

SIS 1101
Investering, finans og økonomistyring

Opsjoner i kraftmarkedet

NTNU
Institutt for industriell økonomi og
teknologiledelse

November 2002

Roald Maudal
Kristian Solum

Forord

Denne prosjektoppgaven har blitt utført ved Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse, Norges teknisk- naturvitenskapelige universitet ,høsten 2002. Rapporten er utarbeidet i faget SIS 1101, Investering, finansiering og økonomistyring, fordypningsemne. Prosjektet er lagt opp som et innledende arbeid til hovedoppgave som skrives våren 2003.

Oppgaven kunne ikke vært gjennomført i sin nåværende form uten eksterne bidragsytere. Vi ønsker derfor å takke Espen Brevik ved M3 Kraft/APX og Kenneth Andreassen ved Nord Pool ASA for tilgang til historiske data fra kraftmarkedet. En stor takk rettes også til vår veileder Stein-Erik Fleten for god veiledning, interessante diskusjoner og raske tilbakemeldinger.

Trondheim, 20.november 2002

Kristian Solum

Roald Maudal

Sammendrag

Denne prosjektoppgaven omhandler opsjoner på underliggende forwardkontrakter i det nordiske kraftmarkedet. Spotprisene i det nordiske kraftmarkedet viser flere særegne egenskaper som skiller de fra andre råvarer og finansielle markeder, deriblant en svært høy volatilitet. Manglende lagringsmuligheter for forbrukere og begrensede lagringsmuligheter for produksjonssiden sammen med begrensede overføringsforbindelser gir utslag i daglige og ukentlige svingninger i prisene. Dette gir også geografisk betingede variasjoner i prisene. Det nordiske kraftsystemet er dominert av 60 % vannkraftverk. Tilsiget av vann og forbruket av elektrisitet er motsyklisk og dette er med på å skape sesongvariasjoner i prisene. Elektrisitetsprisene kjennetegnes av en mean reversion prosess. Dette betyr at prisene utvikler seg med en draging mot et likevektsnivå. Samtidig observeres det at store endringer, eller sprang, i prisene er svært vanlig. Dette skjer spesielt i situasjoner hvor produksjon og forbruk er høyt. Dette henger igjen sammen med marginalkostnadskurven for elektrisitet.

Det finnes en rekke stokastiske modeller for modellering av spotprisene. Denne oppgaven fokuserer spesielt på en enfaktor mean reversion modell med sesongvariasjoner i likevektsnivået. Denne modellen er utviklet av Lucia og Schwartz (2002). Med bakgrunn i denne modellen utvikles det en generalisert forwardmodell. Deretter utvikles en analytisk opsjonsmodell, først for forwardkontrakter med leveringsperiode på en dag og deretter for generelle forwardkontrakter. Gyldigheten til det analytiske uttrykket bekreftes ved å foreta en Monte Carlo simulering. Dette benyttes også for å vise at antakelser gjort i den generaliserte modellen er fornuftige.

Basert på markedspriser for underliggende kontrakter beregnes opsjonsverdien for en rekke kontrakter for et sett med ulike datoer. Disse sammenlignes med markedsprisen på opsjonen. Denne markedsprisen er beregnet ved å benytte historiske data for implisitt volatilitet og Black 76 modellen. Black 76 er i dag den mest anvendte opsjonsmodellen i det nordiske kraftmarkedet. Opsjonsmodellen utviklet i denne oppgaven priser opsjonene noe utenfor markedets beste kjøps- og salgsbud for alle kontraktene som er testet. I de aller fleste tilfellene blir opsjonspremien lavere enn markedets beste kjøpsbud. Opsjonsmodellen utviklet i denne oppgaven baserer seg på at underliggende prisprosess er normalfordelt. I virkligheten observerer en at den virkelige fordelingen til prisprosessen har tykkere haler enn dette. Slike tykke haler vil være med på å øke verdien på en opsjon, og dette er med på å forklare hvorfor opsjonspremien er lavere for vår modell.

For Black 76 har en at bruk av historisk volatilitet ikke gir priser i samsvar med markedsverdien på opsjonen. Modellen i denne oppgaven baserer seg på bruk av historiske data for volatiliteten. I denne modellen oppnår en da best resultater ved å beregne mean reversion implisitt. Modellen vil også enkelt kunne benyttes til å estimere verdien på opsjoner med ikkestandardiserte forwardkontrakter som underliggende.

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INNLEDNING..... | 1 |
| 2 | EGENSKAPER VED ENERGIPRISER | 2 |
| 2.1 | GENERELLE TREKK VED ENERGIMARKEDENE | 2 |
| 2.1.1 | <i>Convenience yield</i> | 2 |
| 2.1.2 | <i>Mean reversion</i> | 2 |
| 2.1.3 | <i>Sesongsvingninger</i> | 3 |
| 2.1.4 | <i>Todeling av forwardprisene</i> | 3 |
| 2.2 | SPESIELLE EGENSKAPER FOR ELEKTRISITETSPRISER | 4 |
| 2.2.1 | <i>Lagring av elektrisitet</i> | 4 |
| 2.2.2 | <i>Daglige og ukentlige variasjonsprofiler</i> | 4 |
| 2.2.3 | <i>Volatilitet</i> | 5 |
| 2.2.4 | <i>Prissprang</i> | 6 |
| 2.2.5 | <i>Andre elektrisitetsmarkeder</i> | 9 |
| 2.2.6 | <i>Oppsummering</i> | 10 |
| 3 | STOKASTISKE PROSESSER..... | 11 |
| 3.1 | MARKOVPROSESSER..... | 11 |
| 3.2 | WIENERPROSESS | 11 |
| 3.2.1 | <i>Den generaliserte Wienerprosessen</i> | 11 |
| 3.3 | ITO PROSESS | 12 |
| 3.4 | GEOMETRISK BROWNSKE BEVEGELSER (GBM)..... | 12 |
| 4 | MODELLERING AV SPOTPRISENE I KRAFTMARKEDET | 14 |
| 4.1 | MEAN REVERSION..... | 14 |
| 4.2 | SPRANG I ENERGIPRISENE..... | 15 |
| 4.3 | MODELLERING AV SESONGVARIASJONER I ENERGIPRISER | 16 |
| 4.3.1 | <i>Lucia og Schwartz' enfaktormodeller</i> | 18 |
| 4.4 | FLERFAKTORMODELLER..... | 19 |
| 5 | FORWARDPRISER OG FORWARDKURVEN I KRAFTMARKEDET. | 22 |
| 5.1 | FUTURE- OG FORWARDKONTRAKTER..... | 22 |
| 5.2 | CONTRACTS FOR DIFFERENCE (CFD)..... | 23 |
| 5.3 | PRISING AV FORWARDKONTRAKTER..... | 23 |
| 5.4 | EMPIRISKE UNDERSØKELSER AV FORWARDPRISENE | 25 |
| 5.5 | FORWARDKURVEN - TOLKNINGER OG MODELLERING..... | 25 |
| 6 | OPSJONER I KRAFTMARKEDET | 28 |
| 6.1 | PRISING AV EUROPEISKE OPSJONER PÅ FORWARDKONTRAKTER MED BLACK 76 | 28 |
| 7 | VOLATILITET | 30 |
| 7.1 | STANDARDVARIASJON OG VARIANS..... | 31 |
| 7.2 | DEFINISJON AV VOLATILITET | 31 |
| 7.3 | HISTORISK VOLATILITET | 31 |
| 7.4 | MARKEDSIMPLISITT VOLATILITET | 32 |
| 7.5 | VOLATILITETSSMIL | 33 |
| 7.6 | VOLATILITETSMATRISER | 35 |
| 7.7 | STOKASTISK VOLATILITET..... | 35 |
| 8 | UTVIKLING AV EN NY OPSJONSMODELL..... | 36 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 8.1 | UTLEDNING AV GENERELL MODELL FOR FORWARDPRISEN | 36 |
| 8.2 | ANALYTISK LØSNING FOR EUROPEISK KJØPSOPPSJON..... | 40 |
| 8.3 | ANALYTISK LØSNING FOR EUROPEISK SALGSOPPSJON | 40 |
| 8.4 | VALG AV DETERMINISTISK FUNKSJON | 41 |
| 8.5 | MONTE CARLO SIMULERING AV MODELLEN | 41 |
| 8.5.1 | <i>En sammenligning av analytisk løsning og simulering.....</i> | <i>42</i> |
| 9 | GENERALISERING AV OPSJONSMODELL..... | 44 |
| 9.1 | EN APPROKSIMERT FORWARDVERDI OG VARIANS..... | 44 |
| 9.2 | EGENSKAPER VED OPSJONSMODELL | 47 |
| 9.3 | RESULTATER AV PRISING AV OPSJONER MED FORWARDKONTRAKTER SOM UNDERLIGGENDE | 47 |
| 9.4 | MONTE CARLO SIMULERING AV GENERELL OPSJONSMODELL..... | 50 |
| 10 | EVALUERING AV OPSJONSMODELLEN..... | 51 |
| 11 | REFERANSELISTE..... | 53 |
| | VEDLEGG 1: PARAMETERE FOR LUCIA OG SCHWARTZ' ENFAKTORMODELL | 55 |
| | VEDLEGG 2: IMPLISITTE PARAMETERE FOR LUCIA OG SCHWARTZ' ENFAKTORMODELL | 56 |
| | VEDLEGG 3: UTLEDNING AV ANALYTISK LØSNING FOR KJØPSOPPSJON | 57 |
| | VEDLEGG 4: UTLEDNING AV ANALYTISK LØSNING FOR SALGSOPPSJON | 59 |
| | VEDLEGG 5: SENSITIVITETSANALYSE FOR PARAMETERE | 61 |
| | VEDLEGG 6: SAMMENHENG RISIKONØYTRAL OG IKKE RISIKONØYTRAL MODELL FOR DISKRET X_T..... | 62 |
| | VEDLEGG 7 KODE VBA KODE FOR OPSJONSMODELL OG SIMULERINGER.. | 63 |

1 Innledning

Denne prosjektoppgaven har som hensikt å gi forfatterne inngående forståelse av prisprosesser og egenskaper ved disse i det nordiske kraftmarkedet. Fokus gjennom oppgaven ligger på prising av opsjoner i kraftmarkedet med forwardkontrakter som underliggende instrument.

Rapportens innhold forutsetter at leserne har kjennskap til grunnleggende opsjonsteori. For videre å avgrense oppgavens innhold er det ikke gått noe nærmere inn på å beskrive historie, organisering og handel i spotmarkedet ved den nordiske kraftbørsen Nord Pool.

Prosjektets oppbygning starter med en beskrivelse av energipriser og spesielle egenskaper ved elektrisitetspriser. Deretter er det gjengitt forskjellige måter å modellere spotprisene i kraftmarkedet på. Forwardkontrakter og forwardkurven i kraftmarkedet beskrives i et eget kapittel, før vi går over til å utdype hvordan opsjoner i kraftmarkedet i dag prises ved hjelp av Black 76 modellen. Implisitt volatilitet er i den forbindelse viktig, og volatilitet blir behandlet i påfølgende kapittel. Vi utvikler deretter en ny opsjonsmodell. Denne baserer seg på Lucia & Schwartz' enfaktormodell for spotprisen. Modellen generaliseres slik at den kan benyttes til å beregne opsjonspremien for opsjoner på kontrakter som handles i forwardmarkedet. Testing av modellen ved Monte Carlo simulering vil gi oss svar på gyldigheten av de analytiske uttrykkene i modellen. Videre vil sensitivitetsanalyse på inputparametere i modellen si oss om modellen viser oppførsel man kan forvente av en opsjon. En sammenligning utføres mellom markedsverdier på opsjoner som er blitt handlet i markedet på ulike datoer og kontrakter, med verdier modellen gir. Dette vil gi oss et estimat på hvor god modellen er. Til slutt evalueres modellen og enkelte forslag til mulige forbedringer drøftes kort.

2 Egenskaper ved energipriser

Finanslitteraturen peker på en del særegenheter som skiller energi fra andre investerings-eiendeler og råvarer. I dette kapitlet vil vi se generelt på en del av disse faktorene, for deretter å studere spesielle egenskaper i det nordiske kraftmarkedet.

2.1 Generelle trekk ved energimarkedene

Energimarkedene er relativt unge og lite utviklet i forhold til finansmarkedene. I Norden startet liberaliseringen av kraftmarkedet med Energiloven av 1990. Dessuten er de fundamentale prisdriverne mange og komplekse i energimarkedene. Prising av energi forholder seg til et komplisert samspillet mellom produksjon og bruk, transport og lagring, kjøp og salg, samt teknologiske nyvinninger.

2.1.1 Convenience yield

Convenience yield er en fordel eller ulempe knyttet til å ha en råvare tilgjengelig og er en faktor en ikke observerer i finansmarkedene. I energimarkedene er denne effekten hovedsakelig skapt av etterspørselsiden i prisdannelsesprosessen. Det er kostnader forbundet med nedstenging og oppstart av produksjon som følge av mangel på tilgjengelig energi. Forbrukerne kan derfor være villig til å betale noe ekstra for å være sikker på å ha nok energi tilgjengelig. Dette reflekteres i en premie for forwardprisene i den korte enden av forwardkurven i forhold til den mer langsiktige enden av kurven [Pilipovic, 1998]

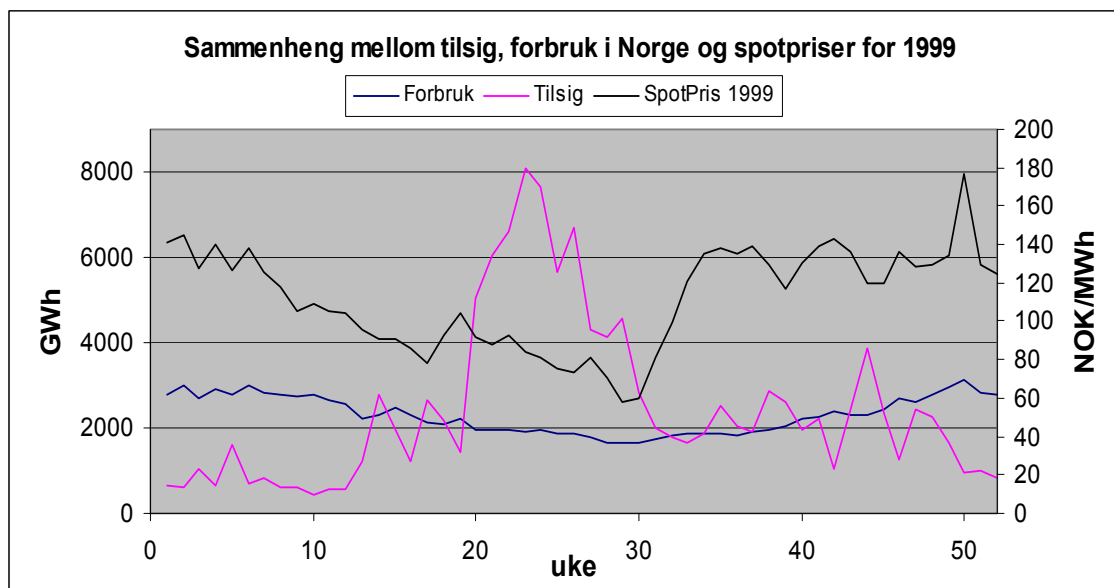
2.1.2 Mean reversion

En særegenhet som er særlig fremtredende for energi er mean reversion. Mean reversion er betegnelsen på en prosess, her prisprosess, som utvikler seg med en draging mot et likevektsnivå. En naturlig forklaring på hvorfor vi finner mean reversion i råvarepriser er gitt av Schwartz (1997). Når prisene er relativt høye, kan man forvente at tilbudet av varer øker ettersom produsenter med høyere kostnader inntar markedet. Dette vil medvirke til at prisene presses ned. Når prisene derimot er relativt lave, forventer man at tilbudet avtar og følgende at prisene presses opp. Mean reversion hastigheten, som defineres i kapittel 3.1, kan derfor tolkes som et mål på hvor fort tilbudsiden reagerer på begivenheter som medfører endringer i spotprisen. I følge Pilipovic (1998) kan mean reversion være en tolkning på hvor fort spesielle hendelser avtar eller forventes å avta. Under Gulfkrigen inneholdt forwardkurven for råolje informasjon om hvor lenge markedet forventet at krigen skulle vare. I elektrisitetsprisene vil parallellen kunne være forventet lengde på kalde og varme perioder, våte og tørre perioder og nedetid på produksjonsanlegg.

Mean reversion i spotpriser for energi er dokumentert i flere artikler. Bessembinder, Coughenour, Seguin og Smoller (1994) viser mean reversion for blant annet oljeprisene. For spotprisen for olje i deres datasett, kan man forvente at 44 prosent av endringen som følge av et prissjokk vil reversere i løpet av de 8 påfølgende månedene .

2.1.3 Sesongsvingninger

Sesongsvingninger henger nøye sammen med etterspørselsiden i energimarkedene. Etterspørselen etter energi svinger over året med behovet for oppvarming og kjøling fra sluttbrukere i boligmarkedet. En naturlig følge av dette er at sesongvariasjonene er geografisk betinget. I USA opplever man at pristoppen for oppvarmingsolje forekommer om vinteren og at ektrisitetsprisene er høyest om sommeren som følge av elektrisk drevne kjøleanlegg. I Norden derimot, ser man at pristoppen for strøm forekommer om vinteren som følge av utstrakt bruk av elektrisk oppvarming. Sesongsvingninger i elektrisitetsprisen er særlig fremtredende i det nordiske markedet da forbruk og tilsig til vannmagasinene beveger seg motsyklisk. Grafen under viser hvordan høyere priser om vinteren henger sammen med lavt tilsig, og motsatt for sommeren.



Figur 2.1 Sammenhengen mellom spotpriser, tilsig og forbruk i Norge i 1999

2.1.4 Todeling av forwardprisene

Prisene på forwardkontrakter i energimarkedene viser en todeling mellom kortsiktig og langsiktig oppførsel. Til forskjell fra mange andre markeder er korrelasjonen mellom kortsiktig og langsiktig forwardpriser liten. En mulig naturlig forklaring på dette ligger i at kortsiktige priser reflekterer umiddelbar tilgjengelig energi og energilagre, mens langsiktige priser reflekterer fremtidig potensiell energi, enten væravhengig eller som følge av teknologiske utvinninger. Her vil eksempelvis potensiell elektrisk energi i Norden være svært avhengig av nedbør og tilsig grunnet stor prosentandel vannkraftproduksjon i systemet, mens fremtidig olje og gass vil avhenge sterkt av funn av nye reservoarer, samt teknologiske nyvinninger som gjør det mulig å utvinne mer energi fra allerede tilgjengelige reservoarer.

Koekebakker og Ollmar (2001) gjennomfører en PCA-analyse (Principal Component Analysis) der de undersøker faktorer som kan forklare variasjoner i forwardprisene i det nordiske kraftmarkedet. De finner at de viktigste faktorene som driver den korte enden av kurven har liten påvirkning på prisene i den lange enden og omvendt. Da forbrukssiden i

elektrisitetsmarkedet ikke har lagringsmuligheter vil eksempelvis retningslinjer fra myndigheter som trer i kraft om to år ha lite å si for forwardprisene før den tid, mens de vil kunne gi utslag på prisene fra og med to år.

2.2 Spesielle egenskaper for elektrisitetspriser

Vi vil her gå litt dypere inn på hvordan elektrisitetsprisene oppfører seg. Utgangspunktet her er et studie utført av Lucia og Schwartz publisert i 2002, der det er utført analyser av spot-, future- og forwardpriser på den nordiske kraftbørsen, Nord Pool, i perioden 1993 til 1999. I tillegg sammenligner vi noen av de statistiske resultatene med egne beregninger på spotprisene fra 1996 til 2001.

Når vi her skriver om spotprisen refererer vi til systemprisen for Nord Pool. Dette er en pris gitt time for time ut fra markedskrysset som fremkommer ved at aktørene legger inn sine bud på kraftbørsen, og ved at en ikke tar hensyn til overføringskapasitetene i nettet [Nord Pool 2000].

2.2.1 Lagring av elektrisitet

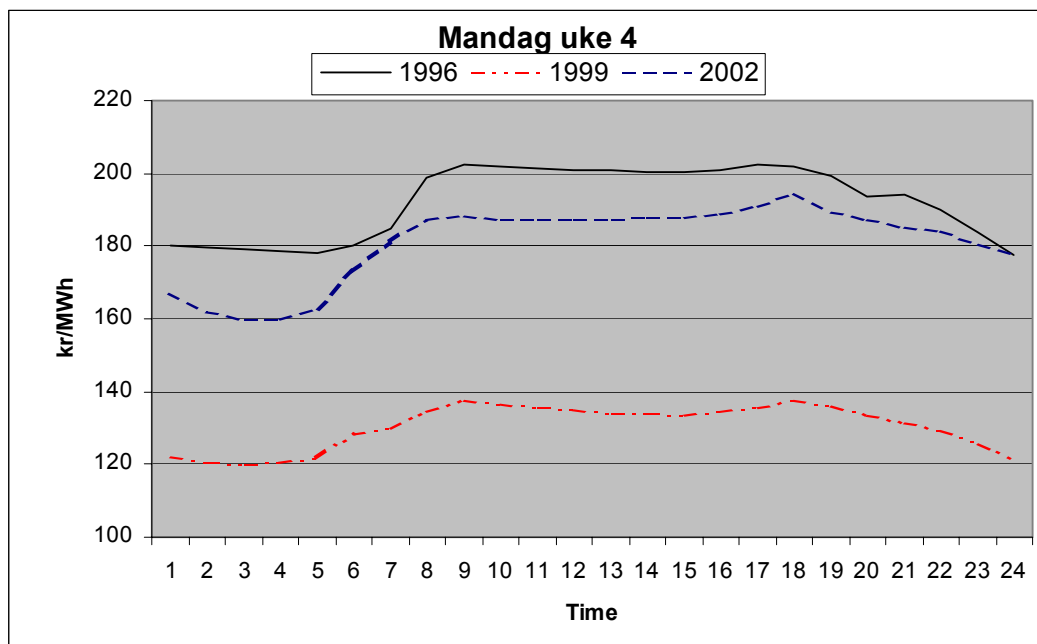
En av de viktigste særegenhetene ved elektrisitet er svært begrensede lagrings- og transportmuligheter. Man har en viss lagringsmulighet på tilbudsiden i forkant av produksjonen, enten som vann i vannmagasiner eller som drivstoff til eksempelvis kjernekraft og kullkraft. Enkelte produsenter har pumpekraftverk som kan benytte strøm til å pumpe vann opp i reservoarene når strømprisene er lave. Deretter lagres dette vannet og benyttes til å produsere strøm når prisene er høye. På forbrukssiden kan man se bort fra lagringsmuligheter.

For forbrukerne kan man se på elektrisitet levert på ulike tidspunkt over døgnet og forskjellige datoer som distinkte produkter. Med dette er altså arbitrasjemuligheter over tid og sted nærmest eliminert. I tillegg til begrensede lagringsmuligheter må produksjonssiden til enhver tid mate inn samme effekt i nettet som forbrukssiden tar ut, med visse korreksjoner for tap i nettet.

Et resultat av den manglende lagringsmuligheten for elektrisitet er at geografiske variasjoner i energiprisene gjør seg gjeldende. I tillegg til kravene om konstant balanse i nettet, har man kapasitetsbegrensninger på overføring av energi mellom de ulike geografiske områder. Dette medfører at prisene vil variere fra område til område.

2.2.2 Daglige og ukentlige variasjonsprofiler

Et annet resultat av den manglende muligheten til lagring av elektrisitet er at man i tillegg til sesongsvingninger også ser mer eller mindre faste mønster i variasjoner på ukes- og døgnnivå. Disse variasjonene følger hovedsakelig aktivitetsendringer i industri og næringsliv. Figuren under viser variasjon på døgnnivå for mandag uke 4 i henholdsvis 1996, 1999 og 2002.



Figur 2.2 Døgnvariasjoner i spotprisen for mandag i uke 4 i 1996, 1999 og 2002

I elektrisitetmarkedene opererer man med priser for hver time i døgnet, noen steder også for hver halve time. Ut fra daglige variasjoner er ”on-peak” og ”off-peak” timer for alle ukedager i elektrisitetmarkedene blitt en vanlig terminologi. European Energy Exchange (EEX), opererer med peak fra og med time 9 til og med time 20. Amsterdam Power Exchange (APX), har peak fra og med time 8 til og med time 23. Ved Nord Pool opererer man ikke med ”on-peak” - og ”off-peak”-terminologien.

2.2.3 Volatilitet

Volatiliteten til systemprisen i det nordiske markedet er høy. Lucia og Schwartz finner standardavvik på 0,099 på daglige endringer i log-prisene i perioden fra 1. januar 1993 til 31. desember 1999. Annualisert gir dette en volatilitet på 189 %, utregnet ved $0,099 * \sqrt{365} = 1,89$.

Våre egne beregninger for spotprisene i perioden 1996-2001 er gjengitt i utskriften fra statistikkprogrammet Minitab nedenfor

Descriptive Statistics: SpotPris; LNSpot; LN(Pt/P(t-1))

| Variable | N | Mean | Median | TrMean | StDev | SE Mean |
|---------------|------|---------|----------|----------|---------|---------|
| SpotPris | 2192 | 151,18 | 136,04 | 147,67 | 64,39 | 1,38 |
| LNSpot | 2192 | 4,9294 | 4,9129 | 4,9379 | 0,4294 | 0,0092 |
| LN(Pt/P(t-1)) | 2192 | 0,00007 | -0,00807 | -0,00294 | 0,10885 | 0,00232 |

| Variable | Minimum | Maximum | Q1 | Q3 |
|---------------|----------|---------|----------|---------|
| SpotPris | 21,27 | 633,36 | 106,59 | 186,34 |
| LNSpot | 3,0573 | 6,4510 | 4,6690 | 5,2276 |
| LN(Pt/P(t-1)) | -0,77391 | 1,18953 | -0,04159 | 0,03136 |

Vi finner standardavvik på 0,10885 i perioden 1996 til 2001. Annualisert volatilitet er på 208%.

Volatilitet i elektrisitetprisene vil bli grundigere behandlet i kapittel 6, da det utgjør en svært viktig faktor ved prising av opsjoner.

2.2.4 Prissprang

Sprang inntreffer relativt hyppig i spotprisen. Når vi her skriver sprang, mener vi en stor endring i pris over et kort tidsrom. Videre er det viktig å legge merke til at denne store prisendringen ikke vedvarer over et lengre tidsrom. Sprang slik vi definerer det her er sidestilt med det engelske uttrykket “spikes”. Det må ikke forveksles med det engelske uttrykket “jump”, som i finansiell litteratur beskriver en rask endring i pris, som deretter vedvarer over et lengre tidsrom. Denne egenskapen kan man se ut fra fordelingen av spotpriser, der ekstremverdier blir reflektert ved tykkere haler. Med andre ord betyr dette at sannsynligheten for at ekstreme priser skal opptre er stor. Denne egenskapen ved en fordeling kan beskrives ut fra det statistiske målet kurtosis eller ved 4. moment av fordelingen. 4. moment er gitt ved

$$M_4 = E \left[(S_t)^4 \right],$$

der S_t = spotpris ved tid t .

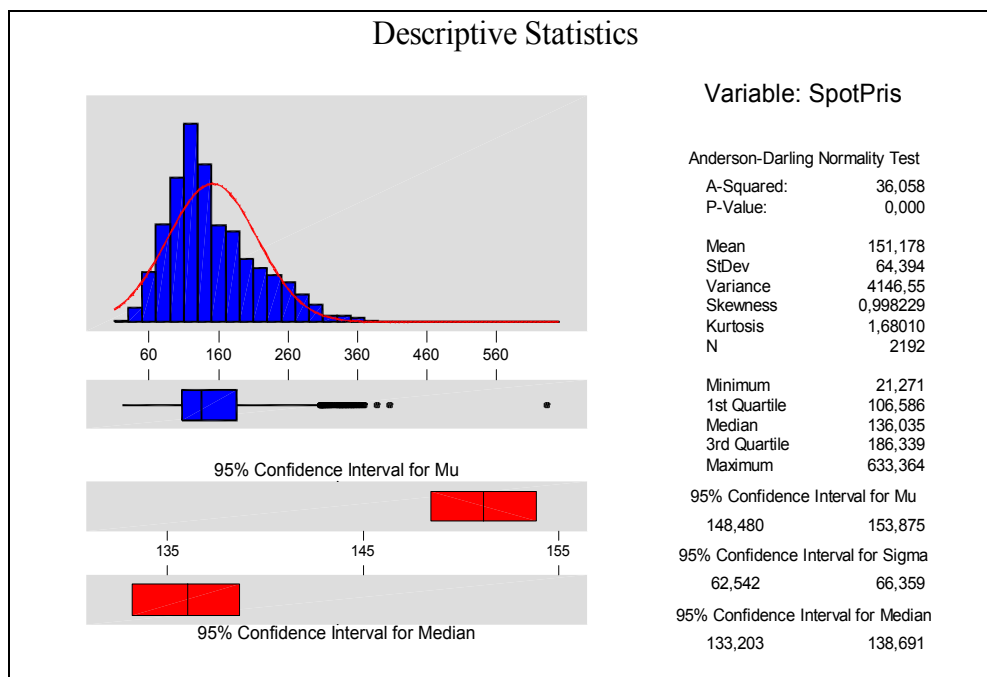
Relasjonen til kurtosis er gitt av

$$Kurtosis = E \left[(S_t - \bar{S}_t)^4 \right],$$

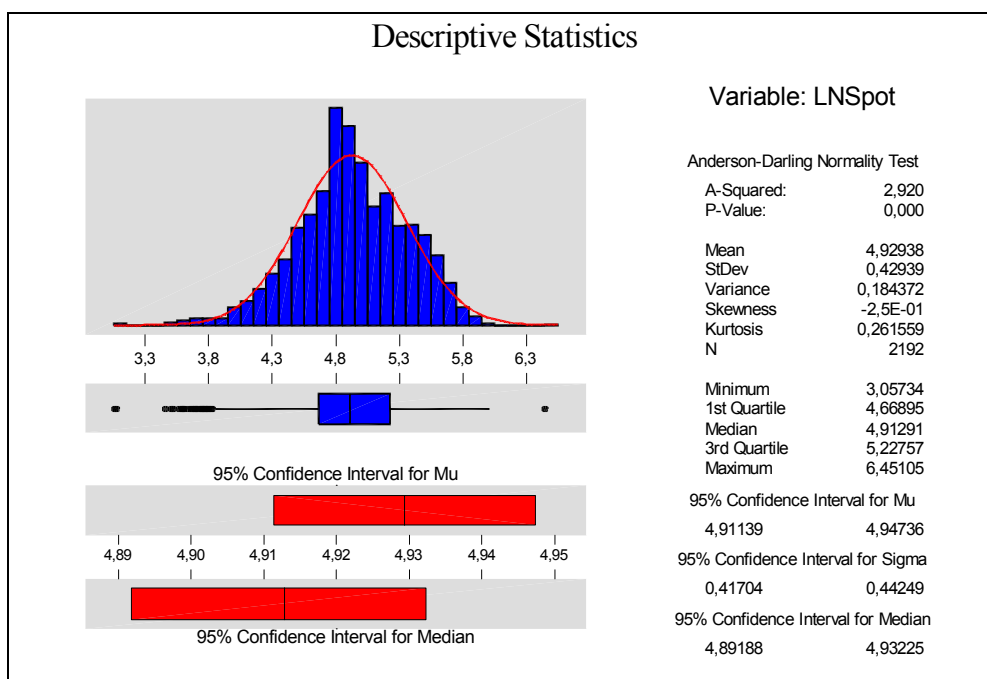
der \bar{S}_t = middelveidien til fordelingen av spotprisene.

Lucia og Schwartz rapporterer estimert kurtosis på 3.540 for spotpris i perioden 1993 til 1999. For den naturlige logaritmen til prisen finner de tilsvarende en kurtosis på 4,487. Normalfordelingen har en kurtosis på 3. Dette er viktige observasjoner med tanke på opsjonsprising. Black & Scholes forutsetter at aksjeprisene er lognormalfordelte. Denne forutsetningen er helt klart ikke til stede i tilfellet for spotprisene ved Nord Pool.

Vi har gjort beregninger på tidsperioden 1993 til 1999 ved hjelp av statistikkprogrammet MiniTab, og kommet fram til samme resultater for kurtosis som Lucia og Schwartz (2002). Vi har også undersøkt perioden 1996-2001 og resultatene for denne perioden er gjengitt i figurene nedenfor. Disse viser en kurtosis på henholdsvis 4,68 for spotprisen og 3,26 for logaritmen til spotprisen. Verdiene i figurene 2.3 og 2.4 er gitt i forhold til kurtosis for normalfordelingen.



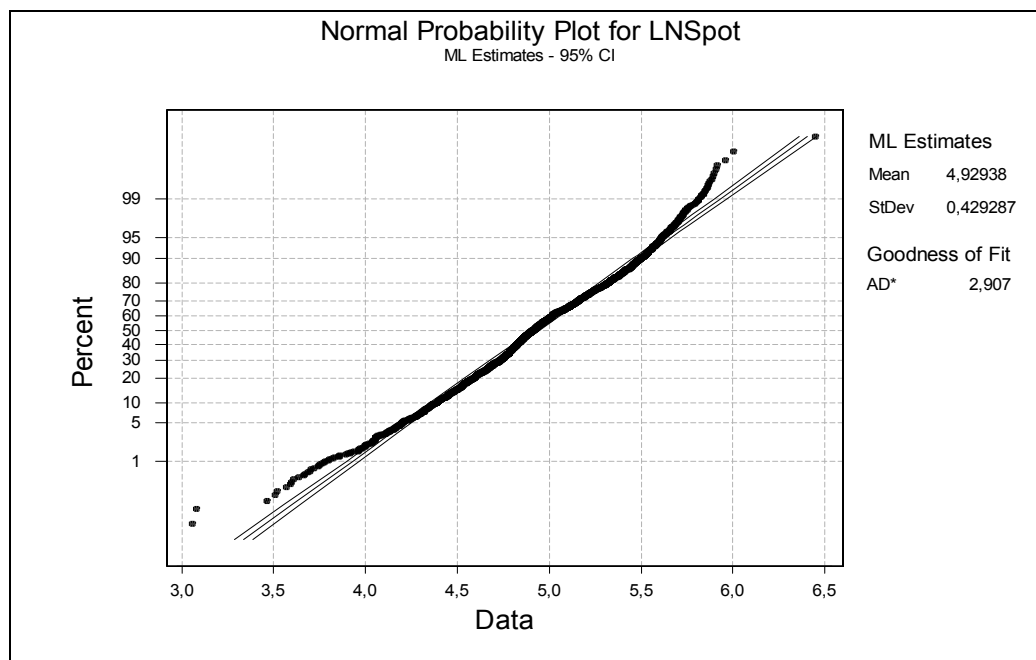
Figur 2.3 Deskriptiv statistikk for spotprisen i perioden 1996 til 2001



Figur 2.4 Deskriptiv statistikk for logaritmen til spotprisen i perioden 1996 til 2002

Nedenfor er gjengitt et Q-Q plot (quantile-to-quantile) ut fra logaritmen til spotprisene i perioden 1996 til 2001. Ved en Q-Q test sammenligner man den faktiske sannsynlighetsfordelingen med sannsynlighetene fordelingen ville hatt hvis den var normalfordelt. Er logaritmen til spotprisen normal, vil Q-Q plottet bestå av en diagonal linje og indikere at fordelingen tilsvarer en normal fordeling. Et normalplott skal med 95 % sannsynlighet ligge innenfor de stiplede linjene på figuren. Dette er ikke tilfelle her og vi ser

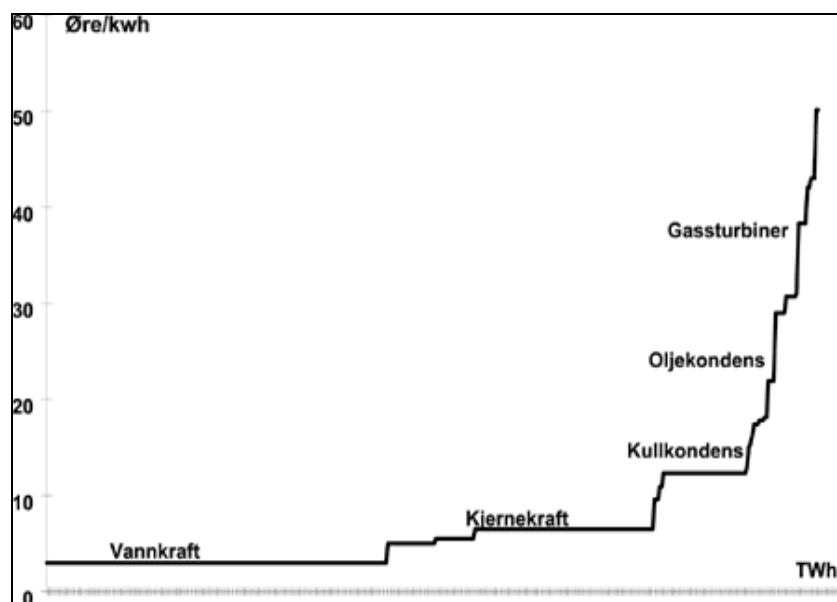
at observasjonene ikke er normalfordelte. Det er særlig halene, endene i Q-Q-plottet, som skiller seg ut. Vi ser at ekstremverdier har en større sannsynlighet for å inntreffe i logaritmen til spotprisen enn for en tilsvarende normalfordelt variabel.



Figur 2.5 Q-Q test for prisene ved Nord Pool i perioden 1996 - 2001

Det viktige her er at de tidligere nevnte verdiene for kurtosis tyder på at ekstreme verdier inntreffer relativt hyppig i spotprisene. Videre er det interessant om dette skyldes spikes, eller sprang. Lucia og Schwartz finner kurtosis for endring i spotpris og endring i logaritmen av spotprisen på henholdsvis 16,034 og 14,397. De samme verdiene er 25,155 og 23,651 for kalde sesonger og 6,867 og 8,903 for varme sesonger. Dette tyder på at store daglige variasjoner forekommer ofte og særlig om vinteren, og gir derfor et sterkt uttrykk for at prissprang er hovedårsaken til de tykke halene i spotprisfordelingen. Videre er sterk positiv autokorrelasjon for prisdifferansene over flere uker noe som tyder på normalt forutsigbar etterspørsel. Dette underbygger teorien om at prissprang er årsaken til høye kurtosis verdier.

Johnsen, Verma og Wolfram (1999) peker på forekomster av høye spotpriser og mulige årsaker til disse. Store endringer i etterspørsel, ofte som følge av kortsiktige endringer i temperatur, forekommer regelmessig sammen med spikes. Dette kan forklares ut fra marginalkostnadskurven i det nordiske kraftsystemet. Denne er gjengitt i figuren nedenfor [NOU 1998:11, Energi- og kraftbalansen mot 2020]



Figur 2.6 Marginalkostnadskurven i det nordiske kraftsystemet

Man ser her at dersom produksjonen av energi er høy, vil endringer i etterspørselen kunne medføre store endringer i spotprisen, ettersom kurven over marginalkostnader for energiproduksjon da er bratt.

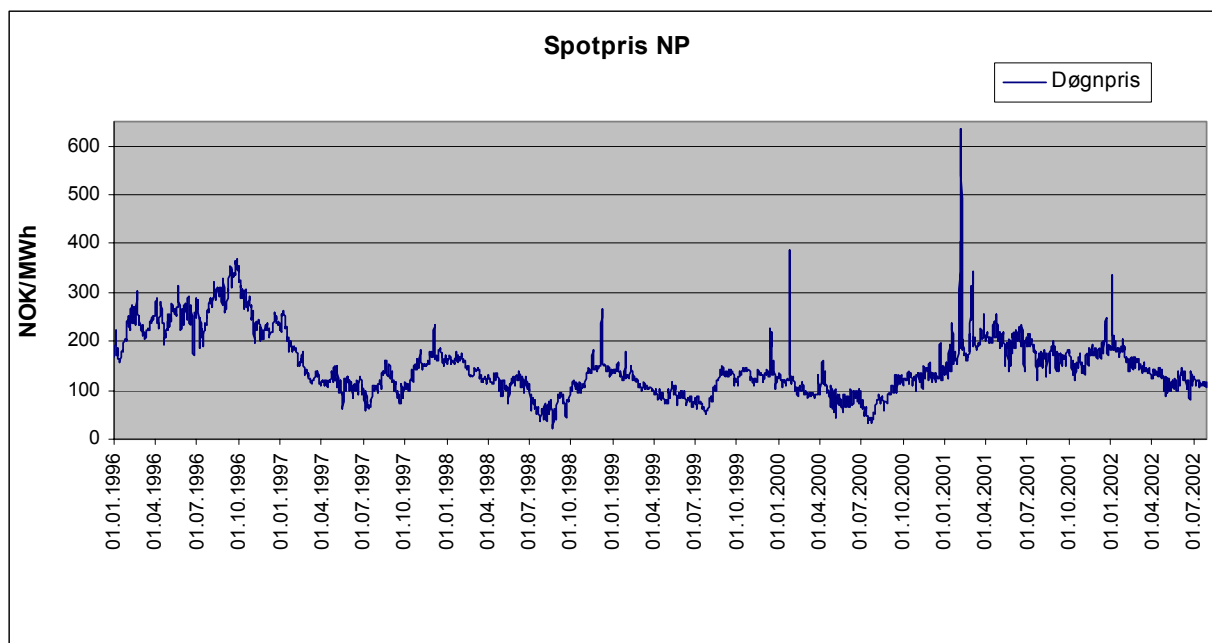
2.2.5 Andre elektrisitetmarkeder

Knittel og Roberts (2001) analyserer spotprisene i et prisområde i California, og kommer frem til følgende seks karakteristikk ved prisene: Mean reversion, døgneffekter, ukedag- og weekendeffekter, sesongpåvirkning, tidsvarierende volatilitet og ekstremverdier. En finner altså igjen de samme hovedtrekkene som man ser på systemprisen ved Nord Pool. Det er imidlertid noen forskjeller som er verdt å nevne. I datasettet til Knittel og Roberts for perioden 1. april 1998 til 31. juli 2000 forekommer negative priser. Dette finner man ikke i dataene fra Nord Pool. Knittel og Roberts legger vekt på at dette skyldes overproduksjon, ingen lagringsmuligheter og store oppstartskostnader. Vannkraftanlegg som dominerer det nordiske kraftsystemet med 60 % av produksjonskapasiteten, har små start- og stoppkostnader [Nord Pool, 2000]. I California er produksjonskapasiteten preget av termiske anlegg med fossilt brennstoff og dette medfører en mer kostbar regulering av produksjonen.

Når det gjelder ekstrempriser legger Knittel og Roberts vekt på at disse inntreffer gruppevis sammen med økt volatilitet i forbindelse med forestående økt etterspørsel. Det vektlegges at ekstrempriser i California er et resultat av at etterspørselen ofte ligger på grensen av systemets kapasitet, og da først og fremst i overføringslinjer.

2.2.6 Oppsummering

Figur 2.7 viser spotprisen ved Nord Pool i perioden fra 1.januar 1996 til 29.juli 2002.



Figur 2.7 Spotprisene ved Nord Pool fra 01.01.1996 til 29.07.2002

Mange av de karakteristikkene som er nevnt tidligere kan leses ut fra figuren. Man ser tydelig sesongsvingninger. Grafen viser ikke noen betydelig konstant drift. Mean reversion er en mulig årsak til dette. Prisene i 1996 og 2001 er generelt høyere enn de andre årene i figuren, noe som hovedsakelig skyldes lite nedbør og tilsig til magasinene [Botterud mfl, 2002]. Vi ser at sprang inntreffer særlig om vinteren når produksjon og priser er på sitt høyeste.

3 Stokastiske prosesser

Alle variable som endres over tid og hvor endringen er usikker følger en stokastisk prosess. Den stokastiske prosessen kan være diskret eller kontinuerlig i tid. Den kan følge en kontinuerlig prosess hvor den underliggende variabelen kan endres med alle verdier innen et intervall. Alternativt kan den følge en diskret prosess hvor kun diskrete endringer er mulig.

Stokastiske modeller grupperes gjerne etter antallet stokastiske variable, eller faktorer, i modellen. En enfaktormodell har en stokastisk variabel, en tofaktormodell har to stokastiske variable og en trefaktormodell har tre stokastiske variable.

3.1 Markovprosesser

En Markovprosess er en stokastisk prosess hvor kun verdien på den stokastiske variabelen er relevant for å predikere fremtiden. Det betyr at den historiske utviklingen til den stokastiske variabelen ikke er av betydning. Dette er konsistent med svak form av den effisiente markedshypotesen [Brealey & Myers, 2000].

3.2 Wienerprosess

En Wienerprosess er en spesiell type Markovprosess med en forventet endring lik 0 og varians lik 1. En wienerprosess omtales også som brownske bevegelser.

En variabel z følger en Wienerprosess dersom følgende to betingelser er oppfylt:

1. Endringen Δz over en kort periode Δt er gitt ved $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, hvor ε er et tilfeldig tall fra den standardiserte normalfordelingen $N(0,1)$.
2. Verdien på Δz for to etterfølgende intervaller er uavhengige av hverandre.

3.2.1 Den generaliserte Wienerprosessen

Den vanlige Wienerprosessen har en drift eller forventet endring lik 0 og varians lik 1. En drift på 0 innebærer at den forventede verdien for z ved et gitt tidspunkt er lik startverdien. En generalisert Wienerprosess for en variabel x er en Wienerprosess med en drift og kan uttrykkes ved:

$$dx = a dt + b dz \quad (3.1)$$

hvor a og b er konstanter. Det siste leddet kan oppfattes som variasjon eller støy, mens det første leddet er en drift. Støyleddet er en Wienerprosess. Over et kort tidsintervall Δt vil endringen i x , Δx , være gitt ved

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad (3.2)$$

Dette gir at forventningen til Δx er $a\Delta t$ mens variansen til Δx er gitt ved $b^2\Delta t$. En generalisert Wienerprosess omtales også som aritmetrisk brownske bevegelser (ABM).

3.3 Ito prosess

En Ito prosess er en generalisert Wienerprosess hvor parameterne a og b er funksjoner av den underliggende variabelen x og tiden t . En Ito prosess kan skrives

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (3.3)$$

Over et kort tidsintervall fra t til $t+\Delta t$ vil endringen i x være approksimert ved

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad (3.4)$$

Over dette tidsintervallet, Δt , vil driften være konstant lik $a(x, t)$ og variansen vil være $b^2(x, t)$.

3.4 Geometrisk brownske bevegelser (GBM)

Geometrisk brownske bevegelser (GBM) er den mest kjente stokastiske prismodellen som benyttes i aksjemarkedet. Denne danner også utgangspunkt for mange av de modellene som kan anvendes for å lage prismodeller for energi som vi kommer tilbake til i neste kapittel.

I aksjemarkedet vil antagelsen om konstant drift ikke lenger være tilstrekkelig. En investors krav til en aksje vil være knyttet til den relative driften eller avkastningen. Antakelsen om konstant drift må derfor erstattes med en antakelse om konstant relativ drift [Hull, 2000]. Dersom man antar at aksjen ikke betaler noe utbytte vil en stokastisk prosess for aksjekursen være gitt ved

$$dS = \mu Sdt + \sigma Sdz \quad (3.5)$$

Over et kort tidsintervall Δt vil prosessen være gitt ved

$$\Delta S = \mu S\Delta t + \sigma S\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad (3.6)$$

ΔS er endringen i aksjekursen over Δt , ε er et tilfeldig tall fra den standardiserte normalfordelingen, μ er forventet avkastning per tidsenhet og σ er volatiliteten. Ligningen over viser dermed at den relative endringen i aksjekursen er normalfordelt og gitt ved

$$\frac{\Delta S}{S} \square N(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}) \quad (3.7)$$

Den underliggende prisprosessen til denne normalfordelte avkastningen vil være lognormalfordelt. Dette gir at prisen etter et kort tidsintervall Δt er gitt ved

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}} \quad (3.8)$$

Ligning (3.5) er utgangspunktet for prising av et derivat f som kun er avhengig av S og t . Dersom Ito's Lemma anvendes på et derivat f som kun er avhengig av prisprosessen til S og tiden t får en

$$df = \left(\frac{\delta f}{\delta S} \mu S + \frac{\delta f}{\delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\delta f}{\delta S} \sigma S dz \quad (3.9)$$

Ved å sette opp en dynamisk hedge ved hjelp av en long posisjon i $\frac{\delta f}{\delta S}$ andeler av underliggende S og en short posisjon i instrumentet f , ender man opp med en differensialligning gitt ved [Hull, 2000]

$$\frac{\delta f}{\delta t} + rS \frac{\delta f}{\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (3.10)$$

Denne er kjent som Black-Scholes-Merton differensialligningen og danner grunnlaget for mye av teorien innen opsjonsprising som vi kommer tilbake til senere i oppgaven. Da denne ligningen er uavhengig av den forventede avkastningen på aksjen, μ , viser dette at verdien av et derivat er uavhengig av investors risikoholdning. En kan derfor anta i beregningene at investor er risikonøytral og at alle eiendelene har en avkastning lik den risikofrie renten. Dette omtales gjerne som en risikofri verden [Hull, 2000].

Denne modellen med lognormal fordeling for prisene og normalfordelt endring i prisene har vist seg ikke å fungere for modellering av elektrisitetspriser. Av ligning (3.8) ser en at prisene har en eksponentiell vekst. Dette kan ikke være tilfelle i et system hvor tilbuds- og etterspørselssiden må balansere hverandre til enhver tid. GBM modellen tar heller ikke hensyn til en del av de karakteristikkene som energipriser gjerne har, eksempelvis mean reversion, sprang og sesongvariasjoner. Den tillater heller ikke negative priser. Dette har blitt observert i flere elektrisitetsmarkeder og oppstår fordi produsentene må kvitte seg med sin produksjon på grunn av manglende lagringsmuligheter for elektrisitet [Koerberakker, 2002].

4 Modellering av spotprisene i kraftmarkedet

For aktørene i kraftmarkedet er det viktig å kunne si noe om hvordan elektrisitetsprisene kommer til å utvikle seg framover. Dette er viktig for produsentene med tanke på hvordan en skal disponere sine vannmagasiner og hvordan man skal drive med risikostyring i det finansielle markedet. Spekulanter trenger å kunne si noe om hvordan utviklingen i spotmarkedet blir før de tar posisjoner i det finansielle markedet, mens store forbrukere vil ha nytte av dette for å drive risikostyring.

Dette kapitlet ser på ulike stokastiske prosesser og modeller som representerer de spesielle trekk som tidligere i denne oppgaven er drøftet for elektrisitetsprisene. Disse modellene er utvidelser av den generelle Black-Scholes-Mertons geometrisk brownske bevegelser

4.1 Mean Reversion

En enfaktormodell for mean reversion i råvarepriser er gitt av Schwartz (1997) ved

$$dS = \kappa(\mu - \ln S)Sdt + \sigma Sdz \quad (4.1)$$

Her vil prisene falle tilbake til et likevektsnivå $\bar{S} = e^\mu$ med en hastighet gitt av parameteren κ . Dersom prisene ligger over langtidsnivået \bar{S} vil driftsledet bli negativt og prisen vil nærme seg langtidsnivået i et nivå proporsjonalt med avviket. Dersom prisene ligger under \bar{S} vil driftsledet bli positivt og prisene vil nærme seg likevektsnivået. Det stokastiske leddet dz vil kunne være av motsatt fortegn som reversjonsprosessen. Dermed trenger ikke den totale endringen gå i retning av mean reversion nivået på kort sikt.

Dersom en setter at $x = \ln S$ og anvender Ito's lemma får man et uttrykk for en mean reversion prosess for den naturlige logaritmen til spotprisen. Dette er da gitt ved

$$dx = \left[\kappa(\mu - x) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] dt + \sigma dz \quad (4.2)$$

$$= \kappa(\alpha - X)dt + \sigma dz \quad (4.3)$$

Der α er gitt ved

$$\alpha = \mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa}$$

Uttrykket gitt ved (4.3) er en såkalt Ornstein-Uhlenbeck prosess. En diskret modell for logaritmen til spotprisen kan uttrykkes ved

$$\Delta x_i = \left[\kappa(\mu - x_i) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_i \quad (4.4)$$

I en simulering av en slik modell er det viktig å ta hensyn til lengden av tidsskrittene. Det er viktig at tidsskrittene er små i forhold til mean reversion hastigheten [Clewlow & Strickland, 2000].

En viktig egenskap ved mean reversion prosessen er tiden det tar å nå halvveis tilbake til likevektsnivået gitt at nye stokastiske bevegelser ikke hadde inntruffet. Denne tiden kalles halveringstiden og er gitt ved

$$t_{1/2} = \ln 2 / \alpha \quad (4.5)$$

Jo større parameteren α blir jo hurtigere reverserer prosessen mot likevektsnivået.

Mean reversion nivået trenger ikke være konstant for alle tidsperioder. Mer om dette i kapittel 4.3.

4.2 Sprang i energiprisene

Vi har tidligere diskutert at energiprisene karakteriseres av plutselige sprang for deretter å falle tilbake til samme nivå som de lå på før spranget. Dette kommer fram i fordelingen til endringene i kraftprisene som tykke haler og da med en spesielt stor sannsynlighet for en sterk vekst i prisene. Denne egenskapen kan modelleres inn ved bruk av såkalte hoppprosesser. Dette kan uttrykkes ved følgende stokastiske differensialligning

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz + \omega S dq \quad (4.6)$$

Størrelsen på hoppene ω er tilfeldige og logaritmen til størrelsen på hoppene er normalfordelt ved

$$\ln(1 + \omega) \square N\left(\ln(1 + \bar{\omega}) - \frac{1}{2}\gamma^2, \gamma^2\right) \quad (4.7)$$

Der $\bar{\omega}$ er forventet størrelse på hoppet og γ er standardavviket til hoppene.

Selve hopp prosessen dq er en diskret stokastisk variabel. Dette medfører at hoppene ikke skjer kontinuerlig over tiden. Mesteparten av tiden er dq lik 0, men hver gang dq tar verdien 1 inntreffer et hopp.

I modellen gitt av (4.6) vil en få at prisene forblir på nivået det får etter et hopp helt til neste hopp inntreffer. Dette stemmer dårlig med det en observerer i kraftmarkedet og det er derfor fornuftig å kombinere hoppprosessen med mean reversion. Dette kan representeres ved følgende stokastiske differensialligning [Clewlow & Strickland, 2000]

$$dS = \alpha(\mu - \ln S) S dt + \sigma S dz + \omega S dq \quad (4.8)$$

Knittel og Roberts (2000) har undersøkt hoppprosessene og kommet fram til at disse skjer oftest i periodene hvor lasten er høy og overføringskapasiteten i nettet er fullt utnyttet.

Sprangene i prisene kommer da av den konvekse kurven for marginalkostnaden til kraftprodusentene. Knittel og Roberts foreslår derfor å la intensiteten på hoppprosessen ha variasjoner over døgnet og året.

I følge Bodily og Del Bueno (2002) benyttes ofte en Poissonfordelt hoppprosess. Dette medfører at hoppene er uavhengige av hverandre. Men Bodily og Del Bueno hevder at hoppene ofte skjer i forbindelse med tekniske problemer ved kraftverk og kraftlinjer, og slike hendelser opptrer gjerne ikke uavhengig av hverandre.

4.3 Modelling av sesongvariasjoner i energipriser

Den mest anvendte metoden for å ta hensyn til sesongsvingninger i en modell er som et deterministisk funksjon av tiden.

Knittel og Roberts (2000) viser hvordan likevektsnivået i en mean reversion prosess kan gjøres tidsvarierende og hvordan en på den måten kan få inn sesongvariasjoner. Likevektsnivået kan nå være en glatt funksjon eller en stykkevis glatt funksjon over døgnet og sesongen. En har da at

$$dS(t) = k[\mu(t) - S(t)]dt + \sigma dz \quad (4.9)$$

der likevektsnivået $\mu(t)$ er gitt ved

$$\mu(t) = \sum_{\tau=1}^{24} \beta_{\tau} H_{\tau} + \gamma_1 \text{Summer} + \gamma_2 W \text{int er} + \gamma_3 \text{Spring} \quad (4.10)$$

Her er H_{τ} en binærvariabel som er lik 1 i time τ , 0 ellers og hvor β_{τ} er konstanter for $\tau=1,2,\dots,24$. Knittel og Roberts har utviklet denne modellen for elektrisitetsmarkedet i California. Dette markedet skiller seg en del fra det nordiske markedet, blant annet med to tydelige pristopper over året og med den største av disse om sommeren. Denne funksjonen vil derfor ikke være egnet for bruk i det nordiske markedet.

Lucia og Schwartz (2002) benytter at mean reversion nivået er gitt ved

$$\mu(t) = \frac{1}{\kappa} \frac{df(t)}{dt} + f(t) \quad (4.11)$$

der $f(t)$ er forventet sesongvarierende pris.

Lucia og Schwartz lanserer to ulike forslag til hvordan det sesongvarierende leddet $f(t)$ kan modelleres. Den første modellen baserer seg på bruk av en stykkevis konstant funksjon. Dette oppnås ved å benytte dummy variable. Modellen legger inn ulike priser fra måned til måned og tar videre hensyn til hvorvidt hver enkelt dag er en helgedag eller feriedag. Dette uttrykkes ved

$$f_1(t) = \alpha + \beta D_t + \sum_{i=2}^{12} \beta_i M_{it} \quad (4.12)$$

hvor

$D_t=1$ hvis dato t er en helligdag eller helgedag, 0 ellers

$M_{it}=1$ hvis dato t er i måned i , 0 ellers

$i=2,3,\dots,12$

α , β , og β_i er konstanter. Her vil β fange opp forskjellen i pris mellom uke- og helge-/helligdager mens β_i leddet fanger opp variasjoner i prisene fra måned til måned

Den andre utgaven av denne deterministiske funksjonen tar inn en periodisk cosinusfunksjon. Denne funksjonen er da gitt ved

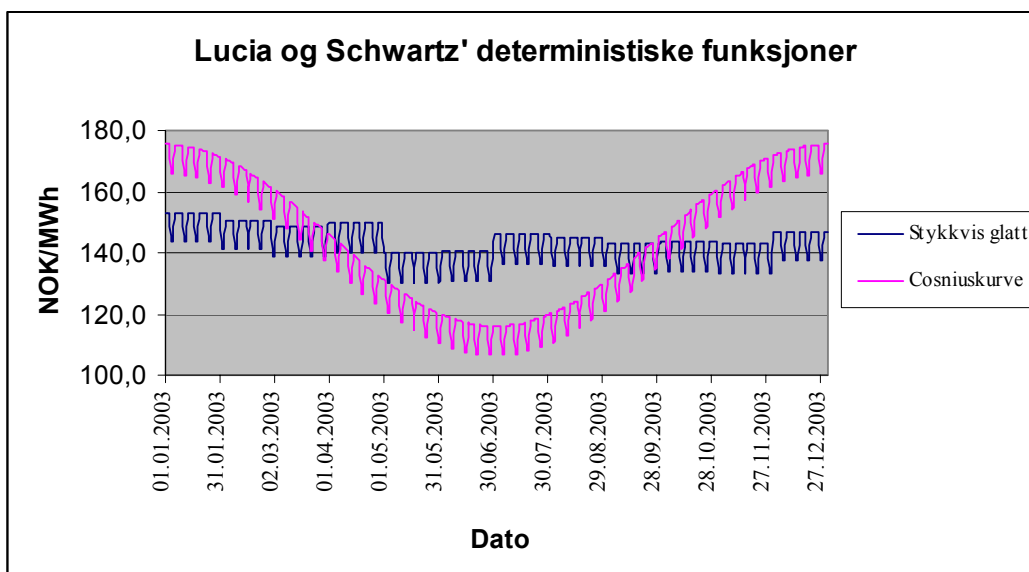
$$f_2(t) = \alpha + \beta D_t + \gamma \cos\left(\left(t + \tau\right) \frac{2\pi}{365}\right) \quad (4.13)$$

hvor

$D_t=1$ hvis dato t er en helligdag eller helgedag, 0 ellers.

α , β , γ og τ er konstanter. Også her vil β -leddet fange opp forskjeller mellom vanlige arbeidsdager og helge- og helligdager.

Figur 4.1 viser de to deterministiske funksjonene gitt av Lucia og Schwartz plottet mot hverandre for året 2003. Parameterne som her er benyttet er de som i følge Lucia og Schwartz gir best tilnærming til observerte priser i perioden 1993-1999. Disse er også gitt i vedlegg 1.



Figur 4.1 Lucia og Schwartz' to deterministiske funksjoner

I den første modellen gitt av $f_1(t)$ får en et sprang i prisene mellom hver måned. Det er ingen naturlig grunn til at prisen skal falle eller stige brått fra en måned til en annen. Dette er derfor en svakhet i denne modellen som en unngår ved å benytte cosinusfunksjonen.

Lucia og Schwartz studier av det nordiske terminmarkedet indikerer at markedet priser inn en generell vekst i prisene i årene som kommer. Dette ser en også direkte av forwardkurven for elektrisitetsprisene, der en på lang sikt ser en vekst på 4 til 6 NOK/år. Et eksempel på

forwardkurven ved Nord Pool er gitt i kapittelet om forwardpriser. Ingen av de deterministiske modellene fra Lucia og Schwartz tar hensyn til dette.

Pilipovic (1998) viser at sinuskurver også kan benyttes til å modellere flere pristopper over året, slik en blant annet observerer i det amerikanske markedet. Dette uttrykkes da ved

$$S_t = S_t^{\text{Und}} + \beta_a \cos(2\pi(t - t_a)) + \beta_{sa} \cos(4\pi(t - t_{sa})) \quad (4.14)$$

β_a og β_{sa} er parametere som styrer pristoppen på den årlige og halvårige pristoppen mens t_a og t_{sa} er tidspunktene hvor disse toppene inntreffer. S_t^{Und} er her den underliggende stokastiske prosessen slik at den totale prosessen er gitt ved

$$S_t = S_t^{\text{Und}} + \text{sesongsvingninger} \quad (4.15)$$

Pilipovic viser at denne underliggende spotprosessen kan være gitt av en enfaktormodell eller flerfaktormodell

4.3.1 Lucia og Schwartz' enfaktormodeller

Lucia og Schwartz (2002) presenterer følgende enfaktormodeller for modellering av spotprisen

$$P_t = f(t) + X_t \quad (4.16)$$

$f(t)$ er en av de deterministiske funksjonene som ble omtalt i avsnitt 4.3. X_t følger en stokastisk prosess på formen

$$dX_t = -\kappa X_t dt + \sigma dz \quad (4.17)$$

hvor $\kappa > 0$, $X(0) = X_0$, og dz er en standard brownsk bevegelse. Likning (4.17) kan kunne skrives om til

$$d(P_t - f(t)) = \kappa(f(t) - P_t) dt + \sigma dz \quad (4.18)$$

En ser her at man har en mean reversion prosess hvor et avvik i prisen P_t fra likevektsnivået $f(t)$ vil medføre en reversjon mot likevektsnivået. Prisprosessen som P_t følger kan uttrykkes som løsningen på differensialligningen

$$dP_t = \kappa(a(t) - P_t) dt + \sigma dz \quad (4.19)$$

Hvor $a(t)$ er en deterministisk funksjon gitt ved

$$a(t) = \frac{1}{\kappa} \frac{df}{dt}(t) + f(t)$$

En løsning av overnevnte funksjon for P_t er gitt ved

$$P_t = f(t) + X_0 e^{-\kappa t} + \sigma \int_0^t e^{\kappa(s-t)} dz(s) \quad (4.20)$$

Denne prisprosessen er normalfordelt med en forventning og varians gitt ved

$$E_0(P_t) \equiv E(P_t | X_0) = f(t) + (P_0 - f(0)) e^{-\kappa t} \quad (4.21)$$

$$Var_0(P_t) \equiv Var(P_t | X_0) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}), \kappa > 0 \quad (4.22)$$

Lucia og Schwartz viser også en tilsvarende enfaktor modell for logaritmen til spot prisen. I denne modellen er logaritmen til spotprisen gitt ved

$$\ln P_t = f(t) + Y_t \quad (4.23)$$

for $t \in [0, \infty)$ og hvor $F=f(t)$ er en deterministisk kjent funksjon av tiden og Y_t er en stokastisk prosess gitt ved

$$dY_t = -\kappa Y_t dt + \sigma dz \quad (4.24)$$

med $\kappa > 0$ og $Y(0) = Y_0$. Ved å gjøre om på ligningene over som det ble gjort for modellen med spotprisen får en da at

$$dP_t = \kappa (b(t) - \ln P_t) P_t dt + \sigma P_t dz \quad (4.25)$$

hvor $b(t)$ er gitt ved

$$b(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{df}{dt}(t) \right) + f(t)$$

Lucia og Schwartz viser at modellen med logaritmen til prisen vil ha de samme egenskaper som modellen som går direkte på prisen med en normalfordeling med betinget forventning og varians.

4.4 Flerfaktormodeller

Pilipovic (1998) hevder at modeller med en stokastisk faktor ikke er tilstrekkelig i modelleringen av energiprisene. Schwartz (1997) viser at to- og trefaktor modeller gir bedre resultat i modelleringen av energipriser. Schwartz (1997) benytter henholdsvis stokastisk convenience yield og stokastisk rente i sin to- og trefaktormodell.

I følge Lucia og Schwartz (2002) vil en i en enfaktormodell ha perfekt korrelasjon mellom futurekontrakter for ulike tidspunkt. Dette kan en eliminere med en tofaktormodell. Som tidligere omtalt har Koekebakker og Ollmar vist at korrelasjonen mellom langsiktige og kortsiktige forwardpriser er svært liten. Dette indikerer dermed at en enfaktormodell ikke er tilstrekkelig.

En tofaktormodell som er introdusert er en mean reversion modell med spotprisen som en faktor og mean reversion nivået som den andre faktoren [Pilipovic, 1998]. Spotprisen antas her å reversere mot likevektsprisen. Likevektsprisen er på sin side lognormalfordelt.

$$\begin{aligned} dS_t &= \alpha(L_t - S_t)dt + S_t\sigma dz \\ dL_t &= \mu L_t dt + L_t \xi dw \end{aligned} \quad (4.26)$$

Her er μ driften til det langsiktige likevektsnivået L , ξ er volatiliteten til det langsiktige likevektsnivået, α er hastigheten på mean reversion prosessen, mens σ er volatiliteten til prisen. Disse differensialligningene kan løses for å få spot prisen. Denne er da gitt ved

$$E[S_T] = S_t e^{-\alpha(T-t)} + k L_t (e^{\mu(T-t)} - e^{-\alpha(T-t)}) \quad (4.27)$$

hvor $T > t$ og

$$k = \frac{\alpha}{\alpha + \mu}$$

Lucia og Schwartz (2002) introduserer to tofaktormodeller med paralleller til enfaktormodellene i kapittel 4.3.1. Her er den ene modellen gitt for prisen og den andre for logaritmen til prisen. Modellen for prisen er gitt ved

$$P_t = f(t) + X_t + \varepsilon_t \quad (4.28)$$

$$dX_t = -\kappa X_t dt + \sigma_X dz_X \quad (4.29)$$

$$d\varepsilon_t = \mu_\varepsilon dt + \sigma_\varepsilon dz_\varepsilon \quad (4.30)$$

$$dz_X dz_\varepsilon = \rho dt \quad (4.31)$$

Her følger ε_t en aritmetrisk brownsk bevegelse (ABM), mens de to Wienerprosessene er korrelert gjennom ligning (4.31). Denne modellen er basert på en artikkel av Schwartz og Smith (2000). Disse modellerer mean reversion i kortsiktige priser og et usikkert likevektsnivå i de langsiktige prisene. ε_t kan dermed sees på som det langsiktige likevektsnivået for prisene.

En tilsvarende modell for den naturlige logaritmen til prisene er gitt ved

$$\ln P_t = f(t) + X_t + \varepsilon_t \quad (4.32)$$

$$dY_t = -\kappa Y_t dt + \sigma_Y dz_Y \quad (4.33)$$

$$d\varepsilon_t = \mu_\varepsilon dt + \sigma_\varepsilon dz_\varepsilon \quad (4.34)$$

$$dz_\gamma dz_\varepsilon = \rho dt \quad (4.35)$$

For begge disse tofaktormodellene er det deterministiske leddet lik det som ble presentert i avsnitt 3.3.

5 Forwardpriser og forwardkurven i kraftmarkedet.

5.1 Future- og Forwardkontrakter

I det nordiske kraftmarkedet handles det både future- og forwardkontrakter ved den nordiske elektrisitetsbørsen Nord Pool ASA. I dette markedet er både future- og forwardkontraktene standardiserte, i motsetning til hva som er vanlig i andre markeder. Markedet for derivater ved Nord Pool omtales som elterminmarkedet. De samme standardiserte kontraktene omsettes også i OTC markedet. Dette markedet omtales også som det bilaterale markedet.

Volummessig er OTC markedet flere ganger større enn markedet ved Nord Pool. I 2001 omsatte Nord Pool 910 TWh med elektrisitet i elterminmarkedet. Til sammenligning ble det clearet 1748 TWh fra handler i OTC markedet gjennom Nord Pools clearing avdeling Nordic Electricity Clearing House ASA (NECH). Samme år ble det fysisk omsatt 112 TWh ved Nord Pool. [Nord Pool, 2002]. Totalt utgjør all handelen i OTC markedet om lag 75% av den totale handelen med derivater på elektrisitet [Fleten mfl, 2002]. Dette innebærer da både kontrakter som cleares og de som dette ikke gjøres med.

Normalt snakker man ved bruk av forward- og futurekontrakter om at underliggende skal bli levert ved et tidspunkt T. I elektrisitetsmarkedet har man i stedet at kontraktene strekker seg over et tidsrom. Man sier derfor at kontrakten har en leveringsperiode. En forwardkontrakt i elektrisitetsmarkedet kan derfor sees på som en serie av vanlige forwardkontrakter. Prisen en da observerer blir tilnærmet et gjennomsnitt av forwardprisen for alle dagene i leveringsperioden.

Før 29. september 1995 var det knyttet fysisk levering av elektrisitet til forward- og futurekontraktene [Nord Pool, 1998]. Etter dette har kontraktene vært rent finansielle instrument. En snakker likevel om at kontrakten har en leveringsperiode. I denne perioden blir differansen mellom spotprisen og kontraktsprisen lagt til grunn for utbetalinger til hhv kjøper og selger av kontrakten, alt etter posisjon og forholdet mellom de to prisene.

Futurekontraktene som handles er dagkontrakter, ukekontrakter og blokkkontrakter. Blokkkontraktene er kontrakter over en fireukers periode. Forwardkontraktene går over sesonger og år.

| Sesong | Leveringsperiode | Antall timer |
|----------|--------------------|--------------|
| Vinter 1 | 01. jan – 30 april | 2879 |
| Sommer | 01. mai – 30. sept | 3672 |
| Vinter 2 | 01. okt – 31. des | 2209 |
| År | 01. jan – 31. des | 8760 |

Tabell 5.1 Ulike forwardkontrakter for det nordiske kraftmarkedet

Kontraktslengdene referer her til år som ikke er skuddår. I skuddår vil Vinter1 kontrakten og årskontrakten bli 24 timer lengre.

Hovedforskjellene mellom future- og forwardkontraktene ligger i oppgjøret. Futurekontraktene har daglig marked to marked oppgjør, mens en for forwardkontraktene har akkumulert oppgjør etter siste handelsdag. I selve leveringsperioden har begge kontraktene et oppgjør som er knyttet opp mot utviklingen i spotprisen.

5.2 Contracts for difference (CfD)

Future- og forwardkontraktene er direkte knyttet til spotprisen gjennom leveringsperioden. Da den fysiske handelen med strøm i markedet skjer mot områdeprisene ved kjøps- og salgssted, vil det være knyttet en risiko til forskjellen mellom områdeprisen og spotprisen. For å kunne eliminere denne risikoen omsettes det såkalte CfD- kontrakter. Dette er forwardkontrakter hvis markedspris reflekterer markedets antakelse om forskjellen mellom forventet spotpris og områdepris over leveringsperioden. Disse kontraktene handles for de samme sesongene som de vanlige forwardkontraktene. Fortjenesten på en slik kontrakt er gitt ved

$$\text{CfD} = \text{områdepris} - \text{systempris}$$

Dette gir en positiv pris dersom den aktuelle områdeprisen forventes å ha en høyere pris enn spotprisen over kontraktperioden. Dersom det motsatte er tilfelle vil CfD-kontrakten ha negativ pris [Nord Pool, 2001 b]. Mandag 07. oktober 2002 ble det omsatt CfD kontrakter for område Jylland (DK1) og Sverige (SE) for Vinter1 2003. DK1 ble omsatt for -3,50 NOK/MWh mens SE ble omsatt for 4,35 NOK/MWh. Begge kontraktene var her for sesongen Vinter 1. Disse prisene indikerer at markedet denne dagen hadde en forventning om at områdeprisen for Sverige vil ligge i snitt 4,50 NOK over systemprisen, mens prisen på Jylland vil ligge 3,50 NOK under systemprisen i perioden fra 01. januar 2003 til 30. april 2003. CfD kontraktene ble lansert 17. november 2000 og er de nyeste kontraktene som er tatt inn i handelen ved Nord Pool. Likviditeten for disse er foreløpig dårligere enn for de andre forwardproduktene.

5.3 Prising av forwardkontrakter

Prising av forwardkontrakter foregår i rent finansielle markeder ved hjelp av argumentasjon om at det ikke skal være arbitrasjemuligheter mellom forwardkontrakten og underliggende produkt. Det betyr at det ikke skal være mulig å tjene penger på å ta en posisjon i forwardkontrakten, en motsatt posisjon i underliggende og i tillegg låne eller spare penger til risikofri rente. Denne argumentasjonen medfører at forwardprisen for en "investment asset" er gitt ved [Hull, 2000]

$$F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)} \quad (5.1)$$

T er her forfallstidspunkt for kontrakten, t er tidspunkt for kontraktinngåelse, r er risikofri rente, S_t er spotprisen ved inngåelse av kontrakten og $F_{t,T}$ er forwardprisen observert ved tid t med forfall ved T.

For futurekontrakter på råvarer vil ting kompliseres noe. Her vil faktorer som convenience yield og lagringskostnader komme inn. Det har etter hvert blitt vanlig å modellere disse

faktorene tilsvarende det en gjør for kontinuerlig utbytte i aksjemarkedet, dvs som en kontinuerlig andel av prisen. En har da

$$F_{t,T} = S_t e^{(r+u-y)(T-t)} \quad (5.2)$$

Her er u kostnaden ved lagring, mens y er convenience yield, dvs nytten eller ulempen ved å ha råvaren tilgjengelig for hånden.

I aksjemarkedet har en fra anvendelsen av GBM at den forventede spotprisen ved tidspunkt T er gitt ved

$$E_t [S_T] = S_t e^{\mu(T-t)} \quad (5.3)$$

der μ er aksjens forventede drift. Kombinert med (5.1) får en da at forwardprisen er gitt ved

$$F_{t,T} = E_t [S_T] e^{(r-\mu)(T-t)} \quad (5.4)$$

Forwardprisen er proporsjonal med den forventede spotprisen. Markedsprisen på risiko er definert ved

$$\lambda = \frac{(\mu - r)}{\sigma} \quad (5.5)$$

hvor μ er aksjens drift, r er risikofri avkastning og σ er aksjens volatilitet. Innsetting av (5.5) i (5.3) gir da at

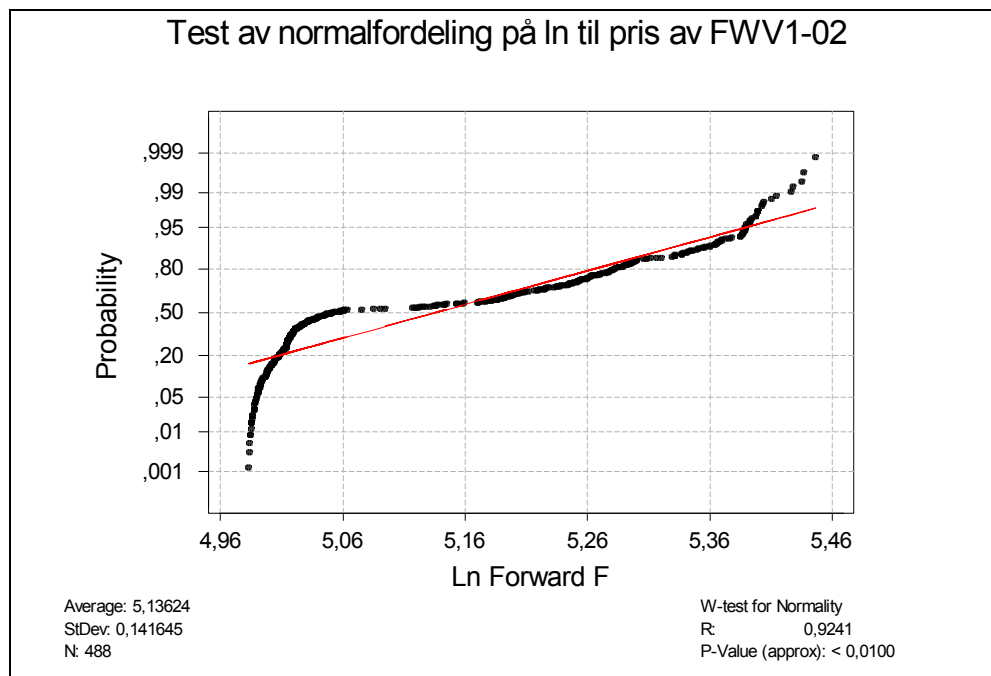
$$F_{t,T} = E_t [S_T] e^{-\lambda\sigma(T-t)} \quad (5.6)$$

Dette viser at forwardprisen ved tidspunkt T er den forventede spotprisen korrigert for markedsprisen på risiko [Hull, 2000]. Forwardprisen er dermed den risikonøytrale forventningen til spotprisen ved tid t .

For elektrisitet er lagringsmulighetene minimale. Dermed vil både kostnader knyttet til lagring og eierfordelen ved å ha råvaren tilgjengelig falle bort. Dette medfører at future- og forwardkontrakter ikke kan prises ved hjelp av arbitrasjeargumenter som en benytter ved prising av andre råvarer. I stedet oppstår forward- og futureprisene for elektrisitet som et resultat av markedets behov for risikostyring (hedging) og ønske om å spekulere. Produsentene hedger ved å selge forwardkontrakter mens store forbrukere ønsker å sikre seg mot store svingninger i prisene ved å kjøpe slike kontrakter. Samtidig er det spekulanter som både kjøper og selger avhengig av egne forventninger om hvilken vei markedet beveger seg. Disse forventningene baserer seg gjerne på bruk av modeller for framtidige spotpriser som for eksempel Samkjøringsmodellen [Fleten og Lemming, 2001]. For elektrisitet har en da at risikopremien er differansen mellom forventet spotpris og markedsprisen i forwardmarkedet.

5.4 Empiriske undersøkelser av forwardprisene

Vi har tidligere i denne oppgaven vist at spotprisene ikke følger en lognormalfordeling og dermed at den ikke følger en geometrisk brownsk bevegelse. Forwardprisene er en risikojustert forventning til spotprisene. Det virker derfor lite trolig at en forwardkontrakt som løper over en periode med en underliggende spotpris skal være lognormalfordelt. For å undersøke hvorvidt dette er tilfelle har vi testet om den naturlige logaritmen til forwardprisene er normalfordelt. For kontrakten FWV1-02 gir da historiske data fra 2000 og 2001 følgende Q-Q plott



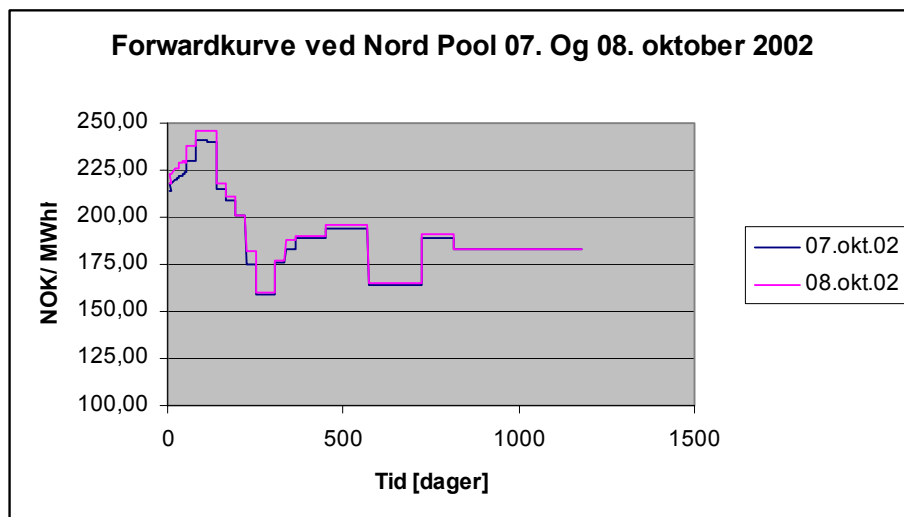
Figur 5.1 Q-Q test for den naturlige logaritmen til prisen på FWV1-02 i perioden 2000-2001

Dette indikerer at forwardprisen på denne kontrakten ikke er lognormalfordelt. For å kunne slå fast at dette generelt sett er tilfelle må en gjøre tilsvarende undersøkelser for andre kontrakter over ulike tidsrom. Vi vil i kapittel 7 diskutere bruk av volatilitetssmil for handelen med opsjoner i kraftmarkedet. Dette gir implisitt at markedet ikke anser forwardkontraktene for å være lognormalfordelte.

5.5 Forwardkurven - tolkninger og modellering

En forwardkurve er en kurve som er trukket på grunnlag av observasjoner om forwardprisene for ulike tidspunkt T i framtiden observert fra samme tidspunkt t , der $T > t$.

Figur 5.2 viser forwardkurve ved Nord Pool den 7. og 8. oktober 2002. Det er flere kontrakter som kan dekke samme tidspunkt. For å få høyest mulig oppløsning har det derfor blitt benyttet så korte kontrakter som mulig for de ulike tidsrommene.



Figur 5.2 Forwardkurven ved Nord Pool 07. og 08. oktober 2002

En ser av grafen at forwardkurven endrer seg mer på de nære kontraktene enn de lange fra den ene dagen til den andre.

Noe av problemet med denne kurven er at den ikke kan si noe om prisen på en forwardkontrakt som strekker seg over andre tidsrom enn de kontraktene som er skissert i kurven. Spesielt vanskelig vil det være å priske kontrakter som strekker seg over spranget vi ser mellom to kontrakter i figuren over. Som tidligere nevnt går en forward- eller futurekontrakt i det nordiske kraftmarkedet over en periode og kan egentlig sees på som en serie av enkeltstående døgnkontrakter. En måte å løse problemet med prising av andre future- og forwardkontrakter på er derfor å konstruere glatte forwardkurver. En måte å gjøre dette på er ved representere forwardprisen for et uendelig kort tidsrom T sett fra dag t som $f(t, T)$. Man kan da konstruere en glattere forwardkurve hvor hvert tidspunkt s på forwardkurven representerer forwardprisen for tid s sett fra tidspunkt t , $f(t, s)$. Bjerksund mfl viser da at en kontrakt for elektrisitet som går fra T_1 til T_2 er forwardprisen gitt ved

$$F(t, T_1, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} w(s; t) f(t, s) ds \quad (5.7)$$

der

$$w(s; t) = \frac{e^{-rs}}{\int_{T_1}^{T_2} e^{-rs}} \quad (5.8)$$

$f(t, s)$ må da være slik at en kontrakt fra T_1 til T_2 prises likt som markedsprisen på denne kontrakten [Bjerksund mfl, 2000].

Kun et utvalg av kontrakter er tilgjengelig og dette begrenser i hvilken grad en kan få frem en slik teoretisk riktig og glatt forwardkurve. Fleten og Lemming kombinerer metoden over med data fra Samkjøringsmodellen for å få inn tilleggsmåling om sesongsvingninger som følge av balansen mellom tilbuds- og etterspørselssiden. Tanken er at dette kan gi en mer korrekt forwardkurve [Fleten og Lemming, 2001].

Den glatte forwardkurvmodellen fra Fleten og Lemming er gitt som et kvadratisk minimeringsproblem ved

$$\min_{x_i} W_{lsq} \sum_{i=1}^I (x_i - B_i)^2 + W \sum_{i=2}^{I-1} (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})^2 \quad (5.9)$$

s.t

$$F(T_0, T_n, T_m)_{bid} \leq \sum_{s=n}^m \frac{e^{-rs}}{\sum_{s=n}^m e^{-rs}} \cdot x_s \leq F(T_0, T_n, T_m)_{ask} \quad ; \quad \forall (n, m) \in S \quad (5.10)$$

der

| | |
|--------------------------|---|
| I | - antall dager over hele perioden |
| S | - settet med produkter som kan observeres i markedet |
| n | - første dag i leveringsperioden til en kontrakt i S |
| m | - siste dag i leveringsperioden til en kontrakt i S |
| B_i | - pris for dag i fra samkjøringsmodellen |
| $F(T_0, T_n, T_m)_{bid}$ | - observert kjøpsbud i markedet for en kontrakt i S |
| $F(T_0, T_n, T_m)_{ask}$ | - observert salgsbud i markedet for en kontrakt i S |
| W_{lsq} | - relativ vektning av differansen mellom forwardprisen og pris fra samkjøringsmodellen i målfunksjonen. |
| W_{smo} | - relativ vektning av glattingsleddet i målfunksjonen |
| x_i | - momentan forwardpris med forfall ved dato i |

Her er det benyttet en forwardpris per dag, mens Bjerksund benyttet forwardprisen over et uendelig kort tidsintervall t . Integralet fra Bjerksund er derfor her erstattet med en summering.

Modellen priser kontraktene som kan observeres i markedet innenfor beste kjøps- og salgsbud og tar i tillegg hensyn til sesongvariasjonene som samkjøringsmodellen indikerer. For den nærmeste tidsperioden vil det være flere ulike kontrakter som løper over samme tidsrom, mens det for kontrakter med mer enn 6 til 12 måneder fram i tid kun vil være 1 til 3 kontrakter for hvert tidsrom. Dette gjør at den glatte forwardkurven er svært detaljert og innholdsrik på kort sikt og mindre detaljert på lenger sikt.

6 Opsjoner i kraftmarkedet

I det nordiske kraftmarkedet har det blitt omsatt opsjoner i OTC markedet i lang tid. Fra og med 29. oktober 1999 har dette også blitt handlet ved Nord Pool [Nord Pool, 1999]. Nord Pool omsetter i dag kun europeiske opsjoner etter å ha fjernet asiatiske opsjoner med virkning fra våren 2001 som følge av lav omsetning [Nord Pool, 2001]. I OTC markedet omsettes både vanlige og asiatiske opsjoner med europeisk eller amerikansk innløsning [Haug, 1999].

Underliggende instrument for de europeiske opsjonene som omsettes ved Nord Pool er forwardkontrakter på sesonger og år. Disse opsjonene er også standardisert med tanke på innløsningspris, innløsningstidspunkt og volum. Standard volum på en kontrakt er 1 MW multiplisert med lengden av underliggende kontrakt i timer. Intervallet for innløsningspriser er 2 kroner for kontrakter med pris under 100 NOK/MWh, 5 NOK for kontrakter med pris mellom 100 og 200 NOK/MWh og 10 NOK for kontrakter med forwardpris over 200 NOK/MWh. I det bilaterale markedet står man fritt til å avtale vilkår som avviker fra dette, men NECH clearer kun opsjoner som oppfyller disse standardbetingelsene.

Asiatiske opsjoner er en fellesbetegnelse på en stor gruppe opsjoner hvor utbetalingen avhenger av et gjennomsnitt på underliggende instrument. Disse kan ha amerikansk eller europeisk innløsning. Dersom en benytter geometrisk gjennomsnitt for kontrakten vil det kunne være mulig å finne analytisk løsning på opsjonsverdien. Dersom aritmetisk gjennomsnitt benyttes er det vanskelig å finne analytiske løsninger. Approksimasjoner eller Monte Carlo simulering er da alternativet. Denne oppgaven vil ikke gå nærmere inn på asiatiske opsjoner

6.1 Prising av europeiske opsjoner på forwardkontrakter med Black 76

Den mest anvendte metoden for å prise europeiske opsjoner i kraftmarkedet i dag er den såkalte Black 76 modellen [Black, 1976]. Dette er en modifisert utgave av Black & Scholes modellen (1973) og gjelder for opsjoner med future/forwardkontrakter som underliggende. Black 76 bygger på de samme forutsetninger som den generelle Black & Scholes modellen med lognormale priser.

I denne modellen beregnes opsjonspremien, c , for en kjøpsopsjon ved

$$c = e^{-rT} [F \cdot N(d_1) - X \cdot N(d_2)] \quad (6.1)$$

Opsjonspremien for en salgsopsjon er gitt ved

$$p = e^{-rT} [X \cdot N(-d_2) - F \cdot N(-d_1)] \quad (6.2)$$

der

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{X}\right) + T\sigma^2 / 2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

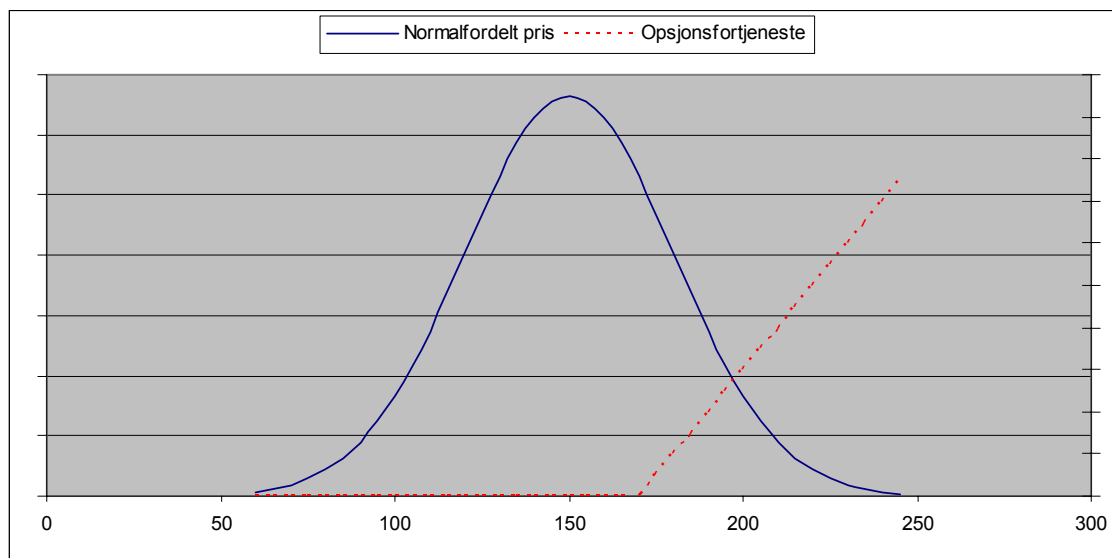
Her er F forwardprisen, X er innløsningspris, T er tid til opsjonens forfall, σ er volatiliteten til underliggende forward/ futurekontrakt, $N(x)$ er den kumulative normalfordelingen og r er risikofri rente. Det er tidligere i denne oppgaven skissert hvordan den berømte Black-Scholes-Merton differensialligningen for en opsjon på en underliggende aksje kommer fram. Tilsvarende argument kan benyttes for å utlede en modell for en opsjon på en underliggende forward/future kontrakt. En ender da opp med en differensialligning på formen

$$\frac{\delta f}{\delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial F^2} \sigma^2 F^2 = rf \quad (6.3)$$

Her er F underliggende forwardkontrakt mens f er opsjonen [Hull, 2000]. Løser en denne ligningen med hensyn på initialverdibetingelsene ender en opp med Black 76 modellen.

7 Volatilitet

Bredden på sannsynlighetsfordelingen til endringen i spotprisene er et uttrykk for volatilitet. Volatilitet utgjør den viktigste egenskapen ved spotprisen for prising av opsjoner og ved risikostyring av en kontraktportefølje, da bredden på fordelingen sier noe om sannsynligheten for at opsjonen skal utløpe ”in the money”. Prisen på opsjoner øker dermed med volatiliteten til underliggende. Figur 7.1 illustrerer dette grafisk. Linjen for opsjonsfortjeneste gjenspeiler fortjenesten på en kjøpsopsjon med innløsningspris lik 170. Underliggende pris er normalfordelt, og forventet pris for innløsningsdatoen er 150.



Figur 7.1 Sammenhengen mellom prisfordelingen og opsjonsverdien

I mange energimarkeder er selve volatiliteten volatil. Clewlow & Strickland (2000) viser til graf av spotpris for olje, der det fremgår at volatiliteten ikke er konstant over tid. En rekke forfattere foreslår modeller for stokastisk og tidsvarierende volatilitet. Clewlow & Strickland, (2000) gir en oversikt. Pilipovic (1998) bruker terminstruktur for volatilitet som et begrep. Hun vektlegger at denne egenskapen ofte ignoreres ved modellering, noe som kan få konsekvenser ved risikostyring av energikontrakter. Volatilitet i Black & Scholes' formel er forventet gjennomsnittsvolatilitet i perioden frem til opsjonens forfall og er dermed gitt som en konstant.

Samuelsons hypotese går ut på at forwardprisvolatiliteten øker som følge av at forfallstiden avtar [Clewlow & Strickland, 2000]. Dette er også funnet for det nordiske elektrisitetsmarkedet [Koekebakker og Ollmar, 2001]. Koekebakker og Ollmar finner ved hjelp av PCA-analyse (Principal Component Analyse) at 25 prosent av variansen i forwardkurven er spesifikk for hver forfallsdag for forwardkontraktene. I følge Koekebakker og Ollmar kan en forklaring på dette være at man har mer relevant informasjon tilgjengelig ettersom forwardkontraktene nærmer seg forfall. I et empirisk studie utført av Fama & French ble det funnet at volatilitet i aksje- og råvaremarkedet hovedsakelig ble drevet av handelsaktivitet i større grad enn av tilgang på ny informasjon [Hull, 2000].

7.1 Standardavvik og varians

Nedenfor følger uttrykkene for utregning av standard-avvik, STD, og varians, VAR, av endringene i spotpris S

$$\text{Var}\left(\frac{dS}{S}\right) = E\left[\left(\frac{dS}{S}\right)^2\right] - \left(E\left[\frac{dS}{S}\right]\right)^2 \quad (7.1)$$

$$\text{STD} = \sqrt{\text{VAR}\left(\frac{dS}{S}\right)} \quad (7.2)$$

Det som er viktig å legge merke til her er at varians og standardavvik er spesifikk for den historiske perioden dataene over spotprisendringer er hentet fra. Det gir derfor liten nytte å sammenligne disse to målene mellom fordelinger dersom de ikke henviser til eksakt samme tidsperiode.

7.2 Definisjon av volatilitet

Volatiliteten, σ , er definert som standardavviket til spotprisendringene normalisert med hensyn til annualisert tid:

$$\sigma = \frac{\text{STD}\left(\frac{dS}{S}\right)}{\sqrt{dt}} \quad (7.3)$$

Volatilitet gir oss altså en mer standardisert måte å sammenligne bevegelsene i spotpriser på enn standardavvik og varians.

7.3 Historisk volatilitet

Når man regner ut historisk volatilitet, finner man gjennomsnittlig volatilitet for perioden som analyseres. Den vanligste metoden som brukes er å regne ut daglige endringer ut fra sluttprisene i markedet. Når man har tilgang til markedsdata for hver enkelt handelsdag, er det mulig å regne ut historisk volatilitet ut fra daglige maksimum- og minimumspriser og korrigere noe for disse daglige “ekstremprisene”, noe som medfører mindre samplingsfeil enn ved bruk av daglige sluttpriser. Slike data er lett tilgjengelig for standardprodukter på Nord Pool.

Ved bruk av historisk volatilitet som inputparameter i Black76 vil en oppleve at prisene ikke stemmer overens med markedsprisen på opsjonen. Utfordringen i modellen ligger derfor i å benytte en volatilitet som priser konsistent med markedsprisen.

7.4 Markedsimplisitt volatilitet

Implisitt opsjonsvolatilitet er den volatiliteten som gir markedsprisen til opsjonen. Denne er selvfølgelig sterkt avhengig av hvilken opsjonsmodell man bruker for å regne ut opsjonspremien. For opsjoner i det nordiske kraftmarkedet blir implisitt volatilitet gitt ved opsjonsmodellen Black 76. Det er ikke mulig å finne implisitt volatilitet ved å invertere uttrykkene i formlene for Black 76. En må derfor benytte iterative søkeprosedyrer for finne denne volatiliteten. Haug (1997) presenterer Newton-Raphson metoden i denne forbindelse. Metoden er gitt ved

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i - \frac{c(\sigma_i) - c_m}{\frac{\partial c}{\partial \sigma_i}} \quad (7.4)$$

der man itererer inntil

$$|c_m - c(\sigma_{i+1})| \leq \varepsilon \quad (7.5)$$

σ_{i+1} er implisitt volatilitet, ε er ønsket grad av nøyaktighet, c_m er markedsverdien av opsjonen og $\frac{\partial c}{\partial \sigma_i}$ er vegaverdien for opsjonen evaluert ved σ_i . Haug (1997) refererer videre til Manaster og Koehler startverdi, som garanterer konvergens for europeiske Black & Scholes opsjoner. Denne er gitt ved

$$\sigma_1 = \left[\left| \ln\left(\frac{S}{K}\right) + rT \right| \frac{2}{T} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.6)$$

der S er underliggende pris ved beregningstidspunktet, K er opsjonens innløsningspris, T er tiden til innløsning gitt i år og r er risikofri rente.

Implisitt volatilitet er således markedets mening om volatiliteten til underliggende prisprosess i tidsrommet frem til opsjonen opphører gitt en opsjonsmodell. Opsjoner som er dypt ”in the money” eller dypt ”out of the money” vil være relativt innsensitive til volatiliteten og den implisitte volatiliteten til en slik opsjon vil derfor ikke være spesielt representativ [Hull, 2000].

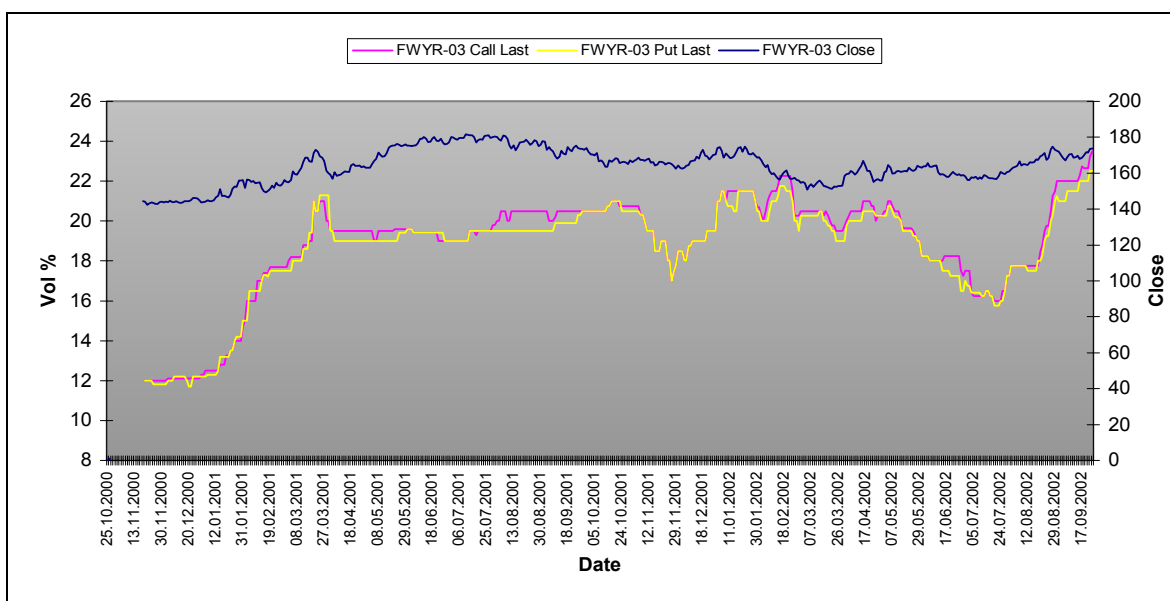
Ulike meglerhus leverer implisitt volatilitet beregnet på grunnlag av markedsprisen på opsjonen. Tabell 7.1 viser implisitt volatilitet for ulike kontrakter den 07.10.2002 levert av meglerfirmaet M3 Kraft/APX.

| Kontrakt | Kjøpsopsjon | Salgsopsjon |
|----------|-------------|-------------|
| FWV1-03 | 30 % | 29 % |
| FWSO-03 | 29 % | 29 % |
| FWYR-03 | 26,25 % | 25,25 % |
| FWYR-04 | 18,25 % | 17,5 % |
| FWYR-05 | 15 % | 14 % |

Tabell 7.1 Implisitt volatilitet for ulike kontrakter 07.10.2002

Her ser en at implisitt volatilitet for en kjøps- og en salgsoption ikke nødvendigvis er like. Dette viser at noen av forutsetningene bak Black & Scholes modellen ikke er tilstede. Denne modellen forutsetter blant annet at det ikke finnes noen transaksjonskostnader eller skattebetingelser, noe som ikke er tilfelle i dette markedet. Black & Scholes modellen forutsetter videre underliggende følger en GBM med konstant drift og volatilitet, at handelen foregår kontinuerlig i tid og at risikofri rente er konstant og lik for alle forfall. Disse forutsetningene er heller ikke tilfredsstillt. Av tabellen ser man også at den implisitte volatiliteten faller for kontrakter framover i tid.

Figuren under viser hvordan implisitt volatilitet har endret seg for kontrakten FWYR-03 over en periode [M3 Kraft/APX]. Opsjoner på denne kontrakten har forfallsdato 19.12.2002. Figuren gir dermed et bilde av hvordan verdien på denne opsjonen har endret seg over tid.



**Figur 7.2 Implisitt vol. for FWYR-03 i perioden 25.10.2000 til 17.09.2002
[M3 Kraft/APX]**

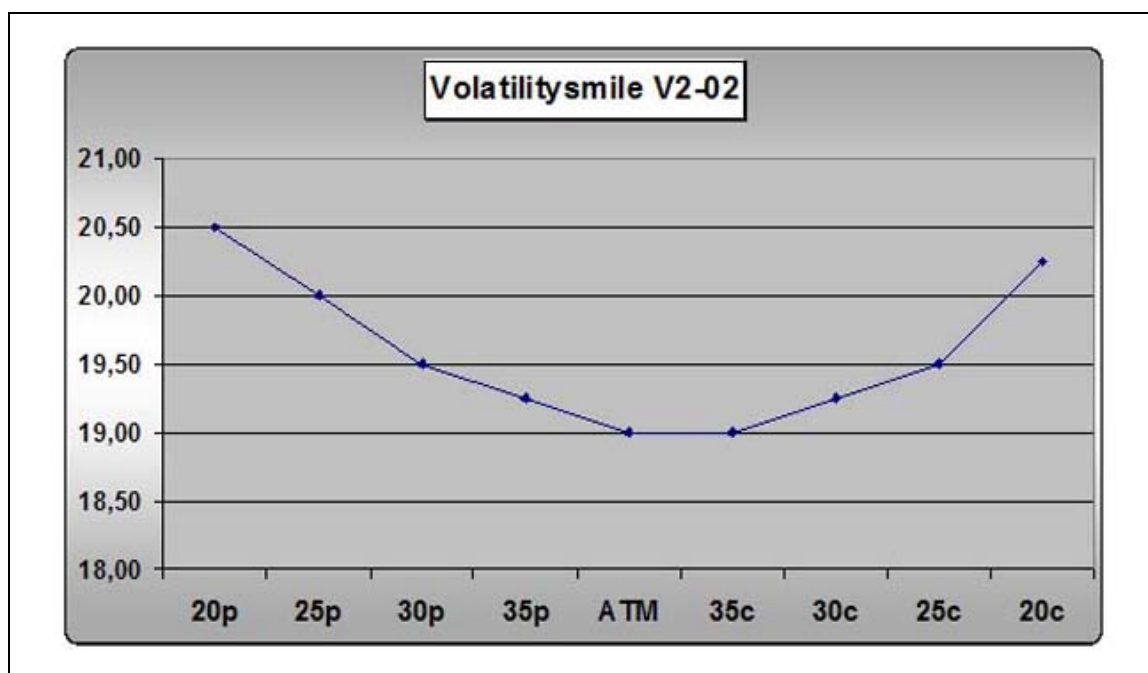
Vi kan også finne terminstruktur for volatilitet ut fra opsjonskontrakter som caps og floors. (Tak- og gulvkontrakter). En cap består av en serie kjøpsopsjoner, og en floor består av en serie salgsopsjoner. En cap (floor) har en løpetid som refererer til differansen mellom opphørsdatoene til kjøpsopsjonene tilhørende cap'en. Eksempelvis består en ettårig cap med månedlig løpetid av tolv individuelle kjøpsopsjoner, eller caplets, der den første opphører om en måned, den andre om to måneder osv. Å finne terminstrukturen ut fra caps og floors er en komplisert oppgave, der man prøver å estimere alle caplet-volatilitetene slik at man opprettholder markedsprisene til gitte cap-priser.

7.5 Volatilitetssmil

Når den underliggende prisfordelingen har tykkere haler enn lognormalfordelingen og en likevel benytter en opsjonsmodell basert på en lognormalfordelt prisprosess, er det vanlig å

korrigerer dette ved å justere volatiliteten for ulike innløsningspriser. Dersom en plottes den implisitte volatiliteten som en funksjon av innløsningsprisen vil volatiliteten øke med avstanden mellom innløsningsprisen og markedsprisen. Disse grafene ser ofte ut som et smil og derav navnet volatilitetssmil. Denne grafen behøver ikke nødvendigvis å være formet som et smil, alt avhengig av hvordan den virkelige fordelingen av priser er i forhold til fordelingen opsjonsmodellen er basert på. I følge Wilmott (1998) kan dette også se ut som en grimase. Dersom opsjonsmodellen bruker gjenspeiler den virkelige fordelingen til underliggende pris, vil volatiliteten være en flat graf som funksjon av innløsningsprisen.

Også i kraftmarkedet observerer en bruk av volatilitetssmil ved bruk av Black 76 som opsjonsmodell. Figur 7.3 viser et eksempel på et volatilitetssmil for kontrakten FWV2-02 som handles på Nord Pool [M3 Kraft/APX]. Dette indikerer at forwardkontraktens fordeling har tykkere haler enn lognormalfordelingen og underbygger de empiriske resultatene fra kapittel 5.4.



Figur 7.3 Et eksempel på et volatilitetssmil for FWV2-02 [M3 Kraft/APX]

Her angir tallene langs aksene for innløsningsprisen prosenttallet for deltaverdien til henholdsvis salgsoptjoner, p, og kjøpsopptjoner, c. Deltaverdien angir prosent endring i opsjonsverdi med hensyn til endring i pris på underliggende. For en kjøpsopptjon, c, med underliggende, S, er delta, Δ , gitt ved

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$$

Opsjoner er mindre sensitive med hensyn til underliggende jo lenger "out of the money" de er. Implisitt volatilitet i figur 7.3 er beregnet ved å benytte en Newton-Raphson metode [M3Kraft/APX].

7.6 Volatilitetsmatrise

Man kan argumentere med at spotprisen må modelleres med to faktorer på grunn av liten korrelasjon mellom forwardprisen i den korte og den lange enden av forwardkurven. Koekebakker og Ollmar (2001) har empirisk funnet at volatiliteten til spotprisen i Nord Pool faller raskt som en funksjon av forfallstiden til forwardkontraktene, og at de stabiliserer seg etter et års tid. I Pilipovic (1998) vektlegger man en todimensjonal matrise med tid som en dimensjon og forwardpris (kontrakt) som den andre dimensjon. I Hull (2000) vektlegges matrise der dimensjonene består av tid og innløsningspris.

7.7 Stokastisk volatilitet

En populær modell for stokastisk volatilitet er foreslått av Hull & White (1998), og har senere blitt videreutviklet av en rekke forskere. Denne er beskrevet ved

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (7.7)$$

$$dV = a(\bar{V} - V)dt + \xi \sqrt{V} dw \quad (7.8)$$

der $V = \sigma^2$ og uttrykket for dS er GBM modellen med volatilitet som ikke lenger er konstant, men som endrer seg i et tilfeldig mønster. Variansen V har mean reversion mot et langtidsnivå \bar{V} . Kilden til den tilfeldige endringen i de to uttrykkene, dw og dz , kan begge uttrykkes ved $\sqrt{\Delta t} \varepsilon$, der ε er et tilfeldig tall fra standard normalfordelingen. ε vil derimot ikke være lik for de to prosessene slik at dw og dz er uavhengige. dz og dw kan eventuelt være korrelert med en koeffisient ρ .

8 Utvikling av en ny opsjonsmodell

I dette kapitlet vil det bli vist hvordan Lucia og Schwartz' enfaktormodell på spotprisene kan bli benyttet til prising av opsjoner med forwardkontrakter som underliggende instrument. For å kunne gjøre dette vil vi trenge en generalisert versjon av prismodellen. Vi viser hvordan dette kan gjøres og deretter hvordan denne generaliserte modellen benyttes til prising av opsjoner. I dette kapitlet snakker vi kun om forwardkontrakter med leveringsperiode på en dag. I kapittel 9 viser vi hvordan dette kan generaliseres til å gjelde for opsjoner på forwardkontrakter med lengre leveringsperiode.

8.1 Utleddning av generell modell for forwardprisen

I kapitlet om modelleringen av spotprisene ble det vist at Lucia og Schwartz' enfaktormodell gav at den generelle prisprosessen var gitt som summen av et deterministisk ledd og et stokastisk ledd

$$P_t = f(t) + X_t$$

Under gitte betingelser om den initielle prisen ved tid 0 gir dette en generell prisprosess for spotprisen ved

$$P_t = f(t) + X_0 e^{-\kappa t} + \sigma \int_0^t e^{\kappa(s-t)} dz(s)$$

For å kunne prise verdien av derivater i en risikonøytral verden, trenger man en risikojustert prisprosess. Lucia og Schwartz viser en slik risikojustert prosess for X_t er gitt ved

$$dX_t = \kappa(\alpha^* - X_t)dt + \sigma dZ^* \quad (8.1)$$

Der α^* er gitt ved

$$\alpha^* \equiv \frac{-\lambda\sigma}{\kappa} \quad (8.2)$$

Her er λ gitt som markedsprisen på risiko. Vedlegg 6 gir sammenhengen mellom den risikonøytrale og ikke-risikonøytrale modellen for en diskret versjon av prosessen for X_t .

Samme argumentasjon som for den vanlige prisprosessen gir da at den risikonøytrale prisprosessen er gitt ved

$$P_t = f(t) + X_0 e^{-\kappa t} + \alpha^* (1 - e^{-\kappa t}) + \sigma \int_0^t e^{\kappa(s-t)} dZ^*(s) \quad (8.3)$$

Denne prisprosessen inneholder kun en normalfordelt stokastisk variabel og dette medfører at selve prisprosessen er normalfordelt med

$$E^*(P_t) = f(t) + X_0 e^{-\kappa t} + \alpha^* (1 - e^{-\kappa t}) \quad (8.4)$$

$$Var^*(P_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) \quad (8.5)$$

Verdien ved $t=0$ av en forward kontrakt som opphører ved tid T er gitt ved:

$$v_0(X_t, T) = e^{-rT} E_0^* [P_T - F_0(P_0, T)] \quad (8.6)$$

F_0 er verdien ved tid 0 for en kontrakt som forfaller ved tid T og r er risikofri rente.

Da verdien av en forwardkontrakt er 0 ved kontraktsinngåelse, får en følgende uttrykk for forwardprisen:

$$F_0(P_0, T) = E_0^*(P_T) = f(T) + (P_0 - f(0))e^{-\kappa T} + \alpha^* (1 - e^{-\kappa T}) \quad (8.7)$$

I Lucia og Schwartz modell er t gitt i dager og der $t=0$ er 1. januar et vilkårlig år. Verdien $F_0(P_0, T)$ blir dermed prisen ved dag 0 av en forwardkontrakt med forfall ved dag T . For å kunne prise en vilkårlig forward på et vilkårlig tidspunkt på året må derfor prosessen generaliseres.

Prisen ved et vilkårlig tidspunkt t på en forward med forfall T vil kunne uttrykkes ved

$$F_t(P_t, T) = E_t^*(P_T) = f(T) + (P_t - f(t))e^{-\kappa(T-t)} + \alpha^* (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \quad (8.8)$$

Vi definerer nå følgende notasjon som benyttes i den videre utledningen:

- t = beregningsdag for opsjonen
- T = forfall for opsjonen
- T_F = forfall for forwardkontrakten

Man kan nå finne et risikonøytralt uttrykk for spotprisen ved tid T gitt at en kjenner spotprisen ved t . Dette er gitt ved:

$$P_T = f(T) + (P_t - f(t))e^{-\kappa(T-t)} + \alpha^* (1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \sigma \int_t^T e^{\kappa(s-T)} dZ^*(s) \quad (8.9)$$

Uttrykket for forwarden ved tid T med forfall T_F blir ved samme argumentasjon som benyttet av Lucia og Schwartz over:

$$F_T(P_T, T_F) = f(T_F) + (P_T - f(T))e^{-\kappa(T_F - T)} + \alpha^* (1 - e^{-\kappa(T_F - T)}) \quad (8.10)$$

Setter inn uttrykket for P_T gitt ved (8.9) inn i (8.10) og forenkler. Dette gir:

$$F_T(P_T, T_F) = f(T_F) + (P_t - f(t))e^{-\kappa(T_F - t)} + e^{-\kappa T_F} \sigma \int_t^T e^{\kappa s} dZ^*(s) + \alpha^* (1 - e^{-\kappa(T_F - t)}) \quad (8.11)$$

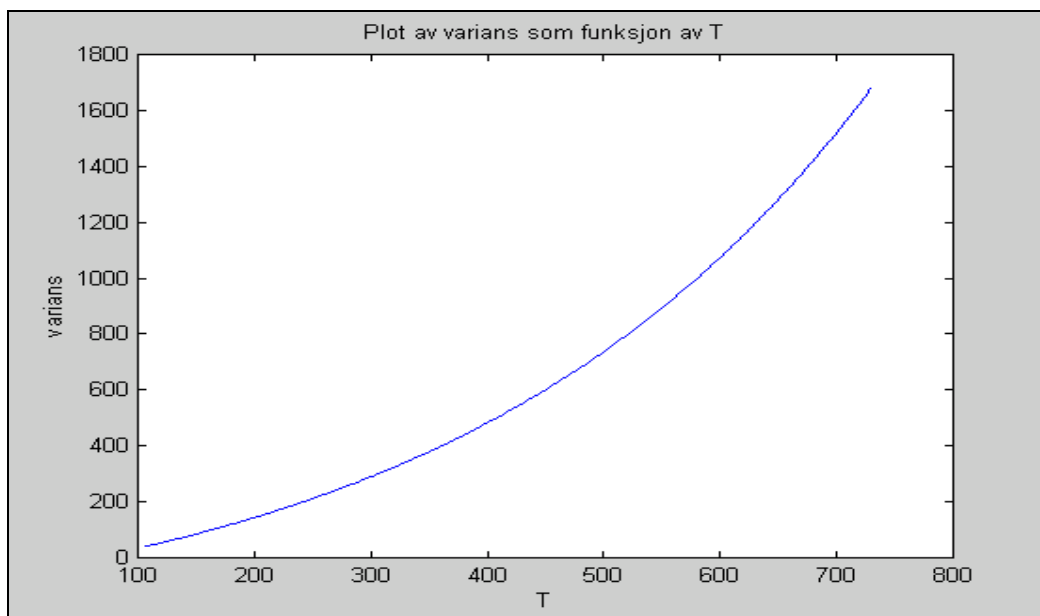
Vi har nå et stokastisk uttrykk for forwardprisen, mens man i den opprinnelige modellen hadde en deterministisk funksjon for denne. Dette skyldes at forwardmodellen nå tar inn et stokastisk uttrykk for spotprisen der en tidligere hadde en deterministisk spotpris. Forwardprisen ved tid T vil nå være normalfordelt med forventning og varians gitt ved

$$\mu_{F_T} = E[F_T(P_t, T_F)] = f(T_F) + (P_t - f(t))e^{-\kappa(T_F - t)} + \alpha^* (1 - e^{-\kappa(T_F - t)}) \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} s^2 = \text{Var}[F_t(P_t, T_F)] &= e^{-2\kappa(T_F - T)} \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left[e^{2\kappa(s-T)} \right]_{s=t}^{s=T} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left[e^{-2\kappa(T_F - T)} - e^{-2\kappa(T_F - t)} \right] \end{aligned} \quad (8.13)$$

En ser at uttrykket for forventningen til forwardprisen ved T er lik den forventningen vi har til samme forward ved tid t . Denne forventningsverdien er dermed hva modellen mener kontrakten skal handles på. Denne prisen bør ideelt sett være lik markedsprisen for de kontraktene som omsettes i markedet.

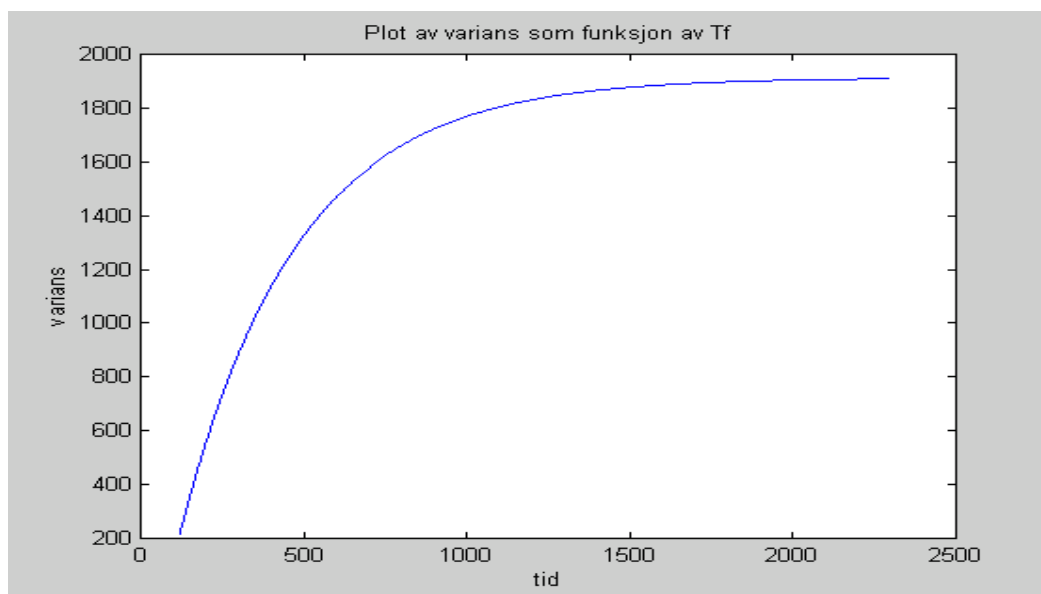
I figur 8.1 har vi plottet variansen som funksjon av forfallsdatoen til opsjonen. Forutsetningene i figuren er estimerte parameterverdier for κ og σ fra vedlegg 2. T_f er konstant lik 730, $t = 63$ og T varierer fra 107 til 730:



Figur 8.1 Variansen som funksjon av tiden til opsjonens forfall T gitt t og T_F konstant

Grafen viser hvordan variansen øker med forfallstiden til opsjonen. Økende varians skal teoretisk gi høyere opsjonsverdi.

For standardiserte opsjoner i kraftmarkedet er forfallsdatoen satt til tredje torsdag i måneden før underliggende forwardkontrakt går til levering. Dette gir at tidsrommet mellom opsjonens forfall og tidspunktet der underliggende kontrakt går til levering ligger mellom 10 og 16 dager. Dersom en antar at opsjoner på dagkontrakter, som vi behandler her, også vil ha en tilnærmet konstant avstand mellom disse tidspunktene kan en plote hvordan variansen da endrer seg med forfallsdagen T_F . Vi setter $T = T_F - 14$, som da betyr at opsjonen går til innløsning 14 dager før dagkontrakten går til levering. Dette gir da følgende bilde for variansen som en funksjon av økende T_F .



Figur 8.2 Variansen som funksjon av tiden til forwardens forfall T_f gitt $T=T_f-14$ og t konstant

Grafen i figur 8.2 virker naturlig ettersom man kan forvente at mulig utfall på en forward vil øke med tid til levering. Modellen bygger på mean reversion og dette tilsier at utfallet skal begrenses over tid. I figuren begrenses mulig utfall mot en grenseverdi på lang sikt gitt ved

$$s^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa} e^{-2\kappa(T_f-T)} \quad (8.14)$$

8.2 Analytisk løsning for europeisk kjøpsopsjon

Vi benytter samme notasjon for de ulike tidspunkt som tidligere. Benytter at forventningen til F_T uttrykkes ved μ_{F_T} og standardavvik uttrykkes ved s , der disse er gitt ved (8.12) og (8.13).

Verdien av en europeisk kjøpsopsjon ved forfall T er gitt ved

$$c_T = \max\{0, F_T - K\} = \int_K^{\infty} (F_T - K) g(F_T) dF_T \quad (8.15)$$

Der K er innløsningsprisen og $g(F_T)$ er sannsynlighetstettheten til den normalfordelte variabelen F_T . I vedlegg 3 utleder vi en analytisk løsning for opsjonspremien ved beregningstidspunkt t gitt ved

$$c_t = \left(\frac{s}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{K-\mu_{F_T}}{s}\right)^2}{2}} + (\mu_{F_T} - K) \cdot N\left[\frac{\mu_{F_T} - K}{s}\right] \right) \cdot e^{-\frac{r(T-t)}{365}} \quad (8.16)$$

Her er r den kontinuerlige risikofrie renten og $N[\]$ er den kumulative standard normalfordelingen.

8.3 Analytisk løsning for europeisk salgsopsjon

Vi benytter samme notasjon som under utledning av kjøpsopsjonen. Vi har da at verdien av en europeisk salgsopsjon ved dens forfall T er gitt ved

$$p_T = \max\{0, K - F_T\} = \int_{-\infty}^K (K - F_T) g(F_T) dF_T \quad (8.17)$$

Der K er innløsningsprisen og $g(F_T)$ er sannsynlighetstettheten til den normalfordelte variabelen F_T . I vedlegg 4 utleder vi en analytisk løsning for denne opsjonen gitt ved

$$P_t = \left(\frac{s}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{K - \mu_{F_T}}{s} \right]^2} + (K - \mu_{F_T}) \cdot N \left[\frac{K - \mu_{F_T}}{s} \right] \right) e^{-\frac{r(T-t)}{365}} \quad (8.18)$$

Her er r den kontinuerlige risikofrie renten og $N[\]$ er den kumulative standard normalfordelingen.

8.4 Valg av deterministisk funksjon

Det deterministiske leddet i prisprosessen er tidligere referert til som $f(t)$. Vi velger å benytte funksjonen for $f(t)$ benyttet i modell 2 i Lucia & Schwartz (2002). Denne var gitt ved

$$f(t) = \alpha + \beta D_t + \gamma \cos \left((t + \tau) \frac{2\pi}{365} \right)$$

der $D_t = 1$ hvis dag t er en helgedag, og $D_t = 0$ hvis dag t er en ukedag.

Vi velger å bruke denne modellen da Lucia & Schwartz (2002) finner lavest verdi for RMSE (Root mean squared error) ved å benytte denne funksjonen til beregning av future- og forwardverdier over alle future- og forwardkontrakter som handles for et antall gitte datoer. Alternativ funksjon for $f(t)$ er gitt i ligning (4.12) som modell 1 [Lucia & Schwartz, 2002].

8.5 Monte Carlo simulering av modellen

For å verifisere den analytiske løsningen har det blitt utviklet en Monte Carlo simulering av modellen. Dette er gjort etter fremgangsmåte fra Clewlow & Strickland (2000) og (1998).

Metoden går ut på å simulere mulige spotpriser for forfallsdatoen til opsjonen. Ved hjelp av disse simulerte prisene og (8.10) får man en forventet verdi på forwardprisen man har en opsjon på. Denne forwardprisen sammenlignes med innløsningsprisen til opsjonen for bestemmelse av fortjenesten opsjonen gir. Estimert opsjonspremie finnes deretter ved å diskontere gjennomsnittet av alle verdiene for fortjenesten på opsjonen i de ulike scenariene.

Oppsummert gjøres dette som følger:

En har følgende uttrykk for spotprisen ved forfallsdagen, T :

$$P_T = f(T) + X_T$$

X_T simuleres fra beregningsdagen t til forfalldagen T for opsjonen, med 1 dag som oppløsning ved hjelp av formelen

$$X_t = X_{t-1}(1 - \kappa) - \lambda\sigma + \sigma dZ^* \quad (8.19)$$

som på diskret form kan skrives

$$X_t = X_{t-1}(1 - \kappa) - \lambda\sigma + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad (8.20)$$

der ε er en tilfeldig trekning fra standard normalfordelingen.

En kan nå finne spotprisen P_T , gitt av dette scenariet. Denne innsatt i (8.10), som også gjengis under, gir prisen på den underliggende forwarden for opsjonen.

$$F_T(P_T, T_F) = f(T_F) + (P_T - f(T))e^{-\kappa(T_F - T)} + \alpha^*(1 - e^{-\kappa(T_F - T)})$$

Verdien av opsjonen ved et gitt scenario beregnes ved følgende uttrykk for en kjøpsopsjon, der innløsningsprisen er gitt ved K :

$$C_T = \max(0, F(P_T, T_F) - K) \quad (8.21)$$

For en salgsopsjon med innløsningspris K er verdien av opsjonen gitt ved

$$C_T = \max(0, K - F(P_T, T_F)) \quad (8.22)$$

Estimert opsjonspremie finner vi ved å diskontere gjennomsnittet av fortjenesten på opsjonen i alle scenariene, i. For et antall scenarier M får vi da følgende uttrykk for estimert opsjonspremie, \hat{C}_t :

$$\hat{C}_t = e^{-r(T-t)/365} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M C_{T,i} \quad (8.23)$$

8.5.1 En sammenligning av analytisk løsning og simulering

Basert på parametere gitt i vedlegg 1 og med en markedspris på risiko på 0 har vi gjort følgende sammenligning mellom analytisk løsning og simulering

| | |
|---------------------------|------------|
| Beregningsdato: | 01.07.2002 |
| Opsjonens forfallsdato: | 01.10.2002 |
| Dato for forward: | 15.10.2002 |
| Innløsningspris: | 155,00 |
| Spotpris, beregningsdato: | 127,34 |
| Risikofri rente: | 7,0 % |

Analytisk formel gir forventet forwardverdi = 159,24, og følgende opsjonspremie:

| | | |
|--------------------|---|-------------|
| Kjøpsopsjon | = | 6,41 |
| Salgsopsjon | = | 2,25 |

Monte-Carlo-simulering gir følgende resultater med hhv 1000 og 10000 simuleringer:

| Antall simuleringer | Premie Kjøpsopsjon | Premie Salgsopsjon |
|---------------------|--------------------|--------------------|
| 1000 | 6,63 | 2,11 |
| 10000 | 6,44 | 2,31 |

Tabell 8.1 Resultater fra Monte Carlo simulering med λ lik 0

Tilsvarende beregning er også utført med en implisitt markedspris på risiko gitt ved $\lambda = 0.018$. Dette er den verdien Lucia og Schwartz finner på risikopremien på grunnlag av observasjoner i forwardmarkedet i perioden desember 1998 til og med november 1999.

Analytisk formel gir forventet forwardverdi = 157,11, og følgende opsjonspremie:

| | | |
|--------------------|---|-------------|
| Kjøpsopsjon | = | 5,11 |
| Salgsopsjon | = | 3,04 |

Monte-Carlo-simulering gir følgende resultater med hhv 1000 og 10000 simuleringer:

| Antall simuleringer | Premie Kjøpsopsjon | Premie Salgsopsjon |
|---------------------|--------------------|--------------------|
| 1000 | 5,18 | 2,99 |
| 10000 | 5,10 | 3,02 |

Tabell 8.2 Resultater fra Monte Carlo simulering med λ lik 0,018

Ut fra denne testen ser en at den analytiske opsjonsformelen og simuleringene stemmer bra overens. Vi kan dermed slå fast at den analytiske opsjonsformelen virkelig gir de korrekte verdiene for salgs- og kjøpsopsjoner når Lucia og Schwartz' prismsmodell er underliggende prisprosess.

En ser her at forventet forwardpris synker når λ økes fra 0 til 0,018. Dette ser en også av likning (8.11). Når dette skjer forskyves fordelingen til forwardprisen mot venstre. Innløsningsprisen holdes konstant for de to beregningene. Denne forskyvningen medfører derfor en økt sannsynlig for at salgsopsjonen skal havne "in the money" og en lavere sannsynlighet for at dette skal skje med kjøpsopsjonen. Dette medfører at salgsopsjonen stiger i verdi og at kjøpsopsjonens verdi avtar fra tabell 8.1 til 8.2.

9 Generalisering av opsjonsmodell

Vi har til nå priset en opsjon på en underliggende forwardkontrakt som kun strekker seg over en gitt dag. Forwardkontraktene i det nordiske kraftmarkedet går over en periode. I dette kapitlet generaliserer vi opsjonsmodellen fra forrige kapittel slik at denne kan anvendes på forwardkontraktene som handles i markedet.

9.1 En approksimert forwardverdi og varians

Vi har tidligere vist hvordan Bjerksund mfl og Lemming og Fleten veier de ulike dagene i kontraktperioden for å finne en pris for forwardkontrakten. Lucia og Schwartz gjør en approksimasjon til uttrykket som Fleten og Lemming benytter og sier at forwardprisen for en kontrakt som strekker seg fra T_1 til T_2 er gitt ved

$$F_0(P_0; T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{T=T_1}^{T_2} F_0(P_0, T) \quad (9.1)$$

Vår opsjonsmodell krever forventet forwardpris ved tid T , μ_{FT} , og standardavviket σ , inn som parametere. For en kontrakt som strekker seg over en tidsperiode benytter vi derfor, i tråd med (9.1), at forventningen til forwardkontrakten ved tidspunkt t er gitt ved

$$\mu_{F_t}(P_t; T_{F_1}, T_{F_2}) = \frac{1}{T_{F_2} - T_{F_1} + 1} \sum_{\tau=T_{F_1}}^{T_{F_2}} \mu_{F_t}(P_t; \tau) \quad (9.2)$$

Der T_{F_1} og T_{F_2} er henholdsvis første og siste dag i kontraktens leveringsperiode.

Forventningen til kontrakten blir altså den gjennomsnittlige forventningen til alle dagene over kontraktperioden. Vi benytter her $T_{F_2} - T_{F_1} + 1$ for å få med alle dagene i beregningsperioden slik at approksimeringen er like gyldig for kontrakter med kort som med lang leveringsperiode. Dette uttrykket kan skrives ut til

$$\mu_{F_t}(P_t; T_{F_1}, T_{F_2}) = \frac{1}{T_{F_2} - T_{F_1} + 1} \sum_{\tau=T_{F_1}}^{T_{F_2}} \left\{ f(\tau) + (P_t - f(t))^{-\kappa(\tau-t)} + \alpha^* (1 - e^{-\kappa(\tau-t)}) \right\} \quad (9.3)$$

Denne forventningsverdien til en kontrakt vil være det modellen verdsetter kontrakten til og skal ideelt sett, dersom modellen er optimal, gi priser lik markedsprisen. En kan derfor sammenligne prisen modellen gir for ulike kontrakter på en gitt dato med de observerbare markedsprisene for denne datoen. Vi har gjort dette for 05. mars 2002. Spotprisen for denne dagen var 153,40 NOK/MWh og dette gav følgende resultat

| Kontrakt | Beregnet verdi | Markedspris | Relativ differanse |
|----------------|----------------|-------------|--------------------|
| GU12-02 | 142,92 | 141,00 | 1,36 % |
| GU14-02 | 131,64 | 131,00 | 0,49 % |
| BG07-02 | 108,28 | 109,50 | -1,11 % |
| GB10-02 | 135,56 | 138,00 | -1,77 % |
| FWV2-02 | 158,57 | 157,00 | 1,00 % |
| FWYR-03 | 138,39 | 152,75 | -9,40 % |
| FWYR-05 | 138,49 | 168,75 | -17,93 % |

Tabell 9.1 En sammenligning av markedspriser og beregnede priser for ulike forwardkontrakter den 05. mars 2002

Vi har her benyttet den gjennomsnittlige implisitte markedsprisen på risiko ($\lambda=0,018$) som Lucia og Schwartz finner når de benytter sin enfaktormodell med en sinusformet deterministisk funksjon. De andre parametrene er gitt i vedlegg 1.

I implementeringen av denne modellen har det blitt tatt hensyn til at prisene er lavere i helgene, mens nedgangen i prisen ved andre hellig- og feriedager ikke er tatt hensyn til, da dette kompliserer implementeringen i VBA (Visual Basic for Applications) betraktelig. Dette vil kunne gi noe høyere pris på forwarden enn hva en egentlig skulle observert, avhengig av antallet helligdager i perioden.

Som en ser er utslagene små på de korteste kontraktene. Differansen blir betydelig på de lange kontraktene. Som tidligere nevnt tar Lucia og Schwartz' deterministiske funksjon ikke hensyn til den langsiktig prisveksten som markedet forventer og dette ser en konsekvensen av her.

Fra utledningen av den generelle forwardkontrakten har vi at variansen for en gitt forwarddato T_F er gitt ved

$$s^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left[e^{-2\kappa(T_F-T)} - e^{-2\kappa(T_F-t)} \right]$$

For en variabel Y gitt som summen av et sett uavhengige normalfordelte variable X_1 til X_n har en at

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \quad (9.4)$$

Y vil da ha en varians gitt ved

$$s_Y^2 = a_1^2 s_1^2 + a_2^2 s_2^2 + \dots + a_n^2 s_n^2 \quad (9.5)$$

Forwardprisen i modellen som anvendes her er normalfordelt. Dette gir at variansen til summen over n dager i kontraktsperioden dermed er gitt ved

$$s^2 = s_{TF1}^2 + s_{TF1+1}^2 + \dots + s_{TF2}^2 \quad (9.6)$$

For en forwardkontrakt vil en dermed ha at

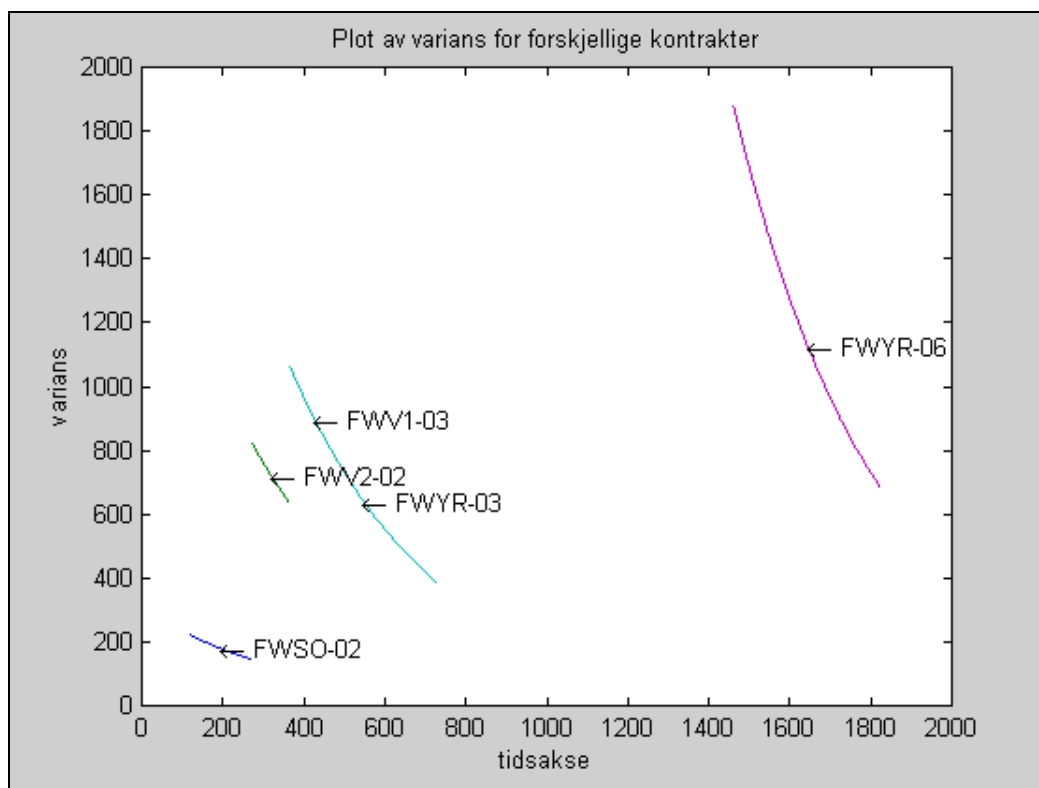
$$s_{\text{kontrakt}}^2 = \frac{\sum_{i=TF_1}^{TF_2} S_i^2}{T_{F_2} - T_{F_1} + 1} \quad (9.7)$$

Av uttrykket for variansen for en vilkårlig kontraktsdag T_F ser en at variansen faller med økende T_F . På grunnlag av svært liten verdi på κ skjer dette fallet nærmest lineært. Vi foreslår derfor å benytte variansen for den midterste dagen i kontraktsperioden som en approksimasjon til kontraktens standardavvik

$$s^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left[e^{-2\kappa \left(\frac{T_{F_2} + T_{F_1} - T}{2} \right)} - e^{-2\kappa \left(\frac{T_{F_2} + T_{F_1} - t}{2} \right)} \right] \quad (9.8)$$

Dette uttrykket er enklere å håndtere. Dessuten har en fra Lucia og Schwartz at autokorrelasjonen mellom prisene over et intervall er høy. Dette indikerer at prisene ikke er uavhengig fordelt og at ligning (9.7) er en forenkling.

Figur 9.1 viser et plott av variansen for kontraktene FWSO-02, FWV2-02, FWV1-02 og FWYR-03 gitt beregningsdag 05.03.2002, dag 63, og forfallsdag for opsjon tredje torsdag i måneden før levering. Parametrene for κ og σ er gitt i vedlegg 2. Piler i figuren viser variansen vi bruker som en approksimasjon for de enkelte kontraktene. FWYR-06 er også lagt inn for å danne et bilde av hva som skjer på lang sikt.



Figur 9.1 Variansen over kontraktsperioden for ulike kontrakter og anvendt verdi i modell for gitte kontrakter.

Av grafen ser vi at approksimasjonen gir et godt bilde av gjennomsnittlig volatilitet for de næreste kontraktene. På lang sikt, kan approksimasjonen se ut til å gi en noe lavere verdi enn gjennomsnittet for kontrakten. Vi tester effekten av denne approksimasjonen i kapittel 9.4.

For kontrakter med lang tid til innløsning, vil en ved approksimasjonen gitt i (9.8) få at standardavviket, s , vil gå mot en grenseverdi gitt ved

$$s = \left(\frac{\sigma^2}{2\kappa} e^{-2\kappa \left(\frac{T_{F2} + T_{F1}}{2} - T \right)} \right)^{1/2} \quad (9.9)$$

Dette vil videre medføre at opsjonspremien for underliggende kontrakter som har lang tid til innløsning kun vil skille seg fra hverandre med nåverdien av tidsforskjellen. Verdien av en opsjon "at the money" på en forwardkontrakt for 2010 vil dermed være lik opsjonspremien på en forwardkontrakt for 2009 diskontert med $e^{-\frac{r\Delta t}{365}}$, der Δt er antall dager mellom de to innløsningsdatoene.

9.2 Egenskaper ved opsjonsmodell

For å teste at opsjonsmodellen inneholder fornuftige antakelser har det blitt gjort sensitivitetsanalyser på de ulike parametrene som inngår i formelverket. Dette har gitt følgende resultater for modellen

| Økning i parameter | Kjøpsopsjon c | Salgsopsjon p |
|---------------------|---------------|---------------|
| Tid til forfall T | + | + |
| Standardavik s | + | + |
| Innløsningspris X | - | + |
| Markedspris μ_F | + | - |
| Rente r | - | - |

Tabell 9.2 Egenskaper ved opsjonsmodellen

+ indikerer her at opsjonspremien øker ved en økning i den aktuelle parameteren. – betyr at opsjonspremien synker når parameteren øker. Dette stemmer overens med hva en skal forvente fra en opsjonsmodell [Brealey & Myers, 2000]. Utregningene er gitt i vedlegg 5.

9.3 Resultater av prising av opsjoner med forwardkontrakter som underliggende

Vi vil i dette kapittelet prise opsjoner på underliggende forwardkontrakter med vår modell og sammenligne dette med observerbare markedspriser på disse opsjonene. Dette gjøres for en del vilkårlige tidspunkt i perioden januar 2001 til mars 2002.

Markedsprisen for opsjonene er beregnet ved bruk av Black 76 med markedsprisen på underliggende forwardkontrakt og implisitt volatilitet som inputparametere. Alle opsjoner er

priset "at the money". Den implisitte volatiliteten har blitt levert av M3 Kraft/APX, mens prisen på forwardkontraktene har vært tilgjengelig gjennom Nord Pool.

Vi benytter altså at en kjøpsopsjon er gitt ved

$$c_t = \left(\frac{s}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{K - \mu_{F_T}}{s}\right)^2}{2}} + (\mu_{F_T} - K) \cdot N\left[\frac{\mu_{F_T} - K}{s}\right] \right) \cdot e^{-\frac{r(T-t)}{365}}$$

mens salgsopsjonen er gitt ved

$$p_t = \left(\frac{s}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{K - \mu_{F_T}}{s} \right]^2} + (K - \mu_{F_T}) \cdot N\left[\frac{K - \mu_{F_T}}{s}\right] \right) e^{-\frac{r(T-t)}{365}}$$

For opsjoner på kontrakter som handles i markedet må forventningen i formlene over erstattes med den observerbare markedsprisen for å ta hensyn til markedets virkelige forventningsverdi. For kontrakter som ikke handles i markedet vil forventningen beregnes vha (9.3), men s er gitt av (9.8) for begge alternativene.

En prising av opsjoner "at the money" for 05.03.2002 med parametere gitt i vedlegg 1 gir da følgende opsjonspremier

| Kontrakt | Markedspris undeliggende [NOK/MWh] | Implisitt vol Bid/ask | Standardavvik s | Vår Modell | Markedspris Bid | Markedspris Ask |
|----------------|------------------------------------|-----------------------|-----------------|------------|-----------------|-----------------|
| FWSO-02 | 120,25 | 33,75/35 | 3,77 | 1,49 | 5,57 | 5,78 |
| FWV2-02 | 157 | 25/27 | 0,99 | 0,38 | 11,09 | 11,97 |
| FWYR-03 | 152,75 | 20,25/21,3 | 0,08 | 0,03 | 10,37 | 10,91 |

Tabell 9.3 Beregning av opsjonspremie for 05.03.2002 med parametere gitt i vedlegg 1

Som en ser gir vår modell nesten ingen verdi på opsjonen. Dette skyldes at standardavviket s for den underliggende kontrakten er svært liten.

Lucia og Schwartz har i sin artikkel estimert parameterne i den deterministiske funksjonen og mean reversion parameteren i enfaktormodellene på grunnlag av historiske spotpriser i perioden 01.01.1993 til 31.12.1999. For tofaktormodellen må de velge en noe annerledes fremgangsmåte. Historiske spotdata i perioden 01.01.1993 til 14.12.1998 benyttes for å estimere parametrene i den deterministiske funksjonen. Deretter beregnes de resterende parametere implisitt på grunnlag av spot- og future./forwarddata for gitte datoer i perioden 14.12.1998 til 15.11.1999.

Lucia og Schwartz viser også at en tilsvarende metode kan benyttes for enfaktor modellen. Parameterne de da kommer fram til er vist i vedlegg 2. Lucia og Schwartz viser at denne

metoden gir også et mer korrekt estimat for forwardprisene sammenlignet med de opprinnelige parameterne som ble estimert direkte fra spotprisene. Den viktigste forskjellen mellom disse to estimatene for prising av en opsjon ligger i størrelsen på mean reversion hastigheten κ . Denne var 0,011 for metoden basert direkte på spotprisen og 0,0014 i den implisitte beregningen. Av uttrykket for variansen for kontraktprisen, gitt av (9.8), ser en at parameteren κ direkte påvirker størrelsen på variansen. En lavere κ gir en høyere varians. Benytter vi parametrene for enfaktormodellen gitt av den implisitte beregningsmetoden, ender vi opp med følgende opsjonspremier

| Kontrakt | Markedspris undeliggende [NOK/MWh] | Implisitt vol Bid/ask % | Standardavvik s | Vår Modell | Markedspris Bid | Markedspris Ask |
|----------|------------------------------------|-------------------------|-----------------|------------|-----------------|-----------------|
| FWSO-02 | 120,25 | 33,75/35 | 13,41 | 5,30 | 5,57 | 5,78 |
| FWV2-02 | 157,00 | 25/27 | 26,86 | 10,32 | 11,09 | 11,97 |
| FWYR-03 | 152,75 | 20,25/21,3 | 25,28 | 9,54 | 10,37 | 10,91 |

Tabell 9.4 Beregning av opsjonspremie for 05.03.2002 med parametre gitt i vedlegg 2

En ser at disse parametrene gir en langt bedre tilnærming til de opsjonspremiene man observerer i markedet for denne dagen. Vi tester de samme parametrene for en rekke andre dager. Resultatene av dette er gitt i tabell 9.5 til 9.8.

| Kontrakt | Markedspris undeliggende [NOK/MWh] | Implisitt vol Bid/ask % | Standardavvik s | Vår Modell | Markedspris Bid | Markedspris Ask |
|----------|------------------------------------|-------------------------|-----------------|------------|-----------------|-----------------|
| FWSO-01 | 104,65 | 27/29 | 19,98 | 7,81 | 5,95 | 6,39 |
| FWV2-01 | 144,00 | 18,5/20 | 29,73 | 11,28 | 8,54 | 9,23 |
| FWYR-02 | 136,98 | 13,4/13,9 | 26,89 | 10,03 | 6,76 | 6,96 |

Tabell 9.5 Beregning av opsjonspremie for 03.01.2001 med parametre gitt i vedlegg 2

| Kontrakt | Markedspris undeliggende [NOK/MWh] | Implisitt vol Bid/ask % | Standardavvik s | Vår Modell | Markedspris Bid | Markedspris Ask |
|----------|------------------------------------|-------------------------|-----------------|------------|-----------------|-----------------|
| FWSO-01 | 183 | 45/49 | 8,25 | 3,28 | 6,85 | 7,46 |
| FWV2-01 | 191,7 | 34,5/37 | 25,47 | 9,83 | 17,44 | 18,69 |
| FWV1-02 | 191,3 | 30,7/34 | 29,08 | 11,03 | 18,79 | 20,80 |
| FWYR-02 | 161 | 24/25,25 | 24,48 | 9,29 | 12,38 | 13,02 |

Tabell 9.6 Beregning av opsjonspremie for 03.04.2001 med parametre gitt i vedlegg 2

| Kontrakt | Markedspris undeliggende [NOK/MWh] | Implisitt vol Bid/ask % | Standardavvik s | Vår Modell | Markedspris Bid | Markedspris Ask |
|----------|------------------------------------|-------------------------|-----------------|------------|-----------------|-----------------|
| FWV1-02 | 181,25 | 29/31,5 | 13,45 | 5,32 | 7,05 | 7,66 |
| FWSO-02 | 147,50 | 31/32,5 | 23,72 | 9,17 | 11,73 | 12,29 |
| FWV2-02 | 174,25 | 26/30 | 31,48 | 11,82 | 15,77 | 18,18 |

Tabell 9.7 Beregning av opsjonspremie for 08.11.2001 med parametre gitt i vedlegg 2

| Kontrakt | Markedspris undeliggende [NOK/MWh] | Implisitt vol Bid/ask % | Standardavvik s | Vår Modell | Markeds- pris Bid | Markeds- pris Ask |
|----------------|--|-------------------------------|--------------------|---------------|-------------------------|-------------------------|
| FWSO-02 | 162,75 | 34/36 | 19,93 | 7,79 | 11,59 | 12,27 |
| FWV2-02 | 186,20 | 24,5/27,5 | 29,66 | 11,26 | 14,56 | 16,34 |
| FWYR-03 | 174,50 | 20/22 | 26,90 | 10,04 | 12,73 | 14,00 |

Tabell 9.8 Beregning av opsjonspremie for 03.01.2002 med parametere gitt i vedlegg 2

Av de fem ulike datoene som er sammenlignet over ser en at vår modell priser opsjonene utenfor markedets bid-ask spread. I fire av tilfellene er prisen lavere enn markedets kjøpsbud. Kun for 03.01.2001 gir vår modell høyere verdier enn markedsprisene. Man ser at den implisitte volatiliteten i markedet denne dagen er svært lav i forhold til hva en observerer for de andre datoene.

9.4 Monte Carlo simulering av generell opsjonsmodell

I den analytiske løsningen for opsjonsformelen med forwardkontrakter som underliggende har vi gjort en antakelse om at standardavviket for midtre dag i forwardens leveringsperiode kan benyttes som en approksimasjon på kontraktens virkelige standardavvik. Ved å foreta en Monte Carlo simulering der virkelig standardavvik fremkommer og sammenligne dette med den analytiske løsningen, får man et estimat på hvor unøyaktig antakelsen om å benytte den midtre dagen i leveringsperioden som standardavvik i analytisk løsning er for opsjonspremien.

Vi har tatt utgangspunkt i ulike kontrakter den 03.01.2002. Da Monte Carlo simuleringen beregner kontraktens forventede verdi og ikke tar hensyn til markedsprisen på kontrakten, er det nødvendig å benytte denne forventningsverdien i den analytiske løsningen. Dette medfører likevel ikke at opsjonspremiene endres, da en i begge tilfeller lar opsjonen bli handlet "at the money" og s er lik i begge tilfeller.

En sammenligning mellom den analytiske modellen og 10000 simuleringer blir da:

| Kontrakt | Dato | Vår Modell | Simulering (M=10000) |
|----------------|-------------------|--------------|-------------------------|
| FWSO-02 | 03.01.2002 | 7,79 | 7,73 |
| FWV2-02 | 03.01.2002 | 11,26 | 11,20 |
| FWYR-03 | 03.01.2002 | 10,04 | 9,99 |

Tabell 9.9 En sammenligning mellom analytisk løsning og simulering for generell modell

Vi ser at det analytiske uttrykket ved bruk av standardavvik tilhørende midten av kontraktperioden gir tilfredsstillende verdier sammenlignet med simuleringsverdiene. Dette indikerer at antakelsen som er gjort tidligere om å benytte standardavviket for den midtre dagen i leveringsperioden er fornuftig.

10 Evaluering av opsjonsmodellen

Opsjonsmodellen som er utviklet i denne oppgaven baserer seg på en underliggende prisprosess som består av to deler. Et sesongvarierende deterministisk ledd og en stokastisk mean-reversion prosess. Dette er to av de viktigste egenskapene som vi har drøftet for prisene i kraftmarkedet. To andre egenskaper som er drøftet er stokastisk volatilitet og sprang i prisene. Opsjonsmodellen utviklet i denne oppgaven tar ikke hensyn til disse to karakteristikene. Sprang i prisene, eller hoppprosesser, er med på å gi fordelingen til strømprisene tykkere haler enn man har i normalfordelingen, som vår modell baserer seg på.

Vår modell har altså lavere sannsynlighet for ekstreme priser enn hva som faktisk observeres i markedet. Slike ekstreme hendelser vil være med på å øke verdien av opsjonene. I en sammenligning mellom vår modell og markedsprisene så en at vår modell i flesteparten av tilfellene priset opsjonen lavere enn kjøpsiden i markedet. Dette er konsistent med at vår modell ikke i samme grad tar hensyn til at ekstreme priser kan opptre.

Modellen som er utviklet i denne oppgaven har vist seg å være svært følsom for verdien på mean reversion parameteren κ . Vi benyttet en implisitt størrelse på κ beregnet på grunnlag av forward- og spotpriser ved ulike datoer i perioden 14.12.1998 til 15.11.1999 og benyttet dette til å prise opsjoner i perioden januar 2001 til mars 2002. Ideelt sett burde disse parameterne vært beregnet på nyere data før en priset opsjonene. Det kan være fornuftig å anta at disse vil gi et mer riktig bilde når vi får flere historiske år å estimere over. Spesielt viktig er dette med tanke på den sensitiviteten vi har vist at modellen har overfor κ . Dette vil også kunne gi utslag på parameterne i den deterministiske funksjonen.

Markedet benytter i stor grad Black 76 for å prise opsjoner. Eneste inputparameter som da skal bestemmes er volatiliteten σ . De andre observeres i markedet. For Black 76 metoden har en at bruk av historisk volatilitet ikke gir priser i samsvar med markedsprisene på opsjonen. I stedet må en benytte en implisitt volatilitet. Vår opsjonsmodell lar en benytte historiske data og kan dermed enklere benyttes dersom man på grunn av lav omsetning av opsjonene ikke har nye data å beregne implisitt volatilitet fra eller dersom data med implisitt volatilitet ikke er tilgjengelig.

I kraftmarkedet benyttes volatilitetssmil for å ta hensyn til tykkere haler i fordelingen enn det lognormalfordelingen, som Black 76 bygger på, indikerer. Vi har ikke tatt stilling til hvordan en slik korleksjon bør gjøres i vår modell, da vi kun har priset opsjoner med innløsningspris lik underliggendes markedspris.

Den generelle underliggende modellen for forwardprisene kan benyttes til å prise andre forwardkontrakter enn de som finnes i det nordiske kraftmarkedet. En kan for eksempel benytte den til å prise månedskontrakter og kontrakter på kvartaler. Slike kontrakter handles blant annet ved European Energy Exchange (EEX) i Tyskland. For en tysk aktør vil det kunne være interessant å handle en slik kontrakt eller en opsjon på denne i det nordiske OTC markedet.

I kapittel 4.3 beskriver vi hvordan forwardmarkedet har vist en økende tendens. Lucia & Schwartz (2002) oppgir at future- og forwardmarkedet antyder en økende pristrend selv om man ikke ser en slik trend for spotprisen. De forklarer også at en tidsvarierende markedspris på risiko kan være en alternativ forklaring på dette fenomenet. Dette kan modelleres ved å

legge inn et driftsledd i den deterministiske delen av forwardprisen gitt ved (8.11). Eventuelt kan en benytte en tidsvarierende markedspris på risiko, λ , i modellen.

Eventuell videre testing av modellen bør knyttes opp mot bruk av volatilitetssmil for å ta hensyn til tykkere haler i fordelingen. Dessuten bør parameterne i modellen estimeres på grunnlag av nyere historiske data en hva som er benyttet her. Eventuell bruk av tidsvarierende volatilitet kan også undersøkes.

11 Referanseliste

Bessembinder, H., Coughenour, J.F., Seguin, P.J., Smoller, M.M. (1995), "Mean Reversion in Equilibrium Asset Prices: Evidence from the Futures Term Structure", *The Journal of Finance*, march 1995, vol 50, Issue 1, p. 361-375

Bjerksund, P., Rasmussen, H., Stensland, G. (2000), "Valuation and Risk Management in the Norwegian Electricity Market", Discussion Paper 20/2000, Norwegian School of Economics and Business Administration

Botterud, A., Bhattacharyya, A. K., Ilic, M. (2002), "Futures and spot prices – an analysis of the Scandinavian electricity market", North American Power Symposium (NAPS 2002), Tempe, USA

Black, F., Scholes, M. (1973), "The pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, 1973, Volume 81, Issue 3, p. 673-654

Black, F. (1976), "The pricing of Commodity Contracts", *Journal of Financial Economics*, 1976, Issue 3, p. 167-179

Bodily, S., Del Bueano, M. (2002), "Risk and reward at the speed of light: a new electricity price model", *Energy Power Risk Management*, September 2002, p 66-71

Brealey, R.A., Myers, S.C. (2000), "Principles of Corporate Finance"
6. utgave, McGrawHill, New York, USA

Clelow, L., Strickland, C. (2000), "Energy Derivatives: Pricing and Risk Management", Lacima Publications, London, England

Clelow, L., Strickland, C. (1998), "Implementing derivatives Models"
John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, England

Fleten, S. E., Lemming, J. (2001), "Constructing Forward Price Curves in Electricity Markets", Working Paper, Risø National Laboratory, Denmark

Fleten, S. E., Wallace, S.W., Ziemba, W.T. (2002), "Hedging Electricity Portfolios via Stochastic Programming", *Decision Making Under Uncertainty: Energy and Power*, p 71-93

Haug, E. G. (1999), "Opsjoner på elkraft", *Derivatet* nr 11 1999

Haug, E. G. (1997), "The Complete Guide to Option Pricing Formulas", McGrawhill, New York, USA

Hull, J. C. (2000), "Options, Futures & Other Derivatives", 4th ed., Prentice Hall International, Inc., Upper Saddle River, NJ

Johnsen, T. A., Verma, S. K., Wolfram, C. (1999), "Zonal Pricing and demand-side bidding in the Norwegian electricity market", PWP-063, POWER, Working Paper University of California Energy Institute

Koekebakker, S. (1996), "Valuation of Asian options and commodity contingent claims", doktoravhandling, NHH, Bergen

Koekebakker, S., Ollmar, F. (2001), "Forward curve dynamics in the Nordic electricity market", Agder University College & Norwegian School of Economics and Business Administration

Knittel, C. R. & Roberts, M. (2000), "Financial Models of Deregulated Electricity Prices I: Discrete Time Models", Work in Progress, Department of Finance and Economics, Boston University and University of California Energy Institute

Knittel, C.R., Roberts M. (2001), "An Empirical Examination of Deregulated Electricity Prices", PWP-087, Power, University of California Energy Institute

Nord Pool, 1999: Press release nr. 10

Nord Pool, 1998: Elbørsen nr 1 1998

Nord Pool 2000: Elspot

Nord Pool, 2001: Elbørsen nr 1, Mai 2001

Nord Pool, 2002: "Annual Report 2001"

Nord Pool, 2001 b: "Trading in Contracts for Difference"

NOU 1998: 11, "Energi- og kraftbalansen mot 2020"

Pilipovic, D (1998), "Energy Risk, Valuing and Managing Energy Derivatives", McGraw-Hill, New York, USA

Schwartz E.S. (1997), "The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging", The Journal of Finance, July 1997, vol 52, Issue 3, p. 923-973

Schwartz E. S., Smith J. E, 2000: "Short Term Variations and Long-Term Dynamics", Management Science, Vol 46, No 7

Wilmott, P. (1998), "Derivatives, The theory and practice of financial engineering", John Wiley & Sons, USA

Hvarnes, H. , Elkem Energi, 2002: Mail til Kristian Solum 01.11.2002

Brevik, E., M3Kraft/APX, 2002: Mailkorrespondanse

Schwartz, E. 2002: Mail til Roald Maudal 07.11.2002

Hjemmesider:

www.M3Kraft.no

www.NordPool.no

www.lpx.de

www.apx.nl

Vedlegg 1: Parametere for Lucia og Schwartz' enfaktormodell

Parametere beregnet av Lucia og Schwartz (2002).

Modell 1:

$$f_1(t) = \alpha + \beta D_t + \sum_{i=2}^{12} \beta_i M_{it}$$

| Parameter | Estimert verdi |
|--------------|----------------|
| α | 153,051 |
| β | -9,514 |
| β_2 | -2,2527 |
| β_3 | -4,511 |
| β_4 | -3,3484 |
| β_5 | -13,248 |
| β_6 | -12,656 |
| β_7 | -7,038 |
| β_8 | -8,109 |
| β_9 | -10,061 |
| β_{10} | -9,597 |
| β_{11} | -7,034 |
| β_{12} | -6,019 |
| σ | 1,89 |
| κ | 0,010 |

Modell 2:

$$f_2(t) = \alpha + \beta D_t + \gamma \cos\left((t + \tau) \frac{2\pi}{365}\right)$$

| Parameter | Estimert verdi |
|-----------|----------------|
| α | 145,732 |
| β | -9,542 |
| γ | 29,735 |
| τ | 6,691 |
| σ | 1,89 |
| κ | 0,011 |

τ er gitt i dager og σ er gitt som annualisert volatilitet [e-post fra Schwartz, 2002]

Vedlegg 2: Implisitte parametere for Lucia og Schwartz' enfaktormodell

Parametere beregnet av Lucia og Schwartz (2002) på grunnlag av implisitt metode

$$f_2(t) = \alpha + \beta D_t + \gamma \cos\left(\left(t + \tau\right) \frac{2\pi}{365}\right)$$

| Parameter | Estimert verdi |
|------------|----------------|
| α | 151,08 |
| β | -10,24 |
| γ | 30,24 |
| τ | 3,96 |
| κ | 0,0014 |
| α^* | 9,57 |
| σ | 2,36 |

Vedlegg 3: Utledning av analytisk løsning for kjøpsopsjon

Verdien av en kjøpsopsjon ved forfall T er gitt ved

$$c_T = \max\{0, F_T - K\} = \int_K^{\infty} (F_T - K) g(F_T) dF_T \quad (9.10)$$

Der K er innløsningsprisen og $g(F_T)$ er sannsynlighetstettheten til den normalfordelte variabelen F_T . Denne sannsynlighetstettheten er gitt ved

$$g(F_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{F_T - \mu_{F_T}}{s} \right]^2} \quad (9.11)$$

Deler opp uttrykket i (9.10) og får

$$\begin{aligned} & \int_K^{\infty} F_T g(F_T) dF_T - K \int_K^{\infty} dF_T \\ &= \int_K^{\infty} F_T \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{F_T - \mu_{F_T}}{s} \right]^2} dF_T - K \int_K^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{F_T - \mu_{F_T}}{s} \right]^2} dF_T \end{aligned} \quad (9.12)$$

Definerer en standard normalfordelt variabel Q gitt ved

$$Q = \frac{F_T - \mu_{F_T}}{s}$$

Dette gir

$$dF_T = s dQ$$

Første integral i (9.12) gir da

$$\begin{aligned} & \int_{(K - \mu_{F_T})/s}^{\infty} (Qs + \mu_{F_T}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} Q^2} dQ \\ &= \int_{(K - \mu_{F_T})/s}^{\infty} sQ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} Q^2} dQ + \mu_{F_T} \int_{(K - \mu_{F_T})/s}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} Q^2} dQ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{Q^2}{2}} \right]_{(K-\mu_{F_T})/s}^{\infty} + \mu_{F_T} \left[1 - N\left(\frac{K-\mu_{F_T}}{s}\right) \right] \\
&= \frac{s}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{K-\mu_{F_T}}{s}\right)^2}{2}} + \mu_{F_T} \cdot N\left[\frac{\mu_{F_T} - K}{s}\right]
\end{aligned} \tag{9.13}$$

Der $N(Q)$ er den kumulative sannsynligheten til Q .

Andre integral i (9.12) gir

$$K \int_{\frac{K-\mu_{F_T}}{s}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Q^2} dQ = K \cdot \left[1 - N\left[\frac{K-\mu_{F_T}}{s}\right] \right] = K \cdot N\left[\frac{\mu_{F_T} - K}{s}\right] \tag{9.14}$$

Dette gir at verdien av opsjonen ved forfall T er gitt ved

$$c_T = \frac{s}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{K-\mu_{F_T}}{s}\right)^2}{2}} + \mu_{F_T} \cdot N\left[\frac{\mu_{F_T} - K}{s}\right] - K \cdot N\left[\frac{\mu_{F_T} - K}{s}\right] \tag{9.15}$$

Verdien ved beregningstidspunkt t er gitt som den diskonterte verdien av c_T . Denne er dermed gitt ved:

$$c_t = c_T e^{-\frac{r(T-t)}{365}} = \left(\frac{s}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{K-\mu_{F_T}}{s}\right)^2}{2}} + (\mu_{F_T} - K) \cdot N\left[\frac{\mu_{F_T} - K}{s}\right] \right) \cdot e^{-\frac{r(T-t)}{365}} \tag{9.16}$$

Der r er den kontinuerlige risikofrie renten.

Vedlegg 4: Utledning av analytisk løsning for salgsopsjon

Vi benytter samme notasjon som under utledning av kjøpsopsjonen. Dette gir da at verdien av opsjonen ved dens forfall er gitt ved

$$c_T = \max\{0, K - F_T\} = \int_{-\infty}^K (K - F_T) g(F_T) dF_T \quad (2.1)$$

Der $g(F_T)$ er sannsynlighetstettheten til den normalfordelte variabelen F_T . Deler opp integralet og får

$$K \int_{-\infty}^K dF_T - \int_{-\infty}^K F_T g(F_T) dF_T \quad (2.2)$$

$$= K \int_{-\infty}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(F_T - \mu_{F_T})}{s}\right]^2} dF_T - \int_{-\infty}^K F_T \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(F_T - \mu_{F_T})}{s}\right]^2} dF_T \quad (2.3)$$

Definerer en standard normalfordelt variabel Q gitt ved

$$Q = \frac{F_T - \mu_{F_T}}{s}$$

Dette gir at

$$dF_T = s dQ$$

Første integral i (2.3) gir dermed

$$K \int_{-\infty}^{\frac{K - \mu_{F_T}}{s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Q^2} dQ = K \cdot N\left[\frac{K - \mu_{F_T}}{s}\right] \quad (2.4)$$

Det siste integralet i (2.3) gir nå

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{(K - \mu_{F_T})/s} (Qs + \mu_{F_T}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Q^2} dQ \\ &= \int_{-\infty}^{(K - \mu_{F_T})/s} sQ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Q^2} dQ + \mu_{F_T} \int_{-\infty}^{(K - \mu_{F_T})/s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Q^2} dQ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{\frac{-Q^2}{2}} \right]_{-\infty}^{(K-\mu_{F_T})/s} + \mu_{F_T} \cdot N \left[\frac{K-\mu_{F_T}}{s} \right] \\
&= -\frac{s}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{K-\mu_{F_T}}{s} \right]^2} + \mu_{F_T} \cdot N \left[\frac{K-\mu_{F_T}}{s} \right] \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Verdien av opsjonen ved dens forfall T er dermed gitt ved

$$p_T = K \cdot N \left[\frac{K-\mu_{F_T}}{s} \right] + \frac{s}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{K-\mu_{F_T}}{s} \right]^2} - \mu_{F_T} \cdot N \left[\frac{K-\mu_{F_T}}{s} \right] \tag{2.6}$$

Diskonterer denne verdien tilbake til beregningstidspunkt t og rydder opp i uttrykket

$$p_t = \left(\frac{s}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{K-\mu_{F_T}}{s} \right]^2} + (K - \mu_{F_T}) \cdot N \left[\frac{K-\mu_{F_T}}{s} \right] \right) e^{-\frac{r(T-t)}{365}} \tag{2.7}$$

Vedlegg 5: Sensitivitetsanalyse for parametere

Sensitivitetsanalysene i dette vedlegget undersøker endringer i opsjonsverdi verdi som følge av endringer i en variabel gitt at alle andre variable holdes konstant. Når variablene holdes konstant brukes følgende verdier

| | |
|--|--|
| Beregningsdag, t : | 63 |
| Spotpris: | 153,54 |
| Forfallsdag opsjon, T : | 200 |
| Forfallsdag forward (dagkontrakt), T_F : | 273 |
| Innløsningspris for opsjon, K : | 150 |
| Volatilitet, σ : | 1,89 (standardavvik, $s=5,5664790870515$) |
| Markedspris forward, μ_F : | 151,78 |

Sensitivitet med hensyn på tid for opsjonens forfall, T

| T | Verdi Call | Verdi Put |
|-----|------------|-----------|
| 100 | 1,83 | 0,07 |
| 150 | 2,26 | 0,52 |
| 175 | 2,63 | 0,89 |
| 200 | 3,13 | 1,40 |
| 250 | 4,67 | 2,97 |
| 273 | 5,73 | 4,03 |

Sensitivitet med hensyn på volatilitet, σ / standardavvik, s

| σ | Verdi Call | Verdi Put |
|----------|------------|-----------|
| 1,50 | 2,71 | 0,98 |
| 1,70 | 2,92 | 1,20 |
| 1,89 | 3,13 | 1,40 |
| 2,00 | 3,25 | 1,52 |
| 2,10 | 3,35 | 1,63 |
| 2,20 | 3,46 | 1,74 |
| 2,30 | 3,57 | 1,85 |

Sensitivitet med hensyn på innløsningspris, K

| Strike | Verdi Call | Verdi Put |
|--------|------------|-----------|
| 100,00 | 50,24 | 0,00 |
| 125,00 | 25,98 | 0,00 |
| 145,69 | 6,28 | 0,38 |
| 150,00 | 3,13 | 1,40 |
| 175,00 | 0,00 | 22,54 |
| 200,00 | 0,00 | 46,80 |

Sensitivitet med hensyn på markedspris forward, μ_F

| μ_F | Verdi Call | Verdi Put |
|---------|------------|-----------|
| 100 | 0,00 | 48,52 |
| 125 | 0,00 | 24,26 |
| 150 | 2,16 | 2,16 |
| 151,78 | 3,13 | 1,40 |
| 175 | 24,26 | 0,00 |
| 200 | 48,52 | 0,00 |

Vedlegg 6: Sammenheng risikonøytral og ikke risikonøytral modell for diskret X_t

Ikke risiko-nøytral modell:

$$dX_t = -\kappa X_t + \sigma dZ$$

$$\Delta X_t = -\kappa X_t + \sigma dZ$$

$$X_{t+1} = X_t + \Delta X_t$$

$$X_{t+1} = X_t - \kappa X_t + \sigma dZ$$

$$X_{t+1} = X_t(1 - \kappa) + \sigma dZ$$

$$X_t = X_{t-1}(1 - \kappa) + \sigma dZ$$

Risiko-nøytral modell:

$$dX_t = \kappa(\alpha^* - X_t)dt + \sigma dZ^*$$

$$\Delta X_t = \kappa(\alpha^* - X_t)\Delta t + \sigma dZ^*$$

$$X_{t+1} = X_t + \Delta X_t$$

$$X_{t+1} = X_t + \kappa(\alpha^* - X_t) + \sigma dZ$$

$$X_{t+1} = X_t(1 - \kappa) + \kappa\alpha^* + dZ^*$$

$$\alpha^* = \frac{-\lambda\sigma}{\kappa}$$

$$X_t = X_{t-1}(1 - \kappa) - \lambda\sigma + \sigma dZ^*$$

Vi har

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

Dette gir følgende uttrykk for den risikofrie rente:

$$r = \mu - \lambda\sigma$$

Ved å sammenligne uttrykkene for X_t for det ikke risikonøytrale og det risikonøytrale tilfellet, ser en at forventningen til X_t korrigeres med leddet $\lambda\sigma$ ved overgangen til det risikonøytrale tilfellet. Dette er samme metode som man ser er brukt i tilfellet for risikofri rente og forventet avkastning.

Vedlegg 7: VBA kode for opsjonsmodell og simuleringer

Option Explicit

'The code in this module is not optimized to handle errors

Public Function weekend(dato As Date) As Double

' function that returns the dummy variable for a given date

```

If Application.Weekday(dato, 2) = 6 Then
    weekend = 1
ElseIf Application.Weekday(dato, 2) = 7 Then
    weekend = 1
Else
    weekend = 0
End If

```

End Function

Public Function Deterministic(tid As Integer, dato As Date) As Double

'function for the deterministic part of the price formula

Dim alfa As Double, beta As Double, gamma As Double, tau As Double, pi As Double

'initializing constants

alfa = 151.08

beta = -10.24

gamma = 30.27

tau = 3.96

pi = Application.pi()

Deterministic = alfa + beta * weekend(dato) + gamma * Cos((tid + tau) * 2 * pi / 365)

End Function

Public Function OptionContractSimulation(callputflag As String, Pt As Double, r As Double, _
Strike As Double, time As Integer, dato As Date, TimeOption As Integer, _
TfStart As Integer, TfEnd As Integer, nSim As Integer, sigma As Double) As Double

'Monte Carlo simulation of the option

Dim Z As Integer, nSteps As Integer, i As Integer, j As Integer

Dim Xt As Double, Epsilon As Double, PtimeOption As Double, Forward As Double

Dim Verdi As Double, forwardpris As Double

Dim ImpliedLambda As Double, Kappa As Double

Dim AlfaStar As Double

'Initializing constants

Kappa = 0.0014

ImpliedLambda = -0.005677

AlfaStar = -ImpliedLambda * sigma / (Kappa)

Verdi = 0

Application.ScreenUpdating = False

```

If callputflag = "c" Then
    Z = 1
ElseIf callputflag = "p" Then
    Z = -1
End If

```

nSteps = TimeOption - time 'Simulates for number of days until expiration

```

For i = 1 To nSim

    Xt = Pt - Deterministic(time, dato) 'Determines the startvalue of Xt

    For j = 1 To nSteps
        Epsilon = Application.NormInv(Rnd(), 0, 1)
        Xt = Xt * (1 - Kappa) + sigma * Epsilon
    Next

    PtimeOption = Deterministic(TimeOption, dato + (TimeOption - time)) + Xt

    Forward = ForwardAvg(PtimeOption, TimeOption, dato + (TimeOption - time), TfStart, TfEnd, sigma)

    Verdi = Verdi + Application.Max(Z * (Forward - Strike), 0)

Next

OptionContractSimulation = (Verdi / nSim) * Exp(-r * (TimeOption - time) / 365)

End Function

Function ForwardAvg(Pt As Double, time As Integer, dato As Date, TfStart As Integer, _
    TfEnd As Integer, sigma As Double) As Double

    'Function that computes the average value over a contract period

    Dim NumDays As Integer
    Dim Forward As Double
    Dim i As Integer
    Dim ImpliedLambda As Double, Kappa As Double
    Dim AlfaStar As Double, Xt As Double

    'Initializing constans
    Kappa = 0.0014
    ImpliedLambda = -0.005677
    AlfaStar = -ImpliedLambda * sigma / (Kappa)
    Forward = 0
    NumDays = TfEnd - TfStart + 1
    Xt = Pt - Deterministic(time, dato)
    For i = TfStart To TfEnd

        Forward = Forward + Deterministic(i, dato + (i - time)) + Xt * Exp(-Kappa * (i - time)) _
            + AlfaStar * (1 - Exp(-Kappa * (i - time)))

    Next

    ForwardAvg = Forward / NumDays

End Function

Public Function Svar(sigma As Double, time As Integer, TimeOption As Integer, TSigma As Integer) As Double

    'Estimates the variance of the forward contract, by calculating variance for day TSigma

    Dim Kappa As Double
    Kappa = 0.0014

    Svar = (sigma ^ 2 / (2 * Kappa)) * (Exp(-2 * Kappa * (TSigma - TimeOption)) - Exp(-2 * Kappa * (TSigma - time)))

End Function

```

```
Public Function OptionContract(callputflag As String, Pt As Double, Strike As Double, time As Integer, dato As Date, _
    TimeOption As Integer, TfStart As Integer, TfEnd As Integer, sigma As Double, _
    rente As Double) As Double
```

'Function that calculates the option premium as given by the analytical expression
 'This function is to be used when market price for underlying forward is not available

```
Dim TSigma As Integer
Dim AvgForward As Double
Dim StdDev As Double
Dim pi As Double
Dim a As Double
Dim b As Double
Dim temp1 As Double
```

```
pi = Application.pi()
```

```
TSigma = TfStart + ((TfEnd - TfStart) / 2)
```

```
AvgForward = ForwardAvg(Pt, time, dato, TfStart, TfEnd, sigma)
```

```
temp1 = Svar(sigma, time, TimeOption, TSigma)
```

```
StdDev = Sqr(temp1)
```

```
a = (Strike - AvgForward) / StdDev
```

```
If callputflag = "c" Then
```

```
b = (AvgForward - Strike) / StdDev
```

```
OptionContract = ((StdDev / (Sqr(2 * pi))) * Exp(-a ^ 2 / 2) + (AvgForward - Strike) * Application.NormSDist(b)) *
Exp(-rente * (TimeOption - time) / 365)
```

```
ElseIf callputflag = "p" Then
```

```
OptionContract = ((StdDev / (Sqr(2 * pi))) * Exp(-a ^ 2 / 2) + (Strike - AvgForward) * Application.NormSDist(a)) *
Exp(-rente * (TimeOption - time) / 365)
```

```
End If
```

```
End Function
```

```
Public Function MarketPriceOption(callputflag As String, Strike As Double, MarketPrice As Double, StdDev As Double,
    time As Double, TimeOption As Double, r As Double) As Double
```

'Function that calculates the option premium as given by the analytical expression
 'This function is to be used when the market price for underlying forward is available

```
Dim a As Double
```

```
Dim b As Double
```

```
a = 0
```

```
b = 0
```

```
a = 0.5 * ((Strike - MarketPrice) / StdDev) ^ 2
```

```
If callputflag = "c" Then
```

```
b = (MarketPrice - Strike) / StdDev
```

```
MarketPriceOption = (StdDev / (Sqr(2 * Application.pi()))) * Exp(-a) + (MarketPrice - Strike) * Application.NormSDist(b) *
Exp(-r * (TimeOption - time) / 365)
```

```
Else
```

```
b = (Strike - MarketPrice) / StdDev
```

```
MarketPriceOption = (StdDev / (Sqr(2 * Application.pi()))) * Exp(-a) + (Strike - MarketPrice) * Application.NormSDist(b) *
Exp(-r * (TimeOption - time) / 365)
```

```
End If
```

```
End Function
```