten en diskret funksjon eller en cosinusfunksjon, hvor cosinusfunksjonen (5.13 - 5.14) gir best estimat.

$$f(t) = \alpha + \beta D_t + \gamma \cos \left((t - \tau) \frac{2\pi}{365} \right) \quad (5.13)$$

$$D_t = \begin{cases} 1 & \text{hvis dag } t \text{ er helg eller helligdag} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (5.14)$$

For estimering av parametrene i 5.9 - 5.12 benyttes et kalmanfilter. Estimeringen blir best hvis en benytter både spot- og futurepriser, men prosedyren trenger likvide futurekontrakter med homogene forfallsdatoer. Lucia & Schwartz(2002) finner at likviditeten ikke er tilstrekkelig for Nord Pool sine data fra 1993-1999 for å foreta estimeringen, men benytter en alternativ metode for å finne implisitte variable en kan bruke i faktormodellene. Se Schwartz & Smith(2000) kapittel 5 og Lucia & Schwartz(2002) kapittel 6 for oppsett av henholdsvis kalmanfilteret og alternativ metode.

5.3 Geman & Roncoroni (2006)

Med bakgrunn i påvirkningen påført av manglende lagringsmulighet for elektrisitet og effekten dette har på korttidstilbud og -etterspørsel, introduserer Geman & Roncoroni(2006) en modell for lognormal spotprisprosess² som inkluderer mean reversion og hopp. Geman & Roncoroni videreutvikler tidligere mean reversion-hoppmodeller foreslått av blant annet Deng(1999), som kun så på store positive hopp, og Escibano, Peña & Villaplana(2002) som inkluderte både positive og negative hopp, men hvor hoppene er modellert uten sammenheng med resten av prisprosessen. Geman & Roncoroni sin modell inkluderer hopp med tilfeldig intensitet og størrelse, i både positiv og negativ retning, som utløses ved at den logaritmiske prisen når en bestemt terskel. Modellene for den logaritmiske spot prisen, $E(T)$, er som følger:

$$dE(t) = D\mu(t) dt + \theta [\mu(t) - E(t^-)] dt + \sigma dW(t) + h(t^-) dJ(t) \quad (5.15)$$

Her står D for en standard primærkontrakt³, $\mu(t)$ er deterministisk sesongvariasjon. $\theta[\mu(t) - E(t^-)]$ gir hastigheten på mean reversion tilbake til et gjennomsnittsnivå $\mu(t)$, der θ er en positiv konstant. Volatiliteten σ følger en brownsk bevegelse. Hoppfaktoren $h(t)$ er avhengig av en diskre prosess J for størrelse, retning og intensitet⁴. t^- gir

²For at prisen ikke skal bli negativ.

³En kontrakt som ikke kan splittes opp i mindre kontrakter, f.eks månedskontrakt

⁴Se Geman & Roncoroni(2006) for formel for intensiteten, størrelsen og retningen til hopp

gjenværende nivå ved tiden t .

Parameterestimeringen er komplisert på grunn av at hoppprosessen gjør modellen ulineær, men Geman & Roncoroni(2006) presenterer en metode som benytter seg av Maximum Likelihood for å finne lokale optimum. Modellen ble testet ut på daglige priser fra tre større amerikanske elektrisitetsmarkeder.

5.4 Clewlow & Strickland (1999)

Med motivasjon fra Schwartz(1997) sin enfaktormodell, 5.1, formulerer Clewlow & Strickland(1999) en mer generell enfaktormodell for prisen på en forwardkurve:

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sigma e^{-\alpha(T-t)} dz(t) \quad (5.16)$$

Modellen har to volatilitetsparametre, hvor σ beskriver volatiliteten på avkastningen til spot- og forwardpriser, mens α bestemmer hvor fort volatiliteten til forwardpriser synker med økende tid til forfall. α fungerer også som en tidsvarierende dragningskoeffisient til spotprisen. Parametrene kan estimeres direkte fra prisen på spotprisopsjoner eller forwardkontrakter, eventuelt gjennom tilpasning av historisk volatilitet for forwardpriser.(Clewlow & Strickland, 1999)

Enfaktormodellen kan generaliseres og utvides til en multifaktormodell for å beskrive forwardkurven.

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T) dz_i(t) \quad (5.17)$$

Her gir n antallet uavhengige kilder til usikkerhet gitt av dz som brownsk bevegelse. Hver uavhengige variabel er koblet med en volatilitetsfunksjon som beskriver størrelsen og retningen på det tilfeldige hoppet for hvert punkt på forwardkurven. Antall uavhengige variable blir estimert ut fra prinsippkomponentbetraktninger.(Clewlow & Strickland, 2000)

Spesifikasjon av en full forwardprisdynamikk impliserer en spotprisprosess. Clewlow & Strickland(1999) viser at den implisitte spotprisprosessen til 5.16, er konsistent med 5.1. Den implisitte spotprisen til 5.16 er;

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left[\frac{\delta \ln F(0, t)}{\delta t} + \alpha(\ln F(0, t) - \ln S(t)) + \frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2\alpha t}) \right] dt + \sigma dz(t), \quad (5.18)$$

som ved å sette den langsiktige risikojusterte driften μ lik 5.19 oppnår konsistens med Schwartz(1997) sin enfaktormodell.

$$\mu(t) = \frac{\delta \ln F(0, t)}{\delta t} + \ln F(0, t) + \frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2\alpha t}) \quad (5.19)$$

5.5 Kiesel, Schindlmayr & Boerger (2005)

Kiesel et al(2005) kommer med en tofaktormodell for prising av forwardkontrakter for elektrisitet som har hensikt å inkludere sesongvariasjoner og terminstrukturen til volatilitet. Modellen er en videreutvikling av Clewlow & Strickland(1999) sitt arbeid.

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = e^{-\kappa(T-t)} \sigma_1 dW_t^1 + \sigma_2 dW_t^2 \quad (5.20)$$

dW er brownske bevegelser som antas å være ukorrelerte, og κ har samme effekt som α i 5.16 som et tidsvarierende mean reversion-ledd. Denne modellen er derimot kun blitt utviklet for prissetting av opsjoner. Den klarer heller ikke å inkludere volatilitetssmil og er derfor bare testet ut på at-the-money opsjoner(Kiesel et al, 2005)

5.6 Benth & Koekebakker (2005)

Benth & Koekebakker(2005) presenterer en Heath-Jarrow-Merton(HJM)⁵ modell som er tilpasset elektrisitetsmarkedet. Modellene er en lognormal enfaktor forwardkurvmodell som gir endring i pris på en forwardkontrakt med levering over en fremtidig gitt periode(fra T_1 til T_2). Modellen benytter data fra ikke overlappende kontrakter i markedet og er generelt formulert som følger;

$$dF(t, T_1, T_2) = \bar{\sigma}(t) F(t, T_1, T_2) dW(t) \quad (5.21)$$

der $\bar{\sigma}$ beskriver volatiliteten i kontraktsperioden. Benth & Koekebakker(2005) viser at den lognormale modellen kan brukes til å verdsette opsjoner og benyttes til risikostyring, men ved empiriske tester med data fra Nord Pool klarer ikke modellen å forklare de tykke halene i den lognormale return. HJM-modellen klarer ikke å utlede dynamikken i spotprisen basert på denne kontraktsmodellen.

5.7 Hagan, Kuman, Lesniewski & Woodward(2002)

Hagan et al(2002) presenterer en tofaktormodell, kalt SABR-modell⁶, for modellering av forwardpriser. Modellen benytter to korrelerte brownske bevegelser for å få korrelasjonen mellom endringen i forwardprisene og endring i volatilitet. Modellen har til hensikt å

⁵Se Heath, Jarrow & Merton(1992) for beskrivelse av HJM-modellens grunnprinsipper

⁶Stokastisk- $\alpha\beta\rho$ -modell

modellere riktigere volatilitetssmil for å få en bedre risikostyring⁷. SABR-Modellen er definert:

$$d\hat{F} = \hat{\alpha}\hat{F}^\beta dW_1 \quad (5.22)$$

$$d\hat{\alpha} = \nu\hat{\alpha}dW_2 \quad (5.23)$$

$$dW_1dW_2 = \rho dt \quad (5.24)$$

Her er $\hat{\alpha}$ volatilitet, ν volatiliteten til volatiliteten, F forwardprisen og β gir fordelingen til forwardprisen⁸. Ved å teste endringen i forwardprisene, får man priser for europeiske opsjoner. Basert på disse prisene kan en finne implisitt volatilitet, markedets risikovurdering, og dynamikken til volatilitetssmilet. Hagan et al(2002) testet SABR-modellen på amerikanske renter. Fløgstad & Løken(2006) benyttet modellen med data fra Nord Pool og får gode estimater for fremtidig volatilitet og prisutvikling.

⁷Modellering med volatilitetssmil gir et riktigere estimat på opsjonspriser i forhold til for eksempel Black(1976) sin prismodell som antar konstant volatilitet. Ved bruk av Black(1976) er det vanlig at tradere hever volatiliteten på out-of-money kontrakter i forhold til at-the-money kontrakter for å tilpasse modellen til faktiske estimat fra markedet(Haug, 2006)

⁸0, 0.5 og 1 er de vanligste β -verdiene å benytte. $\beta = 0$ gir en stokastisk normalfordelt modell, 0.5 gir en stokastisk CIR-modell(Cox, Ingersoll & Ross, 1985) mens 1 gir en stokastisk lognormalfordelt modell. Se West(2005) for diskusjon om β -verdier.

Kapittel 6

Modellenes egnethet for EEX

Dette kapitlet ser på modellene beskrevet i kapittel 5 og gir en anbefaling på hvilke modeller som bør ligge til grunn for å når en videre skal se på prissetting og risikostyring av kontrakter handlet med spotprisen på EEX som underliggende. For å få en god risikoanalyse ved ulike forutsetninger foreslås det at modellene til Lucia & Schwartz(2002), Geman & Roncoroni(2006) og Hagan et al(2002) blir benyttet i videre arbeid.

6.1 Kriterier for valg av modell

Kravene vi setter til modellene som er aktuelle for å jobbes videre med er at de skal være enkle, realistiske og være egnet for hedging på opp til 1 års sikt. De empiriske studiene i kapittel 4 støtter Barz & Johnson(2000) sin konklusjon om at en mean reversion-prosess er bedre egnet enn en geometrisk brownsk bevegelse for en realistisk beskrivelse av elektrisitetsprisens utvikling. Bjerksund et al(2000) sier at enfaktormodeller typisk er dårlig egnet til hedging men kan være tilstrekkelige for prissetting. Siden videre arbeid vil fokusere på hedging, er en flerfaktormodell å foretrekke, men vårt ønske om at modellen likevel skal være enkel gjør at vi ønsker å begrense antall faktorer. Våre empiriske tester av data fra EEX viser store likhetstrekk med andre deregulerte elektrisitetsmarkeder og det antas derfor at EEX ikke har noen ytterligere særegenheter som vil påvirke valg av modell en det som er beskrevet gjennom empiriske tester fra andre markeder.

6.2 Valg av modell

Grunnet at en i videre arbeid skal se på risikostyring, utelukker kravet om en flerfaktormodell modellene til Clewlow & Strickland(1999) og HJM-modellen til Benth & Koekebakker(2005). Et annet problem med HJM-modellen er at dynamikken i spotprisen ikke kan hentes fra dynamikken til forwardkontraktene og at volatiliteten ikke blir stokastisk beskrevet. Den generelle flerfaktormodellen til Clewlow & Strickland(2000) inneholder ingen mean reversion-prosess og ser kun på usikkerheten som uavhengige brownske bevegelser.

Lucia & Schwartz(2002) og Geman & Roncoroni(2006) sine modeller genererer en spot-prisutvikling som man ved hjelp av arbitrasjeteori kan utlede dynamikken i forward- og futureprisene. Lucia & Schwartz sin modell tar hensyn til korrelasjon mellom kortsiktig og langsiktig prisutvikling, men betrakter volatiliteten som to forskjellige konstanter for de to periodene. Kontraktene som benyttes må ha homogene forfallsrom, som ikke stemmer overens med hva som finnes i merkedet. Dette kan bidra til at en kan få en feilestimering av prisene på kontraktene. Geman & Roncoroni sin hoppmodell benytter brownsk bevegelse til å beskrive volatilitet og modellerer inn hoppene gjennom et grensenivå som bidrar til at hoppene plasseres mer hensiktsmessig i analyseperioden. Audet et al(2004) indikerer derimot at en bør modellere flere brownske bevegelser i stedet for å inkludere en hoppprosess ved modellering av dynamikken i kontraktspriser.

Sammenligner man Kiesel et al(2005) sin tofaktormodell med SABR-modellen, har SABR-modellen sin styrke i at den fanger opp volatilitetssmil og kan dermed i motsetning til Kiesel et al sin modell brukes for kontrakter som ikke er at-the-money. SABR tar hensyn til korrelasjonen mellom pris og den stokastiske volatiliteten som bidrar til at sesongvariasjonene til volatiliteten blir godt beskrevet. Modellen til Kiesel et al modellerer dragningskoeffisienten som en tidsvarierende variabel som øker med tiden til forfall.

Mulighetene for at resultatene kan bli forskjellige i de ulike modellene gjør at det ofte er en fordel å se på flere forskjellige prismodeller for å få oversikt over konsekvensene og sensitiviteten ved ulike forutsetninger(Haug 2006). Med bakgrunn i dette bør videre arbeid benytte modellene til Lucia & Schwartz, Geman & Roncoroni og SABR-modellen til Hagan et al. for å få et godt sammenligningsgrunnlag. Disse tre modellene baserer seg på ulike grunnlag og vil derfor gi en god indikasjon på mulige utfall gjennom en risikoanalyse.

Kapittel 7

Konklusjon

Målet med oppgaven har vært å gi forfatterne et større innblikk i det tyske elektrisitetsmarkedet EEX og se teoretisk på ulike faktormodeller for modellering av spotprisen og forwardkurver. Dette for at vi i et senere arbeid skal kunne benytte resultatene som et grunnlag for verdiesetting og risikostyring av fleksible kontrakter med spotprisen til EEX som underliggende.

Empiriske studier av EEX har vist store likhetstrekk med andre elektrisitetsmarkeder som for eksempel Nord Pool. Prisene på EEX er preget av prissjokk som følge av den store andelen med termiske kraftanlegg som gjennom høye start- og stoppkostnader og minimum oppe- og nedetider bidrar til å senke fleksibiliteten ved større endringer i etterspørselen etter elektrisitet. Analyser av historisk spotpris og forwardkontrakter viser klare repeterende variasjoner i spotprisen, både på dag, ukes og sesongnivå.

Vi har funnet en meget høy volatilitet til spot på 626% og påvist mean reversion i spotprisen, logaritmisk spotpris, den logaritmiske avkastningen og i volatiliteten til spotprisen. Volatiliteten viser klare tegn til sesongvariasjoner og ytterligere studier på volatilitet bør gjennomføres hvor volatilitetens predikerbarhet bør inkluderes i beregningene. Det blir gjort forsøk på å beregne dragningskoeffisienten til spotprisen og logaritmen til spotprisen men på grunn av store prishopp kommer vi ikke frem til et resultat.

Vi sammenligner faktormodellene til Lucia & Schwartz, Geman & Roncoroni, Clewlow & Strickland, Kiesel et al, Benth & Koekebakker og Hagan et al. Basert på krav om realisme, enkelhet og egnethet til hedging samt mulighetene for konsekvensanalyse ved ulike forutsetninger anbefaler vi at det videre arbeidet skal fokusere på tofaktormodellen med sesongvariasjon til Lucia & Schwartz, hoppmodellen til Geman & Roncoroni og SABR-modellen til Hagan et al.

Kapittel 8

Referanser

Audet, N., Heiskanen, P., Keppo, J. & Vehvilinen, I. (2004); 'Modeling electricity forward curve dynamics in the Nordic Market' , in Modelling Prices in Competitive Electricity Markets (edited by Bunn, D. W.), Wiley Series in Financial Economics. s. 251-264.

Barz, G. & Johnson, B. (2001); 'Energy modelling and the management of uncertainty.', Risk Books, Second edition.

Benth, F. E. & Koekebakker, S. (2005); 'Stochastic modeling and financial electricity contracts.', preprint, University of Oslo - Department of Mathematics.

Bjerkstrand, P., Rasmussen, H. & Stensland, G. (2000); 'Valuation and risk management in the Nordic electricity market.' Working paper, Institute of Finance and Management Science, Norwegian School of Economics and Business Administration.

Black, F. (1976); 'The Pricing of Commodity Contracts.' Journal of Financial Economics, nr. 3, s. 167-179.

Black, F. & Scholes, M. (1973); 'The Pricing of Options and Corporate Liabilities.' Journal of Political Economy, 81, s. 637-654.

Bunn, D. W. & Karakatsani, N. (2003); 'Forecasting Electricity Prices.', Working Paper, London Business School.

Clelland, L. & Strickland, C. (1999); 'Valuing Energy Options in a One Factor Model Fitted to Forward Prices.', Working Paper, School of Finance and Economics, Technical University of Sydney.

Clelland, L. & Strickland, C. (2000); 'Energy Derivatives; Pricing and Risk Management.', Lacima Publications.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E. & Ross, S. A. (1985); 'A Theory of the Term Structure of the Interest Rates.' *Econometrica*, vol. 53, nr. 2, s. 385-408.

Deng, S. (1999); 'Stochastic models of energy commodity prices and their applications: mean reversion with jumps and spikes.' Unpublished Manuscript, Georgia Institute of Technology.

Escribano, Á., Peña, J. I. & Villaplana, P. (2002); 'Modeling electricity prices: international evidence.' Working Paper 02-27, Economic Series 08, Departamento de Economía, Universidad Carlos III de Madrid.

Eydeland, A. & Wolyniec, K. (2003); 'Energy and Power Risk Management'. John Wiley & Sons, Inc.

Fama, E. F. & French K. R. (1988); 'Business cycles and the behaviour of metals prices.' *Journal of Finance* vol.43, s. 1075.1093.

Fløgstad, J. H. & Løken, L. A. (2006); 'Forwardkurvemodeller i det nordiske elektrisitetsmarkedet'. Norwegian University of Science and Technology - Department of Industrial Economics and Technology Management.

Geman, H. & Roncoroni, A. (2006); 'Understanding the Fine Structure of Electricity Prices.' Forthcoming in *The Journal of Business*, vol. 79, nr 6.

Gibson, R. & Schwartz, E. S. (1990); 'Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims.' *The Journal of Finance*, 45, s. 956-976.

Gujarati, D. N. (2003); 'Basic Econometrics', McGraw-Hill, Fourth edition.

Hagan, P. S., Kumar, D., Lesniewski, A. S. & Woodward, D. E. (2002); 'Managing Smile Risk.' *Willmott Magazine* vol. 3, s. 84-108.

Haug, E. G. (2006); 'Practical Valuation of Power Derivatives', *Willmott Magazine* January, s. 48-56.

Heath, D., Jarrow, R. & Morton A. (1992); 'Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation', *Econometric*, 60 [1], s. 77-105.

Hong, H. (2000); 'A Model of Returns and Trading in Future Markets.', *Journal of Finance* vol.55 , nr. 2, s. 959-988.

Kiesel, R., Schindlmayr, G. & Boerger, R. H. (2005); 'A Two-Factor Model for the Elec-

tricity Forward Market.', Working Paper, University of Ulm.

Knittel, C. R. & Roberts, M. R. (2001); 'An empirical examination of deregulated electricity prices.' Unpublished Manuscript, Boston University.

Lucia, J. & Schwartz, E. S. (2002); 'Electricity Prices and Power Derivatives - Evidence from the Nordic Power Exchange.' *Review of Derivatives Research* , 5, s. 5-50.

Lund A. & Ollmar, F. (2003); 'Analyzing Flexible Load Contracts.', Norwegian School of Economics and Business Administration.

Pindyck, R. S. (1998); 'Long-run evolution of energy prices.' Massachusetts Institute of Technology

Routledge, B. R., Seppi, D. J. & Spatt, C. S. (2000); 'Equilibrium Forward Curves for Commodities.', *Journal of Finance* vol.55 , nr. 3, s. 1297-1338.

Routledge, B. R., Seppi, D. J. & Spatt, C. S. (2001); 'The Spark Spread: An Equilibrium Model of Cross-Commodity Price Relationships in Electricity.', Working Paper, Carnegie Mellon University.

Samuelson, P. A. (1965); 'Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly.' *Industrial Management Review* 6, s. 41-50.

Schwartz, E. S. (1997); 'The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging.' *Journal of Finance*, 52, s. 923-973.

Schwartz, E. S. & Smith, J. E. (2000); 'Short-Term Variations and Long-Term Dynamics in Commodity Prices.' *Management Science*, 46, s. 893-911.

Vasicek, O. (1977); 'An Equilibrium Characterisation of the Term Structure'. *Journal of Financial Economics* 5, s. 177-188.

West, G. (2005); 'Calibration of the SABR model in illiquid markets.' *Applied Mathematical Finance* 12(4), s. 371-385.

Tillegg A

Statistiske begreper

Skjevhet

Det statistiske begrepet til asymmetrien i en fordeling til serien omkring gjennomsnittet er skjevhet. Den beregnes slik:

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - \bar{y}}{\hat{\sigma}} \right)^3 \quad (\text{A.1})$$

Her er $\hat{\sigma}$ basert på den biaserte estimatoren for varians.

En normalfordelt serie har en skjevhet på 0. Om skjevheten er positiv så har fordelingen en lang hale mot høyre, mens negativ skjevhet betyr at fordelingen har en lang hale mot venstre.

Kurtose

Kurtose er et statistisk begrep som brukes som et mål på spissheten/flatheten til en dataserie. Formelen for vanlig kurtose er som følger:

$$K = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - \bar{y}}{\hat{\sigma}} \right)^4 \quad (\text{A.2})$$

Her er $\hat{\sigma}$ basert på den biaserte estimatoren for varians.

Overskytende kurtose er

$$K^* = K - 3 \quad (\text{A.3})$$

Det skilles mellom vanlig kurtose (Pearson-kurtose) og overskytende kurtose (Fisher-kurtose). Hos en normalfordeling er den vanlige kurtosen lik 3, men om man regner med overskytende kurtose så er den 0 hos normalfordelingen. Program som Microsoft Excel og GiveWin bruker overskytende kurtose. Om kurtosen overstiger kurtosen til en normalfordeling regnes fordelingen som spisset (leptokurtisk) og om den er mindre enn normalfordelingens kurtose regnes fordelingen som flat (platykurtisk).

Tillegg B

Empiriske tester

Jarque-Bera

Jarque-Bera-testen går ut på å teste om en serie av data er normalfordelte. Formelen er

$$JB = \frac{N}{6} \left(S^2 + \left(\frac{K^2}{4} \right) \right) \quad (\text{B.1})$$

hvor N er antall observasjoner, S er skjevheten og K er overskytende kurtose.

Jarque-Bera-testen er χ^2 -fordelt med to frihetsgrader under nullhypotesen om normalfordeling. Dette betyr at om Jarque-Bera-verdien overskrider 5.99, så vil dataserien man tester ikke være normalfordelt.

Dickey-Fullers

Når man skal beskrive prisprosesser er det vanlig å ta utgangspunkt i geometrisk brownisk bevegelse (GBM), mean reversion eller andre stokastiske modeller. For at prismodellen som brukes skal fungere optimalt er det essensielt at den grunnleggende modellen er riktig og en enhetsrøtttest vil gi svar på om prisrekken er stasjonær eller ikke-stasjonær. En mean reversion-prosess inneholder ikke enhetsrøtter (er stasjonær), og kjennetegnes ved at prisene vender tilbake mot, og varierer rundt en pris etter store hopp. En GBM-prosess har enhetsrøtter (ikke-stasjonær), og er dermed konsistent med random walk. (Gujarati, 2003)

Enhetsrøtttesten tar utgangspunkt i at man kan ha tre ulike typer stokastiske prosesser; B.2, B.3 og B.4;

I prosess en er Y_t en random walk.

$$\begin{aligned}
Y_t &= \rho Y_{t-1} + u_t \quad \text{der } -1 \leq \rho \leq 1 \\
Y_t - Y_{t-1} &= \rho Y_{t-1} - Y_{t-1} + u_t \\
\Delta Y_t &= \delta Y_{t-1} + u_t
\end{aligned} \tag{B.2}$$

der u_t er en hvit støy feil¹, $\delta = \rho - 1$ og Δ er differensialoperatoren. Det er praktiske grunner til at regresjonen skrives på differensiert form.

Prosess 1 har Y_t som en random walk med drift

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \delta Y_{t-1} + u_t \tag{B.3}$$

I prosess 2 er Y_t en random walk med drift rundt en stokastisk trend

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + u_t \tag{B.4}$$

Den mest kjente enhetsrottesten er Dickey-Fuller testen. Tankegangen bak denne er at man kjører en regresjon med Y_t som avhengig variabel og Y_{t-1} som uavhengig variabel, for å finne ut om δ er statistisk signifikant lik null eller ikke. Dette gir følgende hypoteser:

$H_0 : \delta = 0, \tau_{kritisk} < \tau$, tidsserien er ikke-stasjonær.

$H_1 : \delta \neq 0, \tau_{kritisk} > \tau$ tidsserien er stasjonær.

$$\tau = \frac{\hat{\beta}_2}{SE(\hat{\beta}_2)}$$

Prosess 1 vil da være stasjonær med gjennomsnitt lik null, prosess 2 er stasjonær med gjennomsnitt $= \beta_1 / (1 - \rho)$ og prosess 3 er stasjonær rundt en deterministisk trend. Testobservatoren i enhetsrottesten τ følger ikke den vanlige t-fordelingen ettersom nullhypotesen antar ikke-stasjonær tidsrekke. Den følger derimot en fordeling der de kritiske signifikansverdiene er beregnet ved hjelp av Monte Carlo-simuleringer (Gujarati, 2003).

Dickey-Fullertesten forutsetter at feilledet u_t ikke er korrelert. Den avhengige variabelen ΔY_t kan imidlertid være autokorrelert med tidsledd lenger tilbake enn ett. I så fall vil også feilledet u_t være autokorrelert, og man blir nødt til å bruke Augmented Dickey-Fullertest slik at feilledet blir ukorrelert. I denne testen legger man til forsinkede verdier av den avhengige variabelen ΔY_t slik at man fanger opp korrelasjon mellom den avhengige variabelen og tidligere tidsledd.

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + u_t \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t \tag{B.5}$$

¹En hvit støy feil innebærer at feilen er ukorrelert med feil i tidligere perioder

der ϵ_t er en hvit støy feil. Antallet differanseledd ΔY_{t-i} som skal legges til bestemmes som regel empirisk ved at man inkluderer så mange ledd at feilleddet ϵ_t blir ukorrelert (Gujarati, 2003).

Enhetsrottesten er sensitiv til valg av prosess. Hvis man estimerer tidsserien og velger feil prosess kan konklusjonen man ender opp med være feil fordi prosessene B.2, B.3 og B.4 har ulike kritiske signifikansnivå. Dette gjør at man kan komme til å akseptere/forkaste nullhypotesen på feil grunnlag ved å velge feil prosess (Gujarati, 2003). De fleste Dickey-Fullertestene har lav styrke, noe som innebærer at testen har en tendens til å akseptere nullhypotesen oftere enn den burde. Testen oppnår svake resultater når tidsserien er på 30 år eller mindre, fordi mean reversion ofte går sakte og er vanskelig å fange opp over så korte perioder (Pindyck, 1998).