

Forord

Denne rapporten er skrevet ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, høsten 2005, i forbindelse med fordypningsemnet TIØ4700 Investering, finans og økonomistyring ved Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse.

Vi vil rette en stor takk til Stein-Erik Fleten for god veiledning og verdifulle innspill gjennom hele semesteret. Takk til Håvard Hvarnes ved Elkem Energi AS for nyttige diskusjoner, tilgang til data og for initiativet til prosjektet. Vi ønsker også å takke Martin Nowak ved Sintef teknologi og samfunn for diskusjon rundt den grunnleggende problemstillingen. Anders Gjelsvik ved Sintef energiforskning fortjener en takk for å gi oss bedre innsikt i eksisterende metoder og innfallsvinkler. Sist vil vi også takke Olav Fosso ved Institutt for elkraftteknikk, NTNU, for meget relevante forelesninger og informasjon om eksisterende analyseapparat.

Trondheim, 17. desember 2005

Martin Geving Pedersen

Marcus Navjord Winnem

Sammendrag

Vannkraftprodusentens hovedutfordring er å tilstrebe optimal forvaltning av vannet i magasiner. Stor usikkerhet i framtidig strømpris og tilsig kompliserer beslutningsprosessen. Denne rapporten vedrører hvordan finasteori kan anvendes for å analysere og løse produksjonsplanleggingsproblemet.

I et finansielt perspektiv kan et vannkraftverk betraktes som et komplekst derivat på strømpris og tilsig. Magasinet gir vannkraftprodusenten en opsjon på å velge mellom å produsere umiddelbart og å spare vannet i magasinet. Denne opsjonen er av amerikansk karakter. Andre forhold som kompliserer er at vannverdien, som kan tolkes som innløsningskurs, er en stokastisk funksjon av pris, tilsig og magasinnivå.

Etter dereguleringen av det norske kraftmarkedet i 1991 har norske vannkraftprodusenter vært nødt til å forholde seg til en svært volatil strømpris. Som handelsvare er strøm spesiell, siden lagringsmulighetene er svært begrensede. Standard arbitrasjeargumenter kan derfor ikke brukes for å prise framtidige leveranser. I 1993 ble den fellesnordiske kraftbørsen Nord Pool ASA etablert og i ettertid har det utviklet seg et relativt likvid marked for ulike kontrakter. Spotprisen utviser imidlertid av fundamentale grunner fortsatt spesielle egenskaper som mange og høye spisser, sesongavhengighet og mean reversion (Lucia og Schwartz, 2002). Lucia og Schwartz (2002) påviser også tunge haler og positiv skjevhet i fordelingen for avkastningen til spotprisen. For å maksimere markedsverdien bør produsenten til tross for dette utnytte tilgjengelig informasjon i terminmarkedet under produksjonsplanleggingen.

I rapporten presenteres en deterministisk og en stokastisk optimeringsformulering for produksjonsplanleggingsproblemet. Modellene gjelder for et system begrenset til ett magasin og én stasjon. Det antas også at produsenten er pristaker og at målet for planleggingen er å maksimere markedsverdien av produksjonen. For den stokastiske formuleringen foreslår vi en algoritme basert på Least Square Monte Carlo simulering (Longstaff og Schwartz, 2001).

Den deterministiske formuleringen er blitt implementert som et lineært program i Matlab[®]. Prisbeskrivelsen som er brukt er basert på Ornstein-Uhlenbeck-prosessen, og er kalibrert til terminstrukturen for future- og forwardkontrakter. Ved å kjøre modellen for mange ulike scenarier for pris og tilsig finner vi en øvre grense for verdien av produksjonen og et forløp for optimal forventet produksjonsstrategi og magasinforvaltning.

Resultatene for optimal forventet produksjon utviser fornuftige sesongmessige variasjoner. Imidlertid blir, som en følge av at pris og tilsig er deterministisk kjent, restriksjonene ofte utnyttet helt til grensene. Et fastsatt sluttvolum innebærer også at variansen til magasinnivået over scenariene blir kunstig lavt mot slutten. Som en følge av at produksjonsfunksjonen er redusert til produktet av en konstant og vannstrømmen, blir det også introdusert bias mot for lave magasinnivåer i løsningen.

En deterministisk modell basert på scenarionoptimering kan være et nyttig redskap for å illustrere dynamikken i problemet og for å finne en øvre grense for verdien av produksjonen. Løsningen utnytter imidlertid grensene for godt. For å finne en mer realistisk produksjonsstrategi bør en stokastisk modell benyttes. Den foreslåtte LSM-algoritmen tar høyde for dette.

Innholdsfortegnelse

FORORD	I
SAMMENDRAG	II
INNHALDSFORTEGNELSE	III
1 INNLEDNING	1
2 PRODUKSJONSPLANLEGGINGSPROBLEMET	2
2.1 VANNVERDIKRITERIET	2
2.2 KLASSISK PLANLEGGINGSHIERARKI	4
2.2.1 Langtidsplanlegging.....	5
2.2.2 Sesongplanlegging	5
2.2.3 Korttidsplanlegging.....	5
2.2.4 Koblinger mellom de ulike nivåene i planleggingshierarkiet.....	5
2.2.5 Analysehorisont og reguleringsgrad	6
2.2.6 Kommersielle løsninger for produksjonsplanlegging.....	6
3 PRODUKSJONSPLANLEGGING I ET FINANSIELT PERSPEKTIV	7
3.1 ANTAGELSER.....	7
3.1.1 Vannmagasinet som opphav til merverdi	7
3.1.2 Vannkraft som spread opsjon	8
4 KRAFTMARKEDET	10
4.1 DET FYSISKE MARKEDET	10
4.2 DET FINANSIELLE MARKEDET	11
4.3 SAMMENHENG MELLOM SPOT OG FORWARDPRIS	12
4.4 STRØMPRISENS OPPFØRSEL	12
4.4.1 Sprang i pris.....	12
4.4.2 Mean reversion.....	13
4.4.3 Tunge haler i prisfordelingen.....	13
4.4.4 Sesongavhengighet.....	14
5 HEDGING AV KRAFTPRODUKSJON	15
5.1 IKKE-KOMPLETT MARKED	15
5.2 MARKEDSPRIS PÅ TILSIGSRISIKO	16
5.3 POTENSIELLE HEDGEPRODUKTER OG FORVENTEDE POSISJONER.....	17
6 MODELLER	18
6.1 STOKASTISKE MODELLER	18
6.1.1 Prismodell	18
6.1.2 Tilsigsmodell	19
6.2 SYSTEMBESKRIVELSE.....	20
6.2.1 Produksjonsfunksjonen.....	20
6.3 RESTRIKSJONER I SYSTEMET	21
6.4 DETERMINISTISK OPTIMERINGSMODELL.....	23
6.4.1 Anvendelser av modellen.....	24
6.5 STOKASTISK OPTIMERINGSMODELL.....	25
7 LØSNINGSMETODER	26
7.1 PRISING AV AMERIKANSKE OPSJONER VED SIMULERING	26
7.1.1 Least Square Monte Carlo	26
7.1.2 LSM-algoritmen	26
7.2 LSM-ALGORITME FOR PRODUKSJONSPLANLEGGINGSPROBLEMET.....	28
7.2.1 Forklaring av LSM-algoritme	30
7.2.2 Verdi av sluttmagasin ved analysehorisonten	31

8	IMPLEMENTERING AV DEN DETERMINISTISKE MODELLEN.....	32
8.1	KALIBRERING AV PRISMODELL.....	32
8.2	SIMULERING AV PRIS OG TILSIG.....	33
8.3	LINEARISERING AV PRODUKSJONSFUNKSJONEN	33
8.4	DISKONTERINGSFAKTOR	33
9	PRESENTASJON AV RESULTATER OG DISKUSJON.....	34
9.1	INNVIRKNING AV FORENKLING AV PRODUKSJONSFUNKSJONEN	34
9.2	VERDIEN AV PRODUKSJONEN	34
9.3	SENSITIVITET.....	35
9.4	FORVENTET PRODUKSJONSSTRATEGI	35
9.5	FORVENTEDE KONTANTSTRØMMER.....	37
9.6	FORBEDRINGSPOTENSIALE MED EN STOKASTISK OPTIMERINGSMODELLE.....	37
9.7	ANBEFALINGER TIL VIDERE ARBEID	38
10	KONKLUSJON.....	39
11	REFERANSER.....	40

1 Innledning

Etter dereguleringen av det nordiske kraftmarkedet er situasjonen for norske vannkraftprodusenter betraktelig endret. Omstillingen har medført at aktørene må ta hensyn til et komplisert og volatilt marked under planleggingen av produksjonen. Hensikten med dette prosjektet har vært å gi forfatterne innsikt i ulike aspekter og aktuelle løsningsmetoder forbundet med produksjonsplanlegging av vannkraft i dagens situasjon.

Både framtidig pris og tilsig er forbundet med høy grad av usikkerhet. Generelt er modellene som brukes for produksjonsplanlegging likevel basert på deterministiske formuleringer. Dette skyldes at stokastiske optimeringsmodeller er mer krevende å løse. Kommersialiserte modeller for produksjonsplanlegging, som Samkjøringsmodellen og Vansimtap, baserer seg videre på fundamentalmodeller for å beskrive utviklingen til strømprisen. Det kan imidlertid argumenteres for at målet bør være å maksimere markedsverdien av produksjonen. Med et finansielt forankret utgangspunkt vil derfor en ideell modell for produksjonsplanlegging basere seg på en stokastisk optimeringsmodell med en prisbeskrivelse som betinger på tilgjengelig markedsinformasjon.

I prosjektet er det tatt utgangspunkt i et kraftverk eid av Elkem Energi AS¹. En deterministisk modell presenteres, og er implementert for det aktuelle systemet. Prisbeskrivelsen i modellen betinger på informasjon i terminstrukturen for future- og forwardkontrakter. En stokastisk formulering for problemet presenteres også. En algoritme, basert på Least Square Monte Carlo simulering (LSM), for å løse det stokastiske problemet blir foreslått.

I forbindelse med prosjektet er relevant litteratur studert. Wallace og Fleten (2003) beskriver produksjonsplanleggingsproblemet og presenterer både deterministiske og stokastiske problemformuleringer. Lucia og Schwartz (2002) presenterer en inngående studie av det nordiske kraftmarkedet og strømprisens egenskaper. Davison, Rasmussen og Thompson (2004) analyserer produksjonsplanleggingsproblemet med realopsjonsteori. Longstaff og Schwartz (2001) utviklet LSM for prising av opsjoner med amerikansk karakter.

Rapportens struktur er som følger: I kapittel 2 analyseres og drøftes produksjonsplanleggingsproblemet generelt og i kapittel 3 i et finansielt perspektiv. Deretter følger i kapittel 4 en beskrivelse av det nordiske kraftmarkedet, egenskaper ved strømprisen og de ulike kontraktene som handles. I kapittel 5 diskuteres hedging av vannkraftproduksjon generelt og pris på tilsigsrisiko. Modeller for pris og tilsig, en beskrivelse av det konkrete systemet og optimeringsmodeller presenteres i kapittel 6. I kapittel 7 behandles teorien bak LSM og en algoritme for produksjonsplanleggingsproblemet blir presentert. Implementeringen av den deterministiske modellen er beskrevet i kapittel 8, og resultatene fra den deterministiske modellen drøftes i kapittel 9 før konklusjonen i kapittel 10.

¹ Heretter referert til som Elkem.

2 Produksjonsplanleggingsproblemet

Forvaltning av vannet i magasiner er vannkraftprodusentens¹ ultimate utfordring. Generelt ønsker produsenten å bestemme optimal mengde vann som skal slippes gjennom systemet til enhver tid. Dette er ekvivalent med at produsenten må bestemme hvor mye vann som skal lagres til et senere tidspunkt. Planlegging av produksjonen er avgjørende i denne sammenheng. For å komme fram til en best mulig produksjonsplan er det nødvendig å ta hensyn til usikkerheten i problemet. Stokastikken knytter seg hovedsakelig til usikkerhet i kraftpriser og tilsig². Målet for optimaliseringen avhenger imidlertid av i hvilken grad kraftmarkedet er regulert.

I et regulert marked gir produksjonsplanleggingen opphav til et kostnadsminimaliseringsproblem med gitte etterspørselsrestriksjoner (Wallace og Fleten, 2003). Når produsenten er forpliktet til å møte en prisuelastisk etterspørsel, vil ikke kraftprisen inngå i optimeringsproblemet. Det beste produsenten kan oppnå er å minimere kostnader. Dette var tilnærmet situasjonen for norske vannkraftprodusenter tidligere.

Etter dereguleringen av det norske kraftmarkedet i 1991 og opprettelsen av kraftbørsen Nord Pool i 1993 er produksjonsplanleggingsproblemet endret. Produsenten kan nå gjøre transaksjoner i markedet, for å møte forpliktelser, som alternativ til egen produksjon. Wallace og Fleten (2003) gir et formelt argument for at etterspørselsrestriksjonene blir overflødige i et deregulert marked. Målet i dagens situasjon bør dermed være å maksimere forventet markedsverdi av produksjonen (Wallace og Fleten, 2003).

2.1 Vannverdikriteriet

For å vise konkret hvordan avveiningen mellom å lagre vannet og å produsere umiddelbart gir føringer for produksjonsplanen er det hensiktsmessig å innføre en formell notasjon for verdien av anlegget. La V_t være markedsverdien av anlegget på tidspunkt t . Vi kan da skrive:

$$V_t = \max E \left[\sum_{i=t}^{\infty} \frac{\Pi_i \times w(m_i, q_i)}{(1+r)^{i-t}} \right], \quad (2.1)$$

der Π_t er den stokastiske strømprisen, w er strømproduksjon som funksjon av magasinnivå, m_t , og vannstrøm, q_t ³, og r er en passende diskonteringsrente. Verdien av anlegget er altså en sum av de neddiskonterte inntektene fra hver periode. Det vil si at alle kostnader ved driften er neglisjert, samt at det er gjort en diskretisering av den i utgangspunktet kontinuerlige beslutningsprosessen.

¹ Heretter kun referert til som produsenten.

² Det vil også være usikkerhet knyttet til forhold som uforutsett havari.

³ $[q_t] = m^3$

Verdien av anlegget kan åpenbart også formuleres rekursivt:

$$V_t = \max_{q_t, m_t} \left[E[\Pi_t \times w(m_t, q_t)] + \frac{E[V_{t+1}]}{1+r} \right]. \quad (2.2)$$

Gitt at vi står i starten av periode t og antar at utfallet for prisen, π_t , dermed er kjent så blir (2.2):

$$V_t = \max_{q_t, m_t} \left\{ \pi_t \times w(m_t, q_t) + \frac{E[V_{t+1}]}{1+r} \right\}. \quad (2.3)$$

Vi ønsker å finne et kriterium for optimal forvaltning av vannet, og deriverer derfor uttrykket som maksimeres i (2.3) med hensyn på vannstrømmen:

$$\frac{d}{dq_t} \left(\pi_t \times w(m_t, q_t) + \frac{E[V_{t+1}]}{1+r} \right) = \frac{\partial}{\partial q_t} (\pi_t \times w(m_t, q_t)) + \frac{\partial \mu_{V_{t+1}}}{\partial m_{t+1}} \frac{\partial m_{t+1}}{\partial q_t}. \quad (2.4)$$

$\mu_{V_{t+1}} = \mu_{V_{t+1}}(m_{t+1}, \psi_t, \pi_t)$ er forventet verdi av anlegget i periode $t+1$ neddiskontert og ψ_t er utfallet for tilsiget. Den deriverte av magasinnivået med hensyn på vannstrømmen må være lik -1 . Dette gjenspeiler direkte flytbalansen i den matematiske formuleringen av produksjonsplanleggingsproblemet¹. Ved å krevne førsteordensbetingelsene for optimalitet oppfylt får vi dermed:

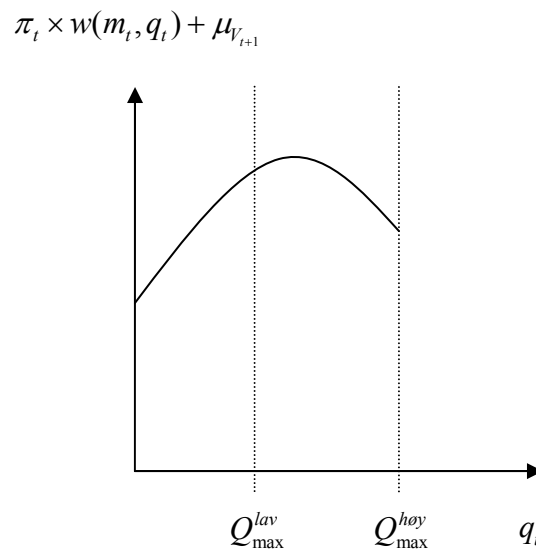
$$\frac{\partial \mu_{V_{t+1}}}{\partial m_{t+1}} = \pi_t \frac{\partial w(m_t, q_t)}{\partial q_t}. \quad (2.5)$$

Ligning (2.5) betyr i økonomisk forstand at produsenten i enhver periode bør produsere inntil den marginale endringen av den forventede verdien av anlegget i den påfølgende periode neddiskontert blir lik den marginale inntjeningen fra produksjonen i inneværende periode. Det er denne størrelsen, $\partial \mu_{V_{t+1}} / \partial m_{t+1}$, som omtales som marginal vannverdi. I resten av oppgaven vil vi referere til denne størrelsen kun som vannverdi.

I den forutgående analysen er det ikke tatt hensyn til at det kan være restriksjoner på vannstrømmen, q_t , eller på magasinnivået, m_t . Hvis magasinet er fullt, og tilsiget er større enn maksimal vannstrøm, vil det oppstå overløp. $\partial m_{t+1} / \partial q_t$ vil bli null og vannverdien er følgelig null. Et annet spesialtilfelle som kan oppstå er at prisen i en periode er så høy at det er optimalt å produsere så mye som mulig, selv om det ikke er fare for overløp. (2.5) vil da ikke nødvendigvis kunne oppfylles som likhet. Dette er illustrert i figur 2.1, hvor Q_{\max} er maksimal vannstrøm. Mer generelt vil dermed kriteriet for optimal produksjon være på formen:

$$\begin{aligned} & \max q_t \\ & s.t. \\ & \frac{\partial \mu_{V_{t+1}}}{\partial m_{t+1}} \leq \pi_t \frac{\partial w(m_t, q_t)}{\partial q_t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

¹ Se kapittel 6.4 og 6.5.



Figur 2.1: Illustrasjon av verdi av produksjon som funksjon av q .

2.2 Klassisk planleggingshierarki¹

Vannverdikriteriet gir oss et formelt vilkår for hvordan vi bør utforme produksjonsplanen. Imidlertid er kompleksiteten i produksjonsplanleggingsproblemet fortsatt betydelig. Det er usikkerhet i priser og tilsig, det fysiske systemet kan bestå av flere magasiner med ulike koblinger og flere stasjoner, deler av problemet er ulineært og mange ulike restriksjoner og føringer spiller inn. Samtidig er det nødvendig med en lang analysehorisont for å fange opp langsiktige trender og sesongvariasjoner. En enkelt modell med tilstrekkelig detaljeringsgrad og horisont vil bli uhandterbar regnemessig. Det har derfor vært vanlig å dele opp planleggingen ved å bruke flere modeller med ulik detaljeringsgrad for ulike tidshorisonter. Tabell 2.1 angir omtrentlige tidshorisonter og tilsvarende metoder som er i bruk for planleggingen.

Horisont	Metode
Langtidsplanlegging (1-5 år)	Stokastiske modeller for optimalisering og simulering
Sesongplanlegging (3-18 måneder)	Multi-scenario deterministiske optimeringsmodeller
Korttidsplanlegging (1-2 uker)	Deterministiske optimaliseringsmodeller

Tabell 2.1: Metoder brukt for ulike tidshorisonter.

¹ Delkapittelet er basert på notatet Produksjonsplanlegging i vannkraftbaserte systemer, Institutt for elkraftteknikk, NTNU, 2005.

2.2.1 Langtidsplanlegging

I langtidsanalysen vil en søke å fange opp langsiktige svingninger i pris og tilsig. Med en lang analysehorisont er det vanlig å gjøre en rekke forenklinger. Eksempelvis aggregeres reservoarene i systemet til et magasin. Resultatene fra langtidsplanleggingen gir styringssignaler til neste steg i planleggingshierarkiet.

2.2.2 Sesongplanlegging

Hensikten med sesongplanleggingen er å øke detaljeringsgraden og gi ytterligere signaler til korttidsplanleggingen. Analysen må samtidig kobles opp mot resultatene fra langtidsplanleggingen. Koblingen mellom de ulike trinnene er diskutert under. Gitt tilstrekkelig regnekraft vil sesongplanleggingen kunne bli overflødig (Fosso, 2005).

2.2.3 Korttidsplanlegging

For de nærmeste dagene og ukene forutsettes prisutvikling og tilsig kjent. Modellene bør være en tilstrekkelig realistisk beskrivelse av systemet til at kjøreplaner kan genereres med tidsoppløsning på en time eller kortere. Kjøreplanene fra korttidsplanleggingen må i tillegg simuleres for å sikre at det ikke oppstår konflikter med regler og føringer som ikke fanges opp av modellene.

2.2.4 Koblinger mellom de ulike nivåene i planleggingshierarkiet

Hensiktsmessige koblinger mellom de ulike planleggingsnivåene er svært viktig for å skape konsistens i analysen. Ulike løsninger er skissert i tabell 2.2.

Type kobling	Karakteristikk
Volumkobling	Nivåene kobles gjennom et fastsatt magasinnivå på et gitt tidspunkt. Dette er en enkel løsning, men gir lite fleksibilitet.
Volumkobling med straff	Avvik fra gitt volum tillates, men gir en straff i målfunksjonen. Dette gir større fleksibilitet, men det kan være problematisk å bestemme en hensiktsmessig straff.
Vannverdikobling	Nivåene kobles ved å sikte mot en gitt vannverdi på koblingstidspunktet. Dette gir større fleksibilitet, og gjør det enklere å oppnå konsistens når eksempelvis magasiner er aggregert i langtidsmodellen.

Tabell 2.2: Koblinger mellom planleggingsnivåer.

Tidspunktet for kobling mellom nivåene kan også være av stor betydning. Deler av året vil koblingene være forbundet med større usikkerhet enn andre. Eksempelvis er det vanlig å koble langtidsanalysen og sesonganalysen under vårflommen eller på høsten når snøen legger seg.

2.2.5 Analysehorisont og reguleringsgrad

Intervallene som er indikert for analysehorisonten har et relativt stort spenn, særlig for sesong- og langtidsplanleggingen. En av grunnene til dette er at det er stor variasjon i hvor godt ulike system er regulert. I den forbindelse innfører vi begrepet reguleringsgrad. La U være midlere årstilsig og M_{\max} og M_{\min} være henholdsvis maksimalt og minste magasinnivå. Reguleringsgrad for et vannmagasin er da definert som følger:

$$R = \frac{M_{\max} - M_{\min}}{U}. \quad (2.7)$$

Når produsenten foretar et valg av analysehorisont, bør reguleringsgraden tas i betraktning (Gjelsvik, 2005). Med et godt regulert¹ magasin er det mulig å foreta disponeringer som er mer langsiktige enn med en lavere reguleringsgrad. Generelt vil dermed en høy reguleringsgrad tilsi en lang analysehorisont. Grunnen til dette er at analysen er endelig, og vi må dermed gjøre bestemte antagelser med hensyn til grensebetingelser i siste periode. Hvis reguleringsgraden eksempelvis er så lav at vi forventer flom hver vår, uavhengig av produksjonsplan, trenger vi ikke å planlegge lenger enn til vårflommen, siden vi kan anta at vannverdien er lik null. For et system med høy reguleringsgrad vil feilaktige grensebetingelser kunne gi store utslag dersom analysehorisonten velges for kort.

2.2.6 Kommersielle løsninger for produksjonsplanlegging

De mest anvendte planleggingsmodellene i bruk i Norden er de SINTEF-utviklede verktøyene Samkjøringsmodellen og Vansimtap (sintef.no, 2005). Samkjøringsmodellen er beregnet for analyse av større system og gir blant annet spotprisprognoser. Vansimtap er beregnet for sesong- og langtidsplanlegging for den enkelte produsent. SHOP er et annet SINTEF-produkt som er spesielt tilpasset kortidsplanlegging av vannkraft.

¹ Med godt regulert menes høy reguleringsgrad.

3 Produksjonsplanlegging i et finansielt perspektiv

Strømpriser og tilsig har som tidligere nevnt en høy grad av stokastikk, og det grunnleggende problemet i produksjonsplanleggingen er å bestemme hvordan fleksibiliteten best kan utnyttes. I et finansperspektiv er det derfor nærliggende å vurdere realopsjonsanalyse som tilnærming for å prise produksjonen. Dette kapitlet vil sette fokus på hva opsjonaliteten i produksjonsplanleggingsproblemet innebærer. For øvrig gir Dixit og Pindyck (1994) og Trigeorgis (1996) helhetlige innføringer i realopsjonsanalyse generelt. Eydeland og Wolyniec (2003) presenterer metoder for realopsjonsanalyse rettet mot energibransjen. Davison, Rasmussen og Thompson (2004) og Tseng og Barz (2002) er representanter for nyere utvikling av realopsjonsmetoder anvendt på kraftproduksjon.

3.1 Antagelser

I den videre analysen ligger flere antagelser til grunn. Antagelsene er som følger:

1. Kapitalmarkedene er velfungerende og komplette i den forstand at målet for produsenten alltid vil være å maksimere markedsverdien av produksjonen.
2. Produsentens disposisjoner påvirker ikke priser eller andre aktørers disposisjoner.
3. Anlegget begrenses til et system med ett magasin og én stasjon med én turbin.
4. Produksjonskostnader neglisjeres.

Antagelse 1 vil ikke være oppfylt i praksis for et vannkraftverk. Hovedgrunnen til det er at det ikke eksisterer noe marked for tilsigsrisiko. Hvorvidt kraftmarkedet er tilnærmet komplett er også diskutabelt. Dette er nærmere diskutert i 5.1.

For mindre aktører er det grunn til å tro at antagelse 2 holder. For store produsenter, eksempelvis Statkraft, vil trolig antagelsen ikke holde. En stor aktør vil kunne gjøre nytte av spillteoretiske tilnærminger for å løse problemet. Dette vil ikke bli nærmere diskutert i denne oppgaven.

3.1.1 Vannmagasinet som opphav til merverdi

Et elvekraftverk uten magasin har ingen lagringsmuligheter for vannet. Produsenten har i denne situasjonen ingen muligheter til å gjøre disposisjoner vedrørende produksjonen i forskjellige perioder.¹ Å finne verdien av kraftverket reduseres da til å forstå og modellere tilsigs- og prisprosessene (Eydeland & Wolyniec, 2003).

Verdien av et magasin i tilknytning til et kraftverk er en følge av at magasinet gir muligheter for arbitrasje i tid. Strømpriser utviser store og delvis forutsigbare sesongvariasjoner². Magasinet gir da muligheter for å lagre vann fra perioder med lav pris til perioder med høy pris.

¹ Vedlikehold kan imidlertid legges til perioder med lav strømpris / lav vannføring.

² Se 4.4.4.

Følgende eksempel søker å illustrere hvordan magasinet gir opphav til merverdi, og hvordan denne verdien er et resultat av en opsjon med amerikansk karakter:

Betrakt en diskret situasjon med kun to perioder og null tilsig. Prisen i periode 0 er kjent og k er en konstant. La videre:

$$\Pi_1 \in \{\Pi_1^l, \Pi_1^h\}$$

$$\Pi_1^l = n \times \pi_0$$

$$\Pi_1^h = u \times \pi_0$$

$$w(m, q) = kq$$

$$n \leq 1+r \leq u$$

Produsenten har i denne situasjonen en amerikansk opsjon på å produsere nå eller i neste periode, gitt at muligheten for produksjon er begrenset til disse to periodene. Merk at den lineære produksjonsfunksjonen fører til at det aldri vil være optimalt å produsere i begge perioder. Teorien for binom opsjonsprising (se for eksempel McDonald (2003)) gir da verdien, V_0 , som følger:

$$p^* = \frac{(1+r) - n}{u - n}$$

$$V_0 = km \times \max \left[\pi_0, \frac{(p^* \Pi_1^h + (1-p^*) \Pi_1^l)}{1+r} \right]$$

Eksempelet over er svært forenklet. I realiteten vil driftsbeslutningen være av kontinuerlig karakter, det vil være et stokastisk tilsig, fysiske restriksjoner på magasinnivå og vannføring og en ulineær produksjonsfunksjon. Opsjonaliteten i problemet vil like fullt være tilstede, men i en langt mer kompleks form.

3.1.2 Vannkraft som spread opsjon

I avsnitt 2.1 ble det vist at optimal produksjon er gitt ved vannverdikriteriet. Davison, Rasmussen og Thompson (2004) utleder et alternativt kriterium i kontinuerlig tid. Kriteriet gjelder i et relativt generelt univers med hensyn til pris- og tilsigsprosess. Gitt at vi står i t gir kriteriet at optimal vannstrøm tilfredsstiller uttrykket

$$\max_{\dot{q}_t} \left[\pi_t \times \dot{w}(m_t, \dot{q}_t) - \dot{q}_t \frac{\partial V_t}{\partial m_t} \right], \quad (3.1)$$

der \dot{w} er produsert effekt som funksjon av magasinnivå og momentan vannstrøm, \dot{q} . Hvis vi går over til diskret tid ved å gjøre tilnærmingen

$$\frac{\partial V_t}{\partial m_t} \approx \frac{\partial \mu_{V_{t+1}}}{\partial m_{t+1}} \quad (3.2)$$

og lar

$$\dot{w}(m_t, \dot{q}_t) \rightarrow w(m_t, q_t), \quad (3.3)$$

så får vi følgende uttrykk:

$$\max_{q_t} \left[\pi_t \times h(m_t, q_t) - q_t \frac{\partial \mu_{V_{t+1}}}{\partial m_{t+1}} \right]. \quad (3.4)$$

(3.4) gir oss ikke utbetalingsstrukturen fra opsjonen direkte, men viser at vannet har en verdi og hvordan denne verdien er med på å bestemme optimal produksjon. Hvis vi tolker $\partial \mu_{V_{t+1}} / \partial m_{t+1}$ som enhetskostnaden for vannet, så gir (3.4) at optimal produksjonsstrategi maksimerer differansen mellom inntjeningen og alternativkostnadene til vannet. I en situasjon der det kun er mulig å enten forbruke et konstant volum eller ikke produsere tar (3.4) form av en spread opsjon med differansen mellom markedsverdien av produsert kraft og verdien av vannet som underliggende.

La q_t^* benevne optimalt produksjonsvolum. Verdien av produksjonen kan da ved (2.3) uttrykkes som følger:

$$V_t = \Pi_t \times h(m_t, q_t^*) + \mu_{V_{t+1}}. \quad (3.5)$$

For å undersøke feilen i (3.2) deriverer vi (3.5) med hensyn på magasinnivået:

$$\frac{\partial V_t}{\partial m_t} = \Pi_t \frac{\partial h(m_t, q_t^*)}{\partial m_t} + \frac{\partial \mu_{V_{t+1}}}{\partial m_{t+1}} \frac{\partial m_{t+1}}{\partial m_t}. \quad (3.6)$$

Gitt at det ikke oppstår overløp så vil $\partial m_{t+1} / \partial m_t = 1$, og feilen i (3.4) vil avhenge av hvor bratt produksjonsfunksjonen er i m-retningen.¹ Hvis det oppstår overløp vil ikke lenger $\partial m_{t+1} / \partial m_t$ være definert. Vi har imidlertid tidligere argumentert for at vannverdien i denne situasjonen er lik null. (3.4) fører da til at produksjonen vil gå til maksimal produksjon, som er et fornuftig resultat. Det presiseres at innføringen av (3.4) er gjort for å illustrere dynamikken i problemet, og ikke er et resultat av en stringent matematisk analyse.

For å oppsummere så har produsenten i hver periode en opsjon på å løse inn vann for å produsere kraft. Opsjonen er som tidligere diskutert av amerikansk karakter. Ytterligere forhold som kompliserer prisingen er at innløsningskursen er en stokastisk funksjon av tilstandsvariablene. Framtidig innløsningskurs påvirkes videre av de disposisjoner vi gjør i dag og et stokastisk tilsig. Verdien på underliggende avhenger heller ikke kun av strømprisen, men også av magasinnivå og hvor mye vann vi velger å løse inn.

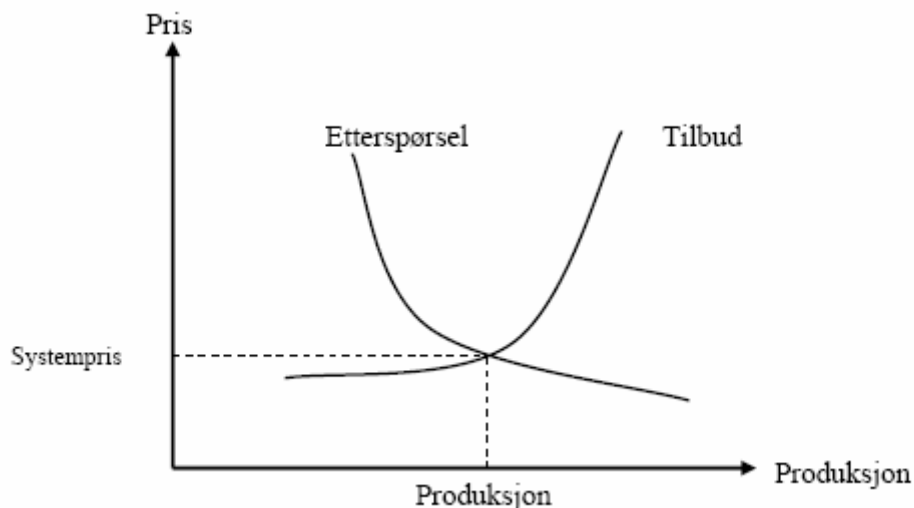
¹ Se 6.2.1 og vedlegg 5 for et eksempel på hvordan en produksjonsfunksjon kan se ut.

4 Kraftmarkedet

I 1991 ble det foretatt en deregulering av det norske markedet for elektrisk kraft. I kjølvannet av dette ble den fellesnordiske kraftbørsen Nord Pool opprettet. Denne kraftbørsen har økt i omfang etter hvert som de andre nordiske landene også har åpnet for å deregulere markedene. Nord Pools oppgaver er å drifte det fysiske markedet (Elspot) og administrere de finansielle (Eltermin og Eloption). Nord Pool garanterer også for enighet og leveranse, ved å være en nøytral motpart for både kjøper og selger.

4.1 Det fysiske markedet

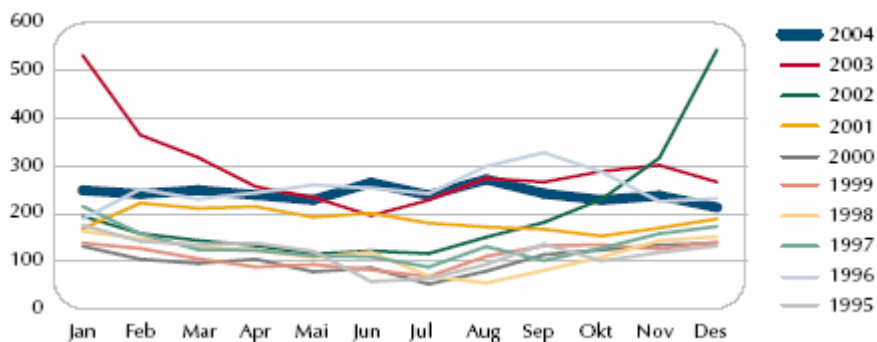
Elspot er et marked hvor det blir handlet kraftkontrakter for fysisk leveranse for hver av de 24 timene det påfølgende døgnet. Markedet fungerer på den måten at de som ønsker å kjøpe eller selge kraft angir pris og kvantum for det de vil handle i de ulike timene. For hver time i det neste døgnet får man da en systempris, som kommer frem av krysningen mellom den totale tilbuds- og etterspørselskurven for alle deltakerne i markedet (se figur 4.1). Dersom det ikke er begrensninger i overføringskapasitet blir spotprisen lik systemprisen.



Figur 4.1: Sammenheng mellom systempris og tilbud/etterspørsel i markedet.

Faktorer som påvirker systemprisen er i særlig grad sesong (temperatur) og periode på døgnet (Lucia & Schwartz, 2002). Ved lave temperaturer vil etterspørselen øke og systemprisen gå opp.

I Norge kommer 99% av elkraften fra vannkraftverk og i Norden 55% (nordpool.no, 2005). På grunn av dette vil systemprisen være svært avhengig av fyllingsgraden i magasinene. Variasjonene kan observeres i figur 4.2, der systemprisen er typisk høy i vintermånedene og lav om sommeren. Det er også verdt å merke seg hvordan systemprisen blir påvirket av perioder med lite nedbør slik som i vinteren 2002/2003.



Figur 4.2: Systempris i NOK pr MWh fra 1992 til 2004, (Nordpool.no).

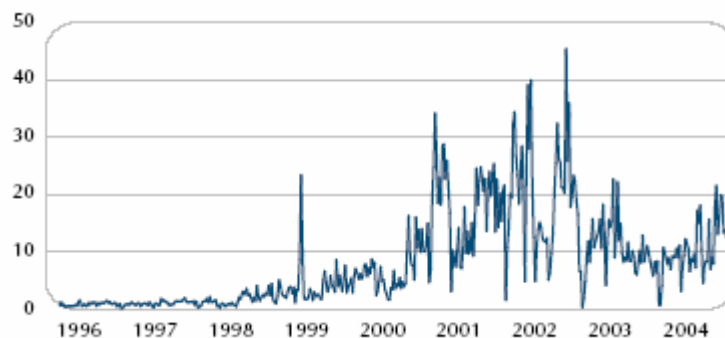
4.2 Det finansielle markedet

På markedet Eltermin blir det handlet forskjellige typer future- og forwardkontrakter oppdelt ut ifra ulike leveringsperioder. Det handles i dag futurekontrakter for dager og uker og forwardkontrakter for måneder, kvartaler og år. Kontraktene er standardiserte og er på 1 MW, innenfor sine respektive leveringsperioder. I 2004 ble det omsatt for 148,5 Mrd NOK noe som tilsvarte 590 TWh (se figur 4.3). Hovedforskjellen på futures og forwards ligger i at førstnevnte har mark-to-market oppgjør, mens sistnevnte har akkumulert oppgjør etter siste leveringsdag. Det handles kontrakter med levering opptil tre år frem i tid.

Ingen av forwardkontraktene på Nord Pool innebærer faktisk fysisk leveranse, men blir gjort opp mot systemprisen i spotmarkedet. Elektrisitet er en bulkvare og må i praksis brukes samtidig som den lages. Forwardkontraktene er derfor en type 'swaps'. Prisene blir bestemt ut ifra en forventet gjennomsnittlig pris over en periode og ikke for et visst leveringstidspunkt.

Siden høsten 1999 har det også vært mulig å handle europeiske opsjoner eller 'swaptions' på markedet Eloption. Dersom en kjøps- 'swaption' er lønnsom ved innløsningsstidspunkt vil man innta en posisjon i den underliggende 'swap' mot en innløsningspris. Utbetalingen fra å inneha en posisjon i opsjonen vil skje i løpet av leveranseperioden til den underliggende 'swap', og følgelig ikke ved innløsning av opsjonen (Gaarder Haug, 2005).

For en vannkraftprodusent vil informasjonen som ligger i det finansielle markedet være nyttig når den optimale ressursutnyttelsen skal avgjøres. Etersom prisene på de ulike kontraktene er offentlige, kan de være med og hjelpe vannkraftprodusenten til å bestemme sannsynlig risikopremie (Eydeland & Wolyniec, 2003).



Figur 4.3: Omsetning i TWh pr uke på Eltermin (Nordpool.no)

4.3 Sammenheng mellom spot og forwardpris

En forward skal etter prinsippet om nullarbitrasje være priset lik spotprisen ved leveringstidspunkt, T , diskontert med en risikofri rente r subtrahert med dividenden δ :

$$F_{t,T} = S_t e^{(r-\delta)(T-t)}. \quad (4.1)$$

For handelsvarer er det ofte snakk om lagringskostnader og 'convenience yield'. 'Convenience yield' er verdien av å holde en fysisk vare i terminmarkedet. Ettersom det er svært begrensede muligheter for fysisk lagring av elektrisitet er det vanlig å neglisjere lagringskostnadene og 'convenience yield'. Arbitrasjemuligheter i tid og rom blir derfor svært begrenset. Sammenhengen mellom spot- og forwardpris blir som følge av dette ikke like enkel som beskrevet i grunnleggende finansiell teori

Forventet spotpris i tidspunkt T er spotpris i t med en forventet avkastning α :

$$E_t[S_T] = S_t e^{\alpha(T-t)}. \quad (4.2)$$

For å unngå risikofri profittering er det nødvendig at forwardkontrakten prises slik at verdien av å holde en kontrakt og eie en andel i underliggende blir den samme i en risikonøytral vurdering:

$$F_{t,T} = E_t[S_T] e^{(r-\alpha)(T-t)}. \quad (4.3)$$

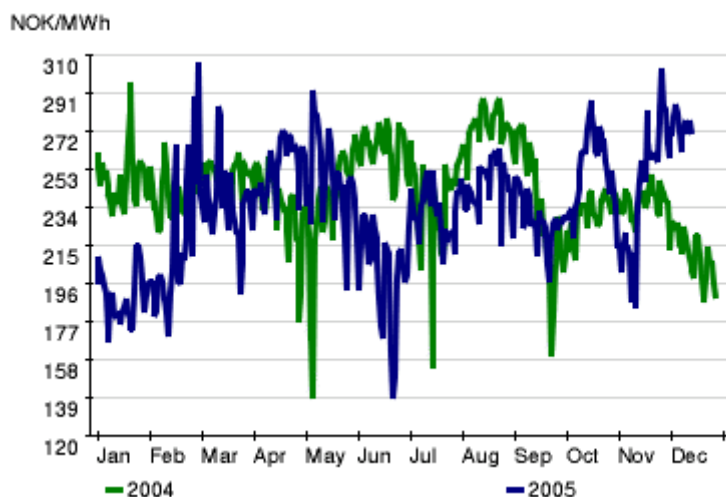
I et elkraftmarked er det ikke nødvendigvis sammenheng mellom etterspørsel i dag og i fremtiden. Det er derfor vanlig å se på elkraft handlet på to ulike tidspunkt som to forskjellige varer. Sammenhengen i ligning (4.3) holder likevel også i elkraftmarkeder (McDonald, 2003).

4.4 Strømprisens oppførsel

Deregulerte markeder for elektrisk kraft er relativt nye. Det finnes derfor begrensede mengder historiske data for likvide spotpriser og derivater. Det er likevel gjort flere studier vedrørende egenskapene til strømprisen (Lucia & Schwartz, 2002). Viktige observerte egenskaper ved strømprisen er sprang i pris, mean reversion, tunge haler i prisfordelingen og sesongavhengighet.

4.4.1 Sprang i pris

Prisen på elektrisk kraft kan være meget volatil etter standard mål på volatilitet (Lucia & Schwartz, 2002). Det kan ofte forekomme plutselige, uventede og diskontinuerlige forandringer i spotprisen. Figur 4.4 er et plot av spotprisen på Nord Pool fra Januar 2004 til november 2005.



Figur 4.4: Spotpriser fra Nord Pool fra Januar 2004 tom. Oktober 2005 (nordpool.no).

En sannsynlig forklaring er at disse sprangene kommer av stor variasjon i etterspørselen og lav elastisitet i tilbudet. Den lave elastisiteten kommer av begrenset overføringskapasitet og små muligheter for lagring av elektrisitet.

4.4.2 Mean reversion

En annen veldokumentert egenskap ved råvarepriser er mean reversion. Denne egenskapen kan illustreres med følgende modell (Clewlow & Strickland, 2000):

$$dS = \kappa(\mu - \Pi) \Pi dt + \Pi \sigma dZ. \quad (4.4)$$

Her vil spotprisen trekkes tilbake til det langsiktige nivået $\bar{\Pi} = e^{\mu}$ med en hastighet som er gitt av mean reversion raten κ . Denne raten er bestandig positiv. Dersom spotprisen ligger over det langsiktige nivået $\bar{\Pi}$ så vil driften μ i spotprisen være negativ, og prisen vil ha en tendens til å gå tilbake til det langsiktige nivået. På samme måte vil driften være positiv dersom spotprisen ligger under det langsiktige nivået. Spotprisen trenger ikke nødvendigvis vende tilbake til det langsiktige nivået ved ethvert tidspunkt. Den tilfeldige endringen i spotprisen kan være større enn driften og inneha motsatt fortegn.

Tester for tilstedeværelse av 'mean reversion' hos strømpriser har ikke gitt entydige resultater. Dette skyldes at det er vanskelig å skille mellom 'mean reversion' som følge av prishopp i strømdataene det testes på og faktisk 'mean reversion'. (Eydeland & Wolyniec, 2003).

4.4.3 Tunge haler i prisfordelingen

En konsekvens av sprang i spotprisen og høy stokastisk volatilitet er tynne haler i prisfordelingen. Dette kommer av at sannsynligheten for store utslag fra empiriske data typisk vil overgå de teoretiske sannsynlighetsfordelingene som spotprismodellene baseres på. Et estimat av kurtosen hos spotprisfordelingen i det nordiske kraftmarkedet har gitt verdier som ligger betraktelig høyere enn kurtose for standard normalfordeling (Lucia & Schwartz, 2002). Forekomst av høy og lav avkastning vil følgelig ha større sannsynlighet enn for en

normalfordeling med samme varians. Det er også påvist en positiv skjevhet i avkastningen hos spotprisen, som tilsier høyere sannsynlighet for høy enn for lav avkastning (Lucia & Schwartz, 2002).

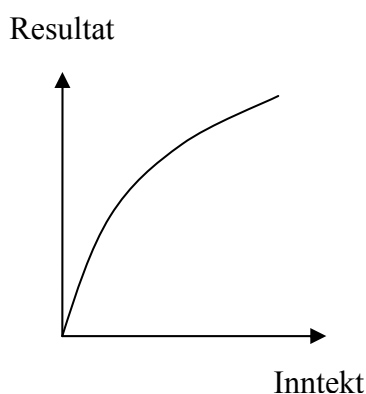
4.4.4 Sesongavhengighet

Strømpriser i norden er påvist å være avhengig av sesong (Clewlow & Strickland, 2000). Systemprisen for vintersesongen har median, middel-, maksimum- og minimumverdier som ligger over den varme sesongen. Den midlere prisen for kalde sesonger er 28% høyere enn for varme (Lucia & Schwartz, 2002). En nøyaktig estimering av det årlige sesongavhengige mønsteret krever derimot et høyt antall år. I Norge er 70% av oppvarmingsbehovet dekket med elektrisitet (Olje- og energidepartementet, 2005). Dette fører til at klima i stor grad er med og bestemmer konsumet av elektrisk kraft. Kortere dager i vinterhalvåret fører også til økt bruk av kunstig lys, som igjen øker strømforbruket. Sesongavhengigheten er inkludert i verdisetningen hos deltakere i markedet (Lucia & Schwartz, 2002). Formen på future-kurven viser at det er en topp og en bunn for hvert år noe som er i samsvar med oppførselen til spotprisen. Den midlere spotprisen for helge- og helligdager ligger også under den midlere spotprisen for vanlige ukedager (Lucia & Schwartz, 2002).

5 Hedging av kraftproduksjon

Gjennombruddet for moderne opsjonsprisingsteori regnes for å være artikkelen *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* (Black og Scholes, 1973). Fundamentet for teorien er at det er mulig å sette sammen andre finansielle produkter som, uavhengig av prisutviklingen på underliggende, gir den samme utbetalingsstrukturen som derivatet. Dette alternative settet med produkter kalles hedgeporteføljen.

I kapittel 3 ble det illustrert hvordan et vannkraftverk kan betraktes som et komplekst derivat på kraftpris og tilsig. For å kunne hedge kraftproduksjonen ønsker vi analogt med Black-Scholes-teorien å finne et sett av produkter som best mulig replikerer kontantstrømmene fra kraftverket. Det kan være flere grunner til at produsenten ønsker å hedge produksjonen. Wallace og Fleten (2003) poengterer at friksjon i markedet kan føre til at det vil være skalaøkonomi i risikostyring; det kan være billigere for produsenten å hedge enn for individuelle investorer i selskapet. En annen grunn til å hedge kan oppstå, som illustrert i figur 5.1, dersom resultatet fra produksjonen som funksjon av inntektene har negativ andrederivert.



Figur 5.1: Illustrasjon av resultat som funksjon av inntekt.

Wallace og Fleten (2003) presenterer et argument for at hedging kun bør gjøres ved transaksjoner i markedet og ikke ved å endre produksjonsplanen. Argumentet går kort som følger: Markedsverdien av en finansiell kontrakt i et likvid marked er null i det den inngås og vil derfor ikke endre markedsverdien av produksjonen. En endring av produksjonsplanen fører imidlertid til en endring av markedsverdien til produksjonen. Derfor bør produksjonsplanen utformes for å maksimere markedsverdien til produksjonen, og deretter kan en gjøre transaksjoner i markedet for å begrense risikoen. Dette argumentet vil være utgangspunktet for resten av diskusjonen.

5.1 Ikke-komplett marked

Som tidligere nevnt finnes det ikke noe marked for tilsigsrisiko. Det vil dermed alltid være en viss basisrisiko forbundet med produksjonen. Elkraftmarkedet er trolig heller ikke komplett i den forstand at det er mulig å kvitte seg med all prisrisiko. Tidsoppløsningen for produksjonsplanleggingen er typisk kortere enn de tilgjengelige kontraktene på lang og mellomlang sikt. Hvis det eneste tilgjengelige instrumentet er en årskontrakt, kan ikke risiko på ukesbasis hedges, siden instrumentet kun avspeiler gjennomsnittlig risiko over hele

perioden. I tillegg er det nødvendig å gjøre en antakelse om verdien av sluttmagasinet¹. Analysehorisonten som er anvendt i kapittel 8 strekker seg til slutten av siste terminkontrakt. Prisisiko forbundet med sluttmagasinet kan dermed ikke hedges. I det videre forutsettes imidlertid likevel et tilnærmet komplett kraftmarked.

5.2 Markedspris på tilsigsrisiko

At vi ikke kan hedge all risiko forbundet med kraftproduksjonen kompliserer framgangsmåten for risikonøytral prising og dermed også hedging. Eydeland og Wolyniec (2003) påpeker at en bør finne markedsprisen på den risikoen som ikke kan hedges og bruke den i stedet for den risikofrie renten.

La α være forventet avkastning, σ volatilitet og r_f risikofri rente. Pris på risiko per volatilitetsenhet, λ , kan da defineres som

$$\lambda = \frac{\alpha - r_f}{\sigma}. \quad (5.1)$$

(5.1) kalles også Sharpe-forhold (McDonald, 2003). Hvis en tror at risikopremien på vannkraftaksjer i hovedsak skyldes tilsigsrisiko kan kapitalverdimodellen forslagsvis benyttes for å finne risikopremien for en portefølje av rene vannkraftaksjer²:

$$\alpha_{\text{vannkraft}} - r = \beta_{\text{vannkraft}} (\alpha_{\text{marked}} - r_f). \quad (5.2)$$

For to eiendeler som er identisk korrelert med markedet forøvrig vil Sharpe-forholdet være det samme (McDonald, 2003). Anta at markedsverdien av egen produksjon er likt korrelert med markedet som porteføljen av vannkraftaksjer, og videre at risikopremien for vannkraftaksjer kun skyldes tilsigsrisiko. Risikopremien for eget tilsig blir da:

$$\alpha_{\text{tilsig}} - r_f = \frac{\sigma_{\text{produksjon}}}{\sigma_{\text{vannkraft}}} (\alpha_{\text{vannkraft}} - r_f), \quad (5.3)$$

der $\sigma_{\text{produksjon}}$ er volatiliteten til markedsverdien av egen produksjon.

Eydeland og Wolyniec (2003) foreslår også å bruke selskapets generelle avkastningskrav i lignende situasjoner. Eventuelt kan en vurdere hvorvidt tilsigsrisiko er en systematisk eller usystematisk risiko. Hvis tilsigsrisiko er usystematisk innebærer det at investorene kan eliminere risikoen ved å holde en veldiversifisert portefølje. I et tilstrekkelig likvid marked vil en premie for tilsigsrisiko da innebære en arbitrasjemulighet, som ikke kan vedvare. Risikopremien bør i denne situasjonen være lik null.

¹ Selv om et modellen fordrer et fast sluttmagasin vil det innebære en implisitt verddivurdering av restmagasinet.

² Aksjer på selskaper som hovedsakelig er vannkraftprodusenter.

5.3 Potensielle hedgeprodukter og forventede posisjoner

Selv om det er høyst usannsynlig å finne en perfekt hedge for vannkraftproduksjonen kan likevel variansen i kontantstrømmene begrenses, ved å ta posisjoner i de produkter som faktisk handles. For å låse inn framtidig pris kan produsenten typisk inngå korte posisjoner i future- og forwardkontrakter. Det er imidlertid usikkerhet knyttet ikke bare til prisen, men også til produsert kvantum. For å oppnå et konsistent resultat er produsenten derfor avhengig av å planlegge og prise produksjonen på en måte som gir sensitiviteter for produksjonsvolum i forhold til de tilgjengelige future- og forwardkontraktene.

Eydeland og Wolyniec (2003) diskuterer prising og hedging av gasslagre og hevder at de samme teknikkene, med modifikasjoner, kan brukes til å prise og hedge vannkraftproduksjon. De resulterende hedgene for gasslageret består av opsjoner. Dette kan tyde på at opsjoner kan være egnet også til å hedge vannkraftproduksjon.

6 Modeller

For å være i stand til å finne en adekvat løsning på produksjonsplanleggingsproblemet er det nødvendig med beskrivelser av strømpris, tilsig og produksjonssystemet. Når forutnevnte er etablert, er det videre nødvendig å formulere problemet matematisk. Dette kapittelet vedrører disse forholdene.

6.1 Stokastiske modeller

Både pris og tilsigsprosessen er uforutsigbare i den grad at en modell som ikke tar hensyn til stokastikken vil være urealistisk. For å kunne oppnå en fornuftig hedgestrategi er det videre ønskelig med en prismodell i produksjonsplanleggingen som betinger på markedsinformasjon. I denne oppgaven er det valgt tidskontinuerlige stokastiske prosesser basert på Brownsk bevegelse for både pris og tilsig. Varianter av Brownsk bevegelse er hyppig brukt som modell innen finans og er inngående studert. For en analyse av egenskapene til Brownsk bevegelse se for eksempel Ross (2003). McDonald (2003) gir en innføring i anvendelsen av Brownsk bevegelse som byggestein for modeller i finans.

6.1.1 Prismodell

Som diskutert i 4.4 har strømprisprosessen en rekke særegenheter. En modell som tar hensyn til alle forhold blir relativt komplisert og vil ha mange parametere som må estimeres. Fokuset for denne oppgaven er ikke å foreslå en best mulig modell for strømpriser. Likevel er det nødvendig å benytte en modell som er i en viss overensstemmelse med markedet for å oppnå fornuftige resultater. For en studie av ulike modeller som kan være aktuelle i kraftmarkeder se Clewlow og Strickland (2000) eller Eydeland og Wolyniec (2003). Schwartz (1997) regnes forøvrig å være et viktig bidrag til modellering av råvarepriser generelt.

Prismodellen som er valgt i denne oppgaven er en variant av Ornstein-Uhlenbeck prosessen med tidsavhengig forventning. Modellen er beskrevet i de tre overnevnte referansene og uttrykkes generelt

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = \kappa(\theta_t - \ln \Pi_t)dt + \sigma dZ_t. \quad (6.1)$$

der dZ_t er et inkrement til en standard brownsk bevegelse, κ er mean reversion parameteren, θ_t er tidsvarierende forventning og σ er standardavviket til den brownske bevegelsen. For å simulere denne modellen er det hensiktsmessig å gjøre transformasjonen

$$f_t = \ln \Pi_t. \quad (6.2)$$

Itô's formel gir da

$$df_t = \left(\kappa(\theta_t - f_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dZ_t. \quad (6.3)$$

For å simulere modellen gjøres diskretiseringen

$$\Delta f_t = \left(\kappa(\theta_t - f_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}N_t, \quad (6.4)$$

der N er en standard normalfordelt variabel. Clewlow og Strickland (2000) påpeker at f inngår i driften, og at diskretiseringen derfor kun er eksakt i grensen $\Delta f \rightarrow df$. Tidsstegene bør derfor velges korte relative til mean reversion hastigheten.

For å gjøre prisprosessen risikonøytral kan driften kalibreres ved hjelp av terminstrukturen. Clewlow og Strickland (2000) viser da at

$$\theta(T) = \frac{d \ln F_{0,T}}{dt} + \kappa \ln F_{0,T} + \frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2\kappa T}), \quad (6.5)$$

der $F_{0,T}$ er terminprisen for strøm levert i tidspunkt T på nåtidspunkt. Modellen er per definisjon kalibrert til terminstrukturen i forventning, men betinger ikke på andre ordens markedsinformasjon. Modellen kan derfor ikke ventes å gi korrekte opsjonspriser. Verdiene for de øvrige parametrene, σ og κ , som er brukt for simulering av modellen er estimert av Elkem¹.

6.1.2 Tilsigsmodell

Modellen som er brukt for tilsiget er av samme type som modellen for elektrisitetsprisen. Det er i denne oppgaven ikke gjort noen egen studie av tilsigsdata; modellen og parametrene er gitt av Elkem². Tilsigsmodellen har i tillegg til sesongavhengig forventning også sesongavhengig varians. I følge Fosso (2005) er autokorrelasjon ofte en signifikant faktor i tilsigsserier. Ornstein-Uhlenbeck prosessen er den tidskontinuerlige versjonen av en AR(1)-prosess. AR(1)-prosessen er autokorrelert ved lag 1 (Brockwell og Davis, 2002). Det er imidlertid uklart om denne autokorrelasjonsstrukturen er en god beskrivelse av den fysiske prosessen.

¹ Se vedlegg 1 for parametrene.

² Se vedlegg 1 for parametrene.

6.2 Systembeskrivelse

I denne rapporten er det tatt utgangspunkt i kraftverket tilhørende Elkem Energi Siso AS¹ i Sørfold kommune i Nordland². Kraftverket består av kun ett magasin og én stasjon. Dette forenkler analysen ved at det ikke er koblinger mellom ulike magasiner og stasjoner som må taes i betraktning.

6.2.1 Produksjonsfunksjonen

Ytelsen til et vannkraftverk kan beskrives med en produksjonsfunksjon. Denne produksjonsfunksjonen vil i hovedsak variere med vannføringen og vannivået i magasinet. Her følger en redegjørelse for produksjonsfunksjonen for Siso. Virkningsgraden er gitt av

$$\eta(\dot{q}) = a_{\eta} \left(\frac{\dot{q}}{q_{\max}} \right)^2 + b_{\eta} \left(\frac{\dot{q}}{q_{\max}} \right) + c_{\eta} \quad (6.6)$$

\dot{q} Vannføring

$a_{\eta}, b_{\eta}, c_{\eta}$ Parametere for virkningsgraden til vannkraftverket

Tilnærmet ligning for utregning av fallhøyden i vannkraftverket er

$$h(m; M_{\min}, M_{\max}, h_{\max}) \approx h_{\max} - d_{\text{høyde}} \cdot e^{-f_{\text{høyde}} \cdot \left(\frac{m - M_{\min}}{M_{\max} - M_{\min}} \right)} \quad (6.7)$$

h Fallhøyde

m Nåværende magasinnivå

M_{\min} Minimum tillatte magasinnivå for vannkraftverket

M_{\max} Maks magasinnivå for vannkraftverket

h_{\max} Maksimal fallhøyde for vannkraftverket

$d_{\text{høyde}}$ Høydeparameter

$f_{\text{høyde}}$ Høydeparameter

¹ Heretter referert til som Siso.

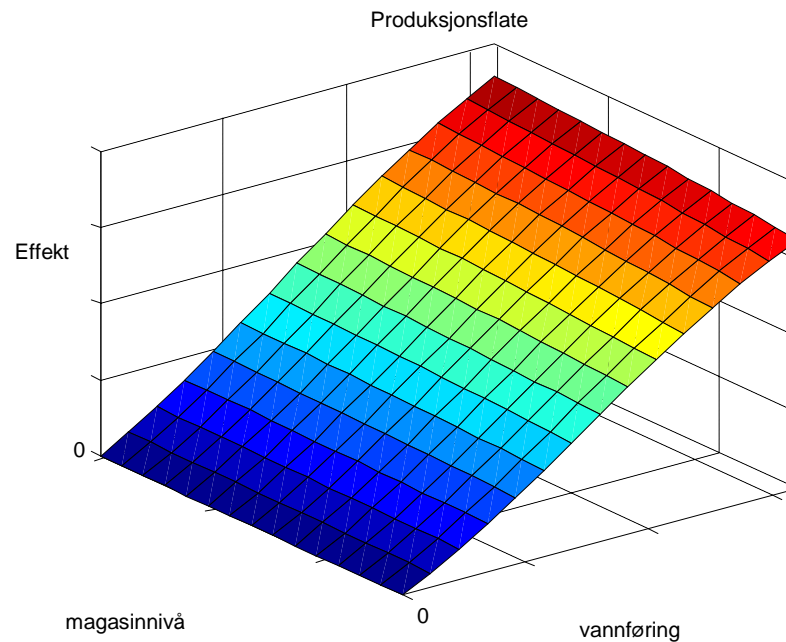
² Se vedlegg 2 for systemdata og parametere til produksjonsfunksjonen.

Produksjonsfunksjonen gir produsert effekt og uttrykkes

$$\dot{w}(\dot{q}, h) = \eta(\dot{q}) \times \dot{q} (h - k \cdot \dot{q}^2) g. \quad (6.8)$$

k Friksjonskoeffesient for vann
 g Gravitasjonskonstant

Ved å tegne denne funksjonen med gitte verdier i ett tredimensjonalt rom (figur 6.1), får en et bilde av produksjonsflaten.



Figur 6.1: Produksjonsflate for Siso

6.3 Restriksjoner i systemet

Produksjonsplanleggingsproblemet innbefatter en rekke restriksjoner. Beskravninger oppstår i hovedsak av tekniske, miljømessige og fysiske årsaker. Her gir vi en oversikt over de viktigste restriksjonene og redegjør for hvilke som er utelatt fra de matematiske formuleringene i 6.4 og 6.5.

Magasinnivå

Alle vannmagasiner har en øvre og nedre grense for vannstand. Det er opplagt at ethvert magasin vil ha et endelig maksimalt volum og heller ikke kan ha et negativt volum. Om den nedre grensen er null eller om et minste volum er påkrevd vil ikke påvirke analysen. Restriksjonen på magasinnivå og vannføring kan tenkes å være forskjellig på ulike tider av året, eksempelvis av hensyn til gyteforhold i vassdraget. I vårt tilfelle antas disse grensene imidlertid konstante.

Vannføring

I de fleste tilfeller vil det være en øvre og nedre grense på hvor mye vann som kan slippes ut av magasinet til enhver tid. I modellen presentert i 6.4 er det en øvre grense på produksjonsvolumet, men imidlertid ingen grense for hvor stort overløpet kan være.

Vannbalanse

Alt vann som kommer inn i magasinet må enten lagres eller strømme videre. Uten en vannbalanse vil problemformuleringen få et åpent løsningsrom. Modellmessig blir da resultatet at vann strømmer ut av magasinet uten at det påvirker magasinnivået.

Rampingrestriksjoner

Ramping indikerer endring i produksjonshastighet. Ved vannkraftproduksjon vil det i de aller fleste tilfeller være en begrensning på hvor raskt gjennomstrømningsvolumet og dermed produksjonshastigheten kan endres. Dette skyldes både tekniske, miljømessige og sikkerhetsmessige forhold. Innvirkningen av rampingrestriksjoner på løsningen vil trolig være lite uttalte ved en tidsoppløsning som er betraktelig lengre enn tiden for å gå fra maksimum til minimum volumstrøm indikert av restriksjonen. Vi velger derfor å neglisjere rampingrestriksjoner med bakgrunn i tidsoppløsning på en uke i vårt problem.

Begrenset overføringskapasitet

I realiteten er det begrensninger på overføringskapasitet for elektrisk kraft både innen og mellom delområder. Begrenset overføringskapasitet kan føre til flaskehals i systemet og er en direkte årsak til at det oppstår områdepriser. I oppgaven antar vi ubegrenset overføringskapasitet med det resultat at områdeprisen blir lik systemprisen.

Kostnader

Kostnader er i seg selv ikke en restriksjon, men bør inngå i målfunksjonen. I denne oppgaven er kostnader valgt utelatt fra den matematiske formuleringen av problemet. Antagelsen er at kostnadene er så små at de ikke vil påvirke driftsbeslutningene.¹ Nilsson og Sjelvgren (1997) hevder at kostnader knyttet til oppstart av vannkraftproduksjon hovedsakelig er knyttet til vedlikehold, men at tap av vann også er et problem. De påpeker at dette kan være av betydning ved korttidsplanlegging. Ved langtidsplanlegging, med tidsoppløsning på en uke, er trolig problemet mindre uttalt. I følge Fosso (2005) er kostnader knyttet til en oppstart i størrelsesorden NOK 2,500. Start- og stoppkostnader er derfor utelatt av den matematiske problemformuleringen.

¹ Med kostnader mener vi her kostnader som medfører utbetalinger, og altså ikke alternativkostnaden til vannet.

6.4 Deterministisk optimeringsmodell

Hvis kraftpriser og tilsig er kjent for alle perioder i planleggingsperioden reduserer produksjonsplanleggingsproblemet til et deterministisk optimeringsproblem. En optimal løsning vil da simpelthen allokere mest mulig vann til perioder med høyest priser.¹ I det følgende presenteres et matematisk program for å gjøre en slik deterministisk optimering av ett enkelt scenario for pris og tilsig.

Mengde

P Mengde av perioder. $P=\{0,1,2,\dots,T\}$.

Indeks

t Indeks for periode. $t=0$ indikerer første periode.

Data

π_t Kraftpris i periode t .
 ψ_t Tilsig i periode t .
 M_{\max} Øvre grense på magasinnivå.
 M_{\min} Nedre grense på magasinnivå.
 M_0 Startmagasin.
 M_{T+1} Sluttmagasin.
 Q_{\max} Øvre grense på vannstrøm gjennom stasjonen.
 r Diskonteringsrente.

Variable

V Verdi av produksjonen for totalperioden.
 m_t Magasinnivå i starten av periode t .
 l_t Overløp i periode t .
 p_t Kraftproduksjon i periode t .
 q_t Produksjonsvolum i periode t .

¹ Produksjonsfunksjonen er imidlertid generelt ulineær, slik at allokeringen ikke generelt er triviell.

Målfunksjon

$$(1) \quad \max_{q_t, m_t, l_t} V = \sum_{t=0}^T \frac{\pi_t}{(1+r)^t} p_t$$

Restriksjoner

$$(2) \quad p_t = w(m_t, q_t) \quad \forall t \in P$$

$$(3) \quad m_{t+1} - m_t + q_t + l_t = \psi_t \quad \forall t \in P$$

$$(4) \quad m_0 = M_0$$

$$(5) \quad m_{T+1} = M_{T+1}$$

$$(6) \quad M_{\min} \leq m_t \leq M_{\max} \quad \forall t \in P$$

$$(7) \quad q_t \leq Q_{\max} \quad \forall t \in P$$

$$(8) \quad q_t, l_t \geq 0 \quad \forall t \in P$$

Målfunksjonen, (1), er en sum av de neddiskonterte inntektene fra hver periode. Ligning (2) gir mengde produsert kraft i en periode som en funksjon av vannstrømvolumet og magasinnivået i starten av perioden. Produksjonsfunksjonen er generelt ulineær og gir ikke nødvendigvis et konvekst mulighetsområde. Restriksjon (3) er flytbalansen og formulerer kravet om at mengden vann som overføres fra en periode til neste må være lik startmagasinet i den foregående perioden pluss netto tilførsel av vann til magasinet i den foregående perioden. Ligning (4) og (5) er restriksjoner henholdsvis på nivået på startmagasinet og sluttmagasinet. Krav til minste og største magasinnivå er formulert i restriksjon (6). Ligning (7) begrenser maksimal produksjon, mens (8) er ikke-negativitetskrav til produksjonsvolum og overløpsvolum.

6.4.1 Anvendelser av modellen

Gitt at vi faktisk kjenner alle priser og tilsig vil det ikke være noen risiko knyttet til V . Variansen til V er altså lik null, og den riktige diskonteringsrenten vil dermed være den risikofrie renten. Modellen vil gi optimal produksjonsstrategi og verdi av produksjonen.

Modellen kan også brukes med forventet tilsig og forventet kraftpris. Den risikofrie renten vil da ikke lenger være et riktig avkastningskrav. En må da estimere et risikojustert avkastningskrav, eksempelvis med kapitalverdimodellen.

En tredje anvendelse av modellen kan være å løse et antall ulike scenarier for pris og tilsig. Gitt at scenariene gir en god representasjon av utfallsrommet, kan resultatene brukes til å finne midlere verdier for produksjon, magasinnivå, kontantstrømmer og verdi av produksjonen¹.

¹ Løsningen gir strengt tatt en øvre grense for verdien av produksjonen. Dette er nærmere diskutert i 9.

6.5 Stokastisk optimeringsmodell

Det er tidligere argumentert for at pris og tilsig er forbundet med stor usikkerhet. Den følgende optimeringsformuleringen tar eksplisitt høyde for dette, ved å la pris og tilsig være stokastiske variable.

Målfunksjon

$$(1) \quad V_t = \max_{q_t, m_t, l_t} E \left[\Pi_t \times p_t + \frac{V_{t+1}}{(1+r)} \right] \quad \forall t \in P$$

Restriksjoner

$$(2) \quad p_t = w(m_t, q_t) \quad \forall t \in P$$

$$(3) \quad m_{t+1} - m_t + q_t + l_t = \Psi_t \quad \forall t \in P$$

$$(4) \quad \mu_{V_{T+1}} = f(\Pi_T, \Psi_T, m_{T+1})$$

$$(5) \quad m_0 = M_0$$

$$(7) \quad M_{\min} \leq m_t \leq M_{\max} \quad \forall t \in P$$

$$(8) \quad q_t \leq Q_{\max} \quad \forall t \in P$$

$$(9) \quad q_t, l_t \geq 0 \quad \forall t \in P$$

Målfunksjonen er lik (2.2), bortsett fra at overløp også er innført som argument. Merk at denne modellen, i motsetning til den deterministiske, er formulert rekursivt. Det er innført en restriksjon, (4), for verdien av sluttmagasinet i stedet for volumrestriksjonen i det deterministiske programmet. De øvrige restriksjonene korresponderer med den deterministiske formuleringen.

7 Løsningsmetoder

Den deterministiske problemformuleringen løses for gitte pris- og tilsigsscenarioer ved standard optimeringsmetoder. At produksjonsfunksjonen generelt er ulineært og gir et ikke-konvekst mulighetsområde, kan imidlertid komplisere. Det deterministiske problemet er løst i forbindelse med prosjektet, og implementeringen er beskrevet i kapittel 8.

For å løse den stokastiske modellen må stokastiske optimeringsteknikker benyttes. Ved NTNU og SINTEF arbeides det med metoder basert på stokastisk dynamisk dual programmering (Fosso, 2005). I det følgende vil imidlertid Least Square Monte Carlo (Longstaff og Schwartz, 2001) som løsningsmetode foreslås. Først presenteres den generelle teorien, og deretter presenteres en algoritme for løsning av det aktuelle problemet.

7.1 Prising av amerikanske opsjoner ved simulering

Prising og optimal innløsning av derivater med amerikanske egenskaper er en av de store utfordringene innen opsjonsprising. En eier av en amerikansk opsjon må ved ethvert tidspunkt vurdere lønnsomheten av å løse inn opsjonen mot den forventede verdien av å holde opsjonen i live. Derivater med slike egenskaper kan man finne på de aller fleste finansielle markeder, eksempelvis markeder for energi, handelsvarer, utenlandsk kapital og eiendom.

7.1.1 Least Square Monte Carlo

Longstaff & Schwarz (2001) har utviklet en metode for å prise amerikanske opsjoner ved hjelp av simulering. Denne metoden tar utgangspunkt i at betingede forventninger kan estimeres ut ifra tilstandsvariable. Til denne estimeringen brukes minste kvadraters metode. Man regresserer payoff av å holde opsjonen i live, på basisfunksjoner som gjelder for verdien av de relevante tilstandsvariablene. Den beregnede verdien gir et estimat for den betingede forventningsfunksjonen. Ved å estimere den betingede forventningsfunksjonen for hver utøvelsesdato, får man et sett med funksjoner som bestemmer den optimale innløsningsstrategien for hvert scenario. Denne metoden kaller Longstaff & Schwarz 'Least Square Monte Carlo' (LSM).

7.1.2 LSM-algoritmen

Som forutsetning for LSM-algoritmen antas det et komplett underliggende sannsynlighetsrom $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ og en endelig tidshorison $(0, T)$, hvor Ω utgjør ett sett med alle mulige utfall av en stokastisk økonomi mellom tidspunkt 0 og T . s defineres som et scenario i dette utfallsrommet. \mathcal{F} utgjør et subsett av Ω som beskriver de forskjellige hendelsene ved tidspunkt T . \Pr er sannsynlighetene for elementene i \mathcal{F} . Videre defineres $F = \{\mathcal{F}_t; t \in [0, T]\}$ til å være filtreringen gitt av prisprosessene for de relevante verdipapirene i økonomien, og det antas at $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. I overensstemmelse med argumentet for nullarbitrasje antas det et eksisterende martingalt mål Q for denne økonomien.

Man er i utgangspunktet interessert i å verdisette amerikanske derivater med tilfeldige kontantstrømmer som kan forekomme i $(0, T)$. $C(s, u; t, T)$ er stien av kontantstrømmer som er generert av opsjonen, betinget på at opsjonen ikke er innløst ved eller før tidspunkt t , og på at eieren av opsjonen følger den optimale innløsningsstrategien for alle u , $t < u \leq T$.

Mange amerikanske opsjoner er kontinuerlig innløsbare, men det fokuseres her bare på amerikanske opsjoner med et antall Y innløsningstidspunkt $0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_Y = T$.

Dersom man vil evaluere kontinuerlige amerikanske opsjoner kan man tilnærme verdien på denne ved å sette Y tilstrekkelig stor.

Ved tidspunkt t_y er kontantstrømmen ved innløsning kjent for opsjonsholderen.

Kontantstrømmen for å holde opsjonen i live er derimot ikke kjent ved tidspunkt t_y . Teorien om verdisetting ved nullarbitrasje, tilsier at verdien ved å holde opsjonen i live er gitt ved å se på forventningen av de gjenværende diskonterte kontantstrømmene $C(s, u; t_k, T)$ med hensyn på det risikonøytrale målet for prising Q . Ved tidspunkt t_y kan verdien av å holde opsjonen i live $F(s; t_y)$ uttrykkes som

$$F(s; t_y) = E_Q \left[\sum_{j=y+1}^Y \exp\left(-\int_{t_y}^{t_j} r(s, u) du\right) \times C(s, t_j; t_y, T) \mid \mathcal{F}_{t_y} \right], \quad (7.1)$$

hvor $r(s, u)$ er den risikofrie diskonteringsraten, og forventningen er betinget på settet av informasjon \mathcal{F}_{t_y} ved tidspunkt t_y . Med denne fremstillingen sammenligner man den umiddelbare verdien av innløsning med denne betingede forventningen, for deretter å løse inn opsjonen så snart at kontantstrømmen for innløsning er positiv og større enn eller lik den betingede forventningen.

LSM-algoritmen arbeider seg bakover, siden stien av kontantstrømmer $C(s, u; t, T)$ fra opsjonen er definert rekursivt. $C(s, u; t_y, T)$ kan være forskjellig fra $C(s, u; t_{y+1}, T)$ ettersom det kan være optimalt å stoppe ved tidspunkt t_{y+1} , og dermed forandre alle følgende kontantstrømmer langs et scenario s . Ved tidspunkt t_{y-1} antas det at den funksjonelle formen $F(s; t_{y-1})$ i ligning (7.1) kan beskrives som en lineær kombinasjon av et visst antall sett med $\mathcal{F}_{t_{y-1}}$ -målbare basisfunksjoner.

I vedlegg 3 kan et enkelt eksempel på prising av en amerikansk kjøpsopsjon ved LSM studeres.

7.2 LSM-algoritme for produksjonsplanleggingsproblemet

I kapittel 3 ble det argumentert for at vannkraftproduksjon kan betraktes som et komplekst derivat av amerikansk karakter. Det er derfor nærliggende å vurdere eksisterende opsjonsprisinde metoder for å løse problemet. Motoren i algoritmen som presenteres her er at den forventede verdien av magasinet i neste periode kan estimeres som en funksjon av pris, tilsig og sluttmagasinnivå i inneværende periode. Disse funksjonene bestemmes ved LSM, og algoritmen er beskrevet i detalj under.

Indekser

$t \in P$: Periode

$s \in S$: Scenario

Sett

Perioder :

$$P = \{0, 1, \dots, T\}$$

Startmagasiner i en periode:

$$M^{start} = \{m_1^{start} = M_{\min}, m_2^{start}, \dots, m_{K-1}^{start}, m_K^{start} = M_{\max}\}$$

Scenarier:

$$S = \{1, 2, \dots, N\}$$

Startvolumene brukes kun i punkt 2. i algoritmen.

Scenariene består av pris- og tilsigsscenarier, som simuleres fra passende modeller. π_t^s og ψ_t^s er henholdsvis pris og tilsig i periode t i scenario s .

Definisjoner

$$reg_t \approx \frac{1}{1+r} E[V_{t+1}(\Pi_t, \Psi_t, m_{t+1})] = \mu_{V_{t+1}}$$

$$reg_t^s = reg_t(\Pi_t = \pi_t, \Psi_t = \psi_t, m_{t+1}) \approx E[V_{t+1} | \Pi_t, \Psi_t]$$

reg_t er en regresjon på et sett av basisfunksjoner av tilstandsvariablene, Π_t, Ψ_t, m_{t+1} , mot verdien i neste periode, V_{t+1} , neddiskontert.

Antagelse

Algoritmen forutsetter en eksplisitt antagelse om verdien av sluttmagasinet:

$$reg_{T+1} \equiv f(\Pi_T, \Psi_T, m_{T+1}) \approx \mu_{V_{T+1}}$$

Algoritme

1. Lås $t = T$

Gå til 2.

2. For alle $s \in S$

For alle $m_i^{start} \in M^{start}$

Løs optimeringsproblemet:

$$V_t^{s, m_i^{start}} = \max_{q_t^s, l_t^s} \left[\pi_t^s \times w(m_i^{start}, q_t^s) + reg_{t+1}^s \right]$$

s.t.

$$m_{t+1}^s = m_i^{start} - q_t^s - l_t^s + \psi_t^s$$

$$Q_{\min} \leq q_t^s \leq Q_{\max}$$

$$M_{\min} \leq m_{t+1}^s \leq M_{\max}$$

$$l_t^s \geq 0$$

Slutt løkke

Slutt løkke

Gå til 3.

3. Bruk resultatene fra 2. til å gjøre regresjon for å finne $reg_t \approx \mu_{V_t}$.

Gå til 4.

4. Hvis $t = 0$

Gå til 5.

Ellers

Lås $t = t - 1$

Gå til 2.

5. For alle $s \in S$

Lås $m_t^s = M_t$

Slutt løkke

Gå til 6.

6. For alle $s \in S$

Løs optimeringsproblemet :

$$V_t = \max_{q_t^s, l_t^s} \left[\pi_t^s \times w(m_t^s, q_t^s) + \text{reg}_{t+1}^s \right]$$

s.t.

$$m_{t+1}^s = m_t^s - q_t^s - l_t^s + \psi_t^s$$

$$Q_{\min} \leq q_t^s \leq Q_{\max}$$

$$M_{\min} \leq m_{t+1}^s \leq M_{\max}$$

$$l_t^s \geq 0$$

Slutt løkke

Gå til 7.

7. Hvis $t = T$

Gå til 8.

Ellers

Lås $t = t + 1$

Gå til 5.

8. For alle $s \in S$

For alle $p \in P$

$$PVCF_t^s = \frac{\pi_t^s \times h(m_t^s, q_t^s)}{(1+r)^{-t}}$$

Slutt løkke

Slutt løkke

$$V_0 = \sum_{i=0}^{T+1} \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N PVCF_i^j \right)$$

7.2.1 Forklaring av LSM-algoritme

Punkt 1 til 5 i algoritmen sørger for å estimere en funksjon for den forventede verdien av vannet i neste periode, for alle perioder i analysen. Dette gjøres rekursivt med utgangspunkt i en antagelse om verdien av vannet i sluttmagasinet. I punkt 6-7 brukes de estimerte funksjonene forover, med utgangspunkt i det faktiske startmagasinet, for å bestemme optimal produksjon i hver periode for hvert scenario. Til slutt beregnes i punkt 8 forventet totalverdi av produksjonen med utgangspunkt i tidligere beregninger. Informasjon om forventet produksjon, forventede kontantstrømmer i hver periode og forventet magasinnivå kan også enkelt hentes ut. En mer detaljert beskrivelse av hvert skritt følger:

1. Indeks t låses til T , i den betydning at kun periode T betraktes ved første ankomst til 2.

2. Verdien av anlegget i periode t maksimeres ved å maksimere inntjeningen i perioden pluss forventet verdi av sluttmagasinet i perioden innenfor beskrankningene. Den forventede verdien av sluttmagasinet er en funksjon av prisen og tilsiget samt sluttmagasinvolumet i perioden. Optimeringsproblemet som løses i 2. er dermed et enperiode problem med kun to frie variable. Imidlertid vil en for hver periode måtte løse $K \times N$ problemer. Hvert problem er altså lite, men med mange ulike startmagasiner kan det bli svært mange problemer til sammen.
3. Fra 2. har vi en verdi for anlegget for hvert scenario i den aktuelle perioden, t . For å estimere en funksjon for forventningsverdien av denne verdien i $t-1$ gjøres en regresjon på tilstandsvariablene pris og tilsig i $t-1$ samt startmagasin i periode t . Dette kan gjøres ved å minimere den midlere kvadratiske prediksjonsfeilen for et uttrykk av polynomtype. Regresjonene må lagres til bruk i punkt 6.
4. Hvis t er større enn 0 låses t til $t-1$ og punkt 2. og 3. gjentas. Når t blir lik 0 har vi forventningsfunksjoner for alle perioder $t=1, \dots, T$. Ved overgang til punkt 5. forblir t låst til 0.
5. Ved første ankomst til 5. låses variablene for startmagasinet til det faktiske startmagasinet. Ved senere ankomster til 5. låses startmagasinet for den aktuelle perioden til sluttmagasinet for den forrige perioden.
6. For den aktuelle perioden finner en optimal produksjon i hvert scenario ved å maksimere inntjening pluss forventet verdi av sluttmagasinet. Den forventede verdien av sluttmagasinet representeres ved regresjonene fra 2.
7. Hvis optimal produksjon er bestemt for alle perioder går algoritmen til 8. Ellers går algoritmen tilbake til 5 og 6 for å bestemme optimal produksjon i neste periode.
8. Når vi kjenner optimal produksjon og magasinnivå i alle perioder og scenarier, brukes denne informasjonen til å beregne nåverdien av produksjonen i alle perioder og scenarier. Totalverdien av anlegget i analyseperioden beregnes ved å summere midlere nåverdi av produksjonen for alle perioder.

7.2.2 Verdi av sluttmagasin ved analysehorisonten

Det er ikke gjort noen vurdering av hvordan sluttmagasinet kan prises, men funksjonen for denne verdien bør trolig være økende i pris og sluttmagasinvolum. Å identifisere en fornuftig funksjon for verdien av sluttmagasinet kan eksempelvis baseres på fundamentalmodeller for framtidig forventet spotpris. Det påpekes at ved valg av en analysemetode som baserer seg på å treffe et gitt sluttmagasin, gjøres en implisitt verdivurdering av sluttmagasinet. Hvis det er mulig vil det derfor være gunstig å gjøre denne antagelsen eksplisitt, ved å introdusere en funksjon for denne verdien.

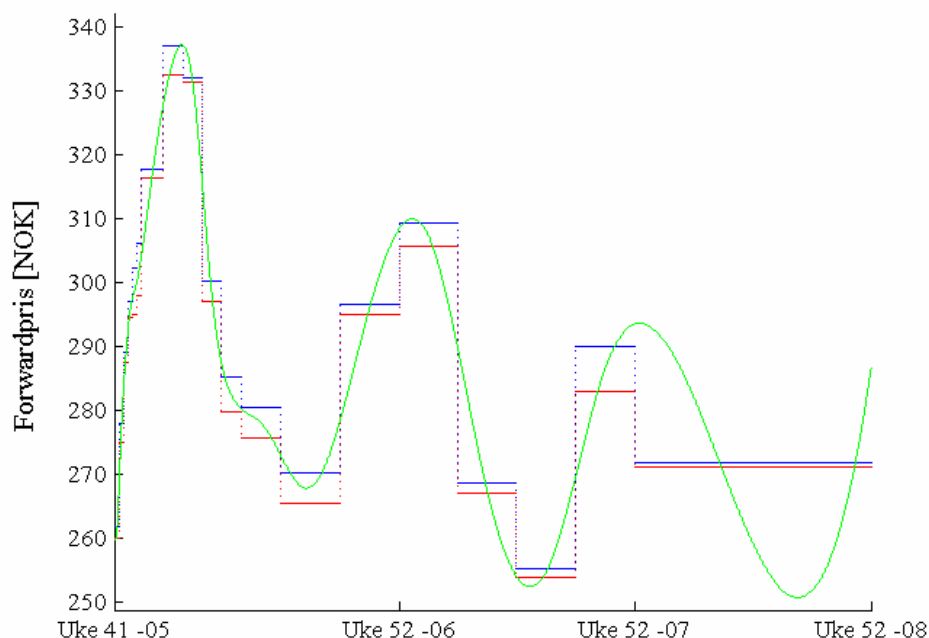
8 Implementering av den deterministiske modellen

I forbindelse med prosjektet er produksjonsplanleggingsproblemet løst for Siso ved å implementere modellen presentert i avsnitt 6.4 i Matlab[®]. Programstrukturen og Matlabkoden kan studeres i vedlegg 4.

Et antall scenarier ble generert ved å simulere prismodellen i 6.1.1 og tilsigsmodellen i 6.1.2. Optimal forventet produksjon ble deretter funnet ved å ta gjennomsnittet over alle scenariene optimert enkeltvis. Forutnevnte og andre resultater er presentert og diskutert i kapittel 9. Analysens tidshorisont var fra 10.10.2005 til 31.12.2008. Her følger en mer inngående beskrivelse av hvordan modellen ble implementert.

8.1 Kalibrering av prismodell

Spotprismodellen ble kalibrert mot terminstrukturen 10.10.2005 for forward- og futurekontrakter med data hentet fra nordpool.no. Terminstrukturen ble glattet ad hoc ved å interpolere med kubiske splines. Hvis terminstrukturen tegnes i planet danner bid og ask for hver kontrakt et rektangel. Den glattede terminstrukturen treffer disse punktene. Under glattingen ble det imidlertid ikke satt noen restriksjoner på den gjennomsnittlige kontraktpriisen. Resultatet innebærer derfor sannsynligvis arbitrasjemuligheter i forhold til den opprinnelige terminstrukturen. Ved endene på terminstrukturen ble det gjort ytterligere justeringer for å oppnå en mer realistisk sesongeffekt. Resultatet kan studeres i figur 8.1.



Figur 8.1: Glatt forwardkurve.

8.2 Simulering av pris og tilsig

Pris og tilsig ble simulert ved å gjøre diskretiseringen (6.4). Startpris ble satt til startpunktet på den glatte forwardkurven, og starttilsig ble satt til midlere tilsig for uke 41. Onsdag i hver uke ble valgt som punkt for simulering av pris og tilsig.

Det ble introdusert korrelasjon mellom prosessene ved å trekke de standardnormalfordelte variablene korrelert. Dette ble gjort ved Cholesky faktorisering. Imidlertid er det ikke gjort noen analyse av den faktiske korrelasjonsstrukturen mellom tidsserier for pris og tilsig. Grunnen til at det likevel er valgt å introdusere korrelasjon er basert på en antagelse om at det er negativ korrelasjon mellom prosessene. Korrelasjonsfaktoren ble valgt til $\rho = -0.2$. Det ble også gjort simuleringer uten korrelasjon.

8.3 Linearisering av produksjonsfunksjonen

Ved implementeringen ble produksjonsfunksjonen tilnærmet som en konstant ganger vannstrømmen:

$$\dot{w} \approx k \times \dot{q}, \quad k = \text{konstant}. \quad (8.1)$$

Optimeringsproblemet reduserer da til et lineært program. Det er ikke gjort noen kvantitativ analyse av feilen ved å gjøre dette, men som påpekt i avsnitt 9.1 synes ikke tilnærmingen totalt urealistisk. Den faktiske produksjonsfunksjonen ble imidlertid brukt etter optimeringen for å beregne reell produksjon. La nedre indeks benevne periode og øvre indeks benevne scenario. Beregningen av generert kraft ble da gjort som følger:

$$\bar{m}_t^s = \frac{m_{t+1}^s - m_t^s}{2}, \quad (8.2)$$

$$\text{og } w(m_t, q_t) \approx \dot{w} \left(\frac{q_t^s}{\Delta t}, \bar{m}_t^s \right) \Delta t. \quad (8.3)$$

8.4 Diskonteringsfaktor

Det er i oppgaven ikke tatt standpunkt til hva som vil være et fornuftig avkastningskrav. Det er gjort simuleringer både med en risikofri rente¹ og med et risikjustert avkastningskrav². Det som i praksis bør velges som avkastningskrav vil ha sammenheng med forholdene diskutert i kapittel 5.

¹ Den risikofrie renten ble valgt tilnærmet lik ettårig NIBOR.

² $r = 8,9\%$.

9 Presentasjon av resultater og diskusjon¹

Den deterministiske scenarionoptimeringen gir en øvre grense for verdien av produksjonen i perioden. Grunnen til det er en optimal løsning av modellen innebærer at vannet allokeres betinget på sikre, framtidige verdier for pris- og tilsig. I realiteten er ikke dette tilgjengelig informasjon og verdien av anlegget må derfor være lavere i praksis. Løsningen gir imidlertid en mulighet for å teste resultatene fra mer realistiske modeller. I det følgende presenteres og diskuteres resultatene fra den deterministiske modellen.

9.1 Innvirkning av forenkling av produksjonsfunksjonen

I vedlegg 5 er ulike snitt av produksjonsfunksjonen tegnet ved ulike verdier for vannstrøm og magasinnivå. Ved konstant magasinnivå er funksjonen tilnærmet lineær og den relative endringen i effekt er også begrenset. Det er derfor nærliggende å tro at å forenkle produksjonsfunksjonen til en konstant ganger vannstrømmen ikke vil medføre store feil. Imidlertid ser vi av figur 9.1 at løsningen svært ofte fører til at produksjonen er enten på den øvre grensen eller null. Dette er også illustrert for ett enkelt scenario i vedlegg 6. Av figur 6.1 er det synlig at ved full produksjon er det gunstig å ligge høyt i magasinet. Forenklingen som er gjort innfører dermed bias mot lave magasinnivåer i løsningen. En løsning på dette, som fortsatt ville kunne løses ved lineær programmering, kan være å tilnærme produksjonsfunksjonen med flere plane restriksjoner som danner et konvekst mulighetsområde.

9.2 Verdien av produksjonen

Tabell 9.1 viser resultater for verdien av produksjonen i perioden for ulike start- og sluttmagasin. Som ventet er verdien høyere for stort startmagasin og lite sluttmagasin, enn for lavt startmagasin og stort sluttmagasin. Ved å sammenligne tabell 9.1 og tabell 9.3 ser vi også at verdien er størst ved den laveste diskonteringsrente. Disse observasjonene tyder på at modellen gir fornuftige resultater.

m_0 [Mm ³]	m_T [Mm ³]	V_0 [MNOK]	ρ	N

Tabell 9.1: Verdi av produksjon for ulike start- og sluttmagasiner. $r = 2,5\%$ og N er antall scenarier.

¹ Tallverdier i tabeller er utelatt i denne versjonen av rapporten for å beskytte Elkems interesser.

Av tabell 9.3 ser vi at verdien av anlegget endres marginalt ved en økning fra 10000 til 30000 scenarier med $m_0=400$, $m_T=500$ og $\rho=-0,2$. Lignende observasjoner ble gjort også for andre kombinasjoner av start- og sluttmagasin. Dette tyder på at 10000 scenarier er tilstrekkelig for å få en rimelig konvergens for verdien.

9.3 Sensitivitet

Ved å addere og subtrahere en enhet for alle kontrakter i forwardkurven oppnås, ved å bruke ligning (9.1), et uttrykk for sensitiviteten til verdien av produksjonen med hensyn på et parallelt skift i terminstrukturen. Resultater for denne sensitiviteten er presentert i tabell 9.2.

$$\frac{\partial V}{\partial F_{\text{kurve}}} \approx \Delta \equiv \frac{V_0^{\Delta+} - V_0^{\Delta-}}{2} \quad (9.1)$$

m_0 [Mm ³]	m_T [Mm ³]	$V_0^{\Delta+}$ [MNOK]	$V_0^{\Delta-}$ [MNOK]	ρ	N	Δ [MNOK]

Tabell 9.2: Forandring i magasinverdi som følge av forandring i forwardpriser med gitte start- og sluttmagasiner.

Ved å sette korrelasjonskoeffisienten lik null under simuleringen får vi verdier som er tilnærmet like verdiene med korrelasjon (tabell 9.3). Dette kan tyde på at en lav korrelasjon ikke nødvendigvis har en stor innvirkning på verdien.

m_0 [Mm ³]	m_T [Mm ³]	V_0 [MNOK]	ρ	N

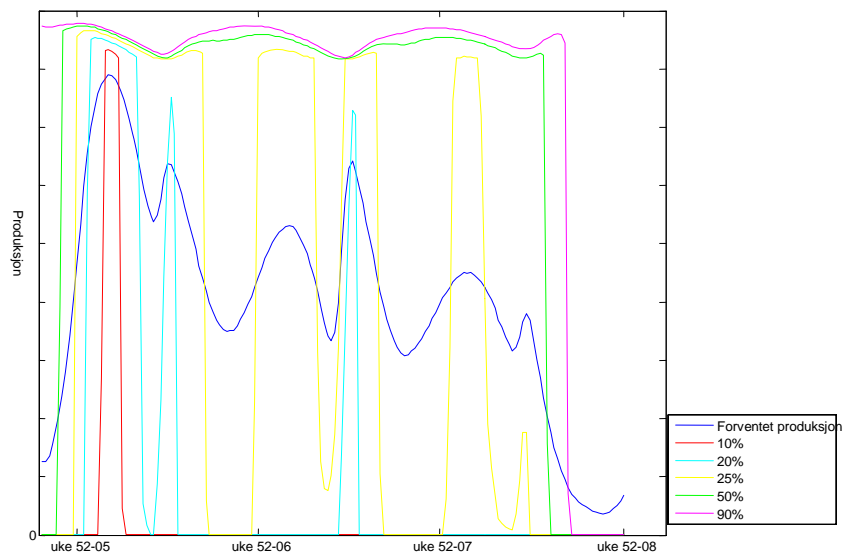
Tabell 9.3: Verdier av magasin med gitt start- og sluttmagasin, diskonteringsrente er $r = 8,9$ %.

9.4 Forventet produksjonsstrategi

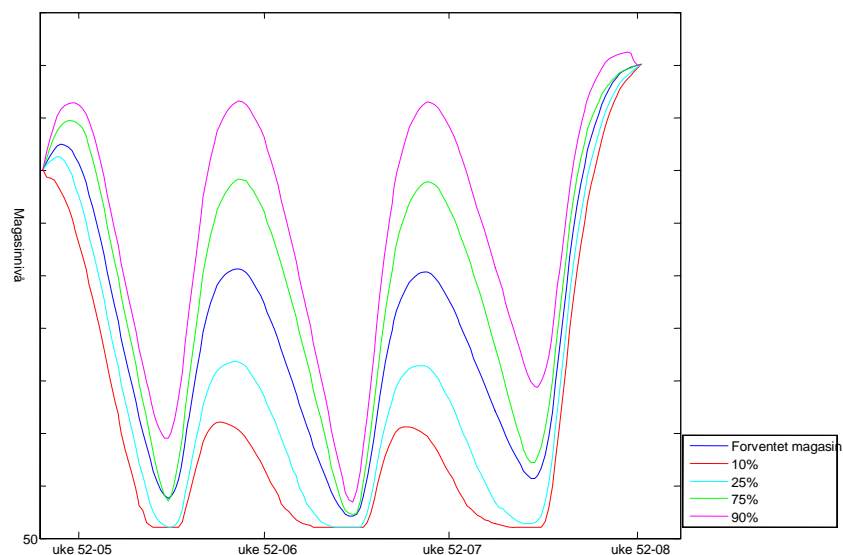
Figur 9.1 og 9.2 viser eksempler på midlere nivå og prosentiler for henholdsvis produksjon og magasinivå med $r = 8,9$ %. De motsvarende grafene for $r = 2,5$ % er vist i vedlegg 7. De midlere verdiene for produksjonen utviser en klar sesongvariasjon og en nedadgående trend. Sesongvariasjonen er delvis et resultat av sesongvariasjonen i terminstrukturen. I tillegg er det en topp i produksjonen rundt uke 30 hvert år. Dette skyldes sannsynligvis fare for flom i en

del scenarier. Effekten er sterkere med $r = 8,9\%$. Grunnen til det kan være at verdien av produksjon i nær tid er relativt større med høyere diskonteringsrente.

Ulik diskonteringsrente gir også utslag i magasinnivå, som forventningsmessig ligger lavere med høy diskonteringsrente (sammenlign vedlegg 7 og figur 9.2). Magasinnivået ligger videre for mange scenarier svært nær minimumsgrensen om sommeren (se figur 9.2). Dette illustrerer hvordan den deterministiske modellen utnytter grensene til det fulle.



Figur 9.1 Forventet produksjon for gitt start- og sluttmagasin med prosentiler, diskonteringsrente er $r = 8,9\%$.

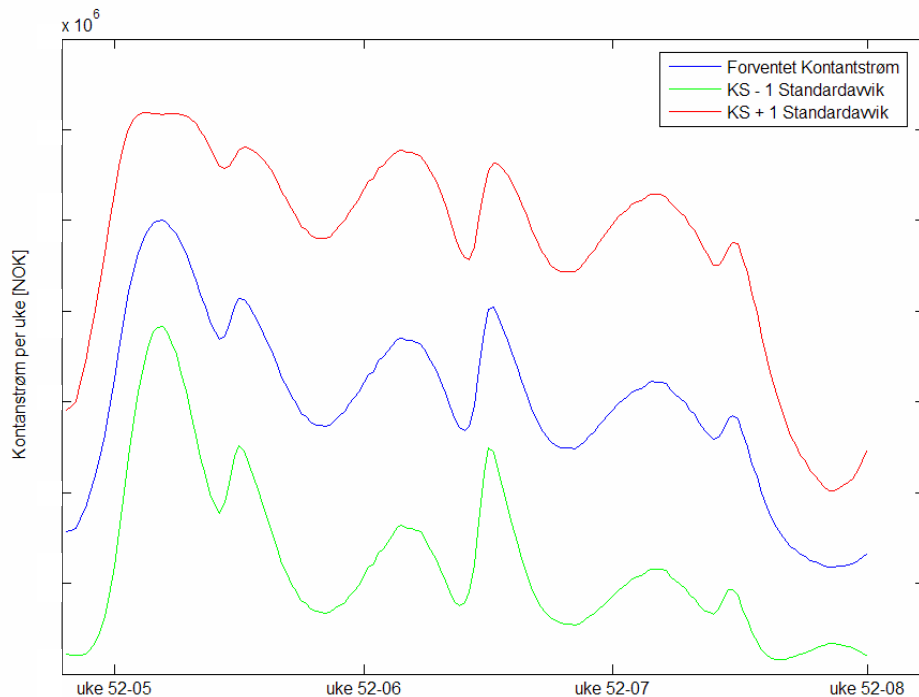


Figur 9.2 Forventet forandring i magasinnivå med prosentiler for gitt start- og sluttmagasin, diskonteringsrenter er $r = 8,9\%$.

9.5 Forventede kontantstrømmer

Som en følge av ulik produksjonsstrategi blir også kontantstrømmene for ulike diskonteringsrenter forskjellige. Et eksempel for midlere kontantstrøm med standardavvik er tegnet i figur 9.3 og den motsvarende grafen for $r = 2,5\%$ er vist i vedlegg 6.

Kontantstrømkurvene har visse likhetstrekk med forwardkurven. Dette er intuitivt ettersom forwardkurven innehar informasjon om spotprisutviklingen. Det kan også observeres en økning i kontantstrømmene på forsommeren, noe som trolig skyldes vårflom i denne perioden. Det er som nevnt sannsynligvis nødvendig med tilstrekkelig tapping i disse periodene for å hindre overløp, selv om spotprisen ikke nødvendigvis er høy. Figurene viser at standardavviket er høyt, noe som tilsier stor usikkerhet i kontantstrømmene i perioden. Dette er igjen et resultat av av/på løsningen som en deterministisk scenariomodell gir. I vedlegg 6 er produksjonsforløpet for ett enkelt scenario illustrert, og viser tydelig hvordan løsningen veksler mellom svært høy produksjon og null produksjon. Når det samtidig ikke er noen kobling mellom scenariene under optimeringen, blir nødvendigvis variansen svært høy over scenariene, og dette gir igjen utslag i kontantstrømmene.



Figur 9.3 Kontantstrømmer for gitt start- og sluttmagasin, diskonteringsrente er $r = 8,9\%$

9.6 Forbedringspotensiale med en stokastisk optimeringsmodell

Den største og mest åpenbare svakheten til en deterministisk modell er at den ikke tar hensyn til stokastikken i en problemstilling. Resultatene vil, som vist, i realiteten føre til en produksjonsstrategi som er mer dristig enn det tilgjengelig informasjon skulle tilsa.

Ved å benytte en stokastisk modell forventes det at produksjonen blir mer forsiktig og at magasingrensene ikke utnyttes like ekstremt. Ved å samtidig sette en verdi på vannet i sluttmagasinet kan en oppnå en mer realistisk fordeling for magasinnivå¹ også i slutten av analyseperioden. Den foreslåtte LSM-algoritmen tar høyde for begge de nevnte forhold.

9.7 Anbefalinger til videre arbeid

Videre arbeid med utspring i denne prosjektoppgaven kan innebære en implementering av LSM-algoritmen for et enkelt eksempel. Dersom implementeringen og testingen viser lovende resultater for et forenklet anlegg, så vil det videre være hensiktsmessig å teste anvendelsen av metoden på mer realistiske systemer. For å få et benchmark for verdien av produksjonen kan den deterministiske scenariomodellen brukes. Den deterministiske modellen bør da også benytte verdifunksjonen for sluttmagasinet, istedenfor et fastsatt sluttvolum. Algoritmen kan også testes mot anerkjente løsningsmetoder basert på stokastisk dual dynamisk programmering.

Gitt at LSM-algoritmen fungerer i praksis vil det være svært interessant å bruke modellen også til å finne hedgestrategier for produksjonen. En prismodell som betinger på informasjon både i forwardkurven og informasjon om volatilitet bør da brukes. Forholdene forbundet med tilsigsrisiko bør i denne forbindelse også analyseres nærmere.

¹ Et fastsatt sluttmagasin fører til at variansen over scenariene blir svært liten mot slutten av analyseperioden.

10 Konklusjon

Et magasin i tilknytning til et vannkraftverk kan betraktes som et komplekst derivat av amerikansk karakter på kraftpris og tilsig. For å maksimere markedsværdien av produksjonen bør en prismodell som er kalibrert til markedet benyttes i produksjonsplanleggingen.

Produksjonsplanleggingsproblemet preges av stor usikkerhet i forhold til framtidig pris og tilsig. En stokastisk modell for langtidsplanlegging vil derfor være å foretrekke. Årsaken til dette er at en deterministisk modell forutsetter kjente inngangsdata, som i realiteten er usikre. En deterministisk scenarionoptimering fører dermed til at grensene blir for godt utnyttet. For å oppnå større fleksibilitet mot slutten av analysehorisonten bør også verdien av sluttmagasinet uttrykkes som en funksjon av sluttmagasinnivå, pris- og tilsigsforventninger.

Ved å bruke en modell som fanger opp stokastikken i produksjonsplanleggingsproblemet er man bedre rustet til å ta fornuftige avgjørelser. Den foreslåtte LSM-algoritmen er en metode som tar hensyn til slike forhold. Denne metoden er ikke kommersielt utviklet for planlegging av vannkraftproduksjon. Det er nødvendig med implementering og testing i storskala før man kan konkludere om algoritmen er egnet til det tiltenkte formålet.

11 Referanser

- Black, F. & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
- Brockwell, P. J & Davis, R. A. (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting* (2. utgave). New York: Springer-Verlag New York, Inc.
- Clewlow, L. & Strickland, C. (2000). *Energy Derivatives. Pricing and Risk Management*. London: Lacima Publications.
- Davison, M., Rasmussen, H. & Thompson, M. (2004). Valuation and Optimal Control of Electric Power Plants in Competitive Markets. *Operations Research*, 53(4), 546-562.
- Dixit A. K. & Pindyck, R. S. (1994). *Investment Under Uncertainty*. Princeton: Princeton University Press.
- Eydeland, A. & Wolyniec, K. (2003). *Energy and Power Risk Management. New Developments in Modeling, Pricing and Hedging*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.
- Fleten, S. E. & Wallace, S. W. (2003). Stochastic programming models in energy. | A. Ruszczyński & A. Shapiro (Red.), *Stochastic programming*. (ss. 637-677).
- Fosso, O. B. (2005). *Produksjonsplanlegging i vannkraftbaserte systemer*. Notat, institutt for elkraftteknikk, NTNU.
- Haug, E. G. (2005). Practical Valuation of Power Derivatives. Working paper, NTNU.
- Lucia, J. J. og Schwartz, E. (2001) Electricity Prices and Power Derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange. *Review of Derivatives Research*, 5, 5-50.
- McDonald, R. L. (2003). *Derivatives Markets*. Boston: Addison Wesley.
- Nilsson, O. & Sjelvgren, D. (1997). Hydro Unit Start-up costs and Their Impact on the Short Term Scheduling Strategies of Swedish Power Producers. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12(1), 38-43.
- Olje- og energidepartementet. (2005). *Fakta 2005 om energi- og vassdragsvirksomheten*.
- Ross, S.M. (2003). *Introduction to Probability Models* (8. utgave). London: Academic Press.
- Schwartz, E. S. (1997). The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. *The Journal of Finance*, 52(3), 923-973.
- Trigeorgis, L. (1996). *Real Options. Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*. Cambridge: The MIT Press.
- Tseng, C.L. & Barz, G. (2002) Short Term Generation Asset Valuation: A Real Option Approach. *Operations Research*, 50(2), 297-310.

Elektroniske ressurser

Programvare. (2005). Lastet ned 13. november 2005, fra
http://www.sintef.no/content/page1____3557.aspx

Nord Pool. (2005). Lastet ned 25. oktober 2005, fra
<http://www.nordpool.no/>

Samtaler

Gjelsvik, A. (2005). Samtale november, 2005.