



Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse

**MASTEROPPGAVE**

for

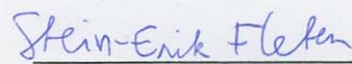
**STUD.TECHN. MARTIN GEVING PEDERSEN**

<b>Fagområde</b>	<b>Investering, finans og økonomistyring</b> Accounting and Finance
<b>Utleveringsdato</b>	15.01.2006
<b>Tittel</b>	<b>Produksjonsplanlegging og risikostyring for vannkraftanlegg</b> Hydroelectric power scheduling and risk management
<b>Formål</b>	Bidra til å utvikle bedre produksjons- og risikostyringsverktøy for vannkraftprodusenter

**Følgende hovedpunkter skal behandles:**

1. Modellere usikkerhetene i et produksjonsplanleggingsproblem med tanke på bruk i optimering/risikostyringssammenheng.
2. Modellere driftsplanleggingsproblemet på mellomlang sikt som et storskala optimeringsproblem.
3. Demonstrere bruk av modellene over til risikostyring av vannkraftporteføljen for eksempel ved hjelp av delta-hedging.

  
Olav Fagerlid  
prodekan

  
Stein-Erik Fleten  
faglærer



NTNU  
Norges teknisk-naturvitenskapelige  
universitet

## STANDARDAVTALE

Avtale mellom student Martin Geving Pedersen  
faglærer ved NTNU Stein-Erik Fleten  
bedrift/virksomhet Trondheim Energiverk

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (heretter NTNU)

om bruk og utnyttelse av spesifikasjoner og resultater fremlagt ved besvarelse av  
masteroppgave i henhold til NTNU's eksamensforskrift og utfyllende regler til denne.

1. Studenten skal utføre besvarelse av den tildelte masteroppgaven ved:

TRONDHEIM ENERGIVERK KRAFT AS (bedrift/virksomhet).

Oppgavens tittel er: Produksjonsplanlegging og  
risikostyring for vannkraftanlegg

2. Studenten har opphavsrett til det som er anført i besvarelsen. Selve besvarelsen med tegninger, modeller og apparatur, så vel som dataprogramvare som inngår som del av eller vedlegg til besvarelsen, er NTNU's eiendom. Besvarelsens innhold kan vederlagsfritt benyttes av NTNU til undervisnings- og forskningsformål. Besvarelsen, og vedlegg til denne, må ikke nyttes til andre formål.
3. Studenten har rett til å publisere sin besvarelse, eller deler av den, som en selvstendig avhandling eller som del av et større arbeid, eller i popularisert form i hvilken som helst offentlig publikasjon.
4. Bedriften har rett til å få utlevert et eksemplar av besvarelsen med vedlegg, og til å gjøre seg kjent med NTNU's bedømmelse av den. Bedriften gis en frist på 3 måneder fra besvarelsen er innlevert til NTNU for sensurering til å vurdere patentbarhet og søke patent på hele eller deler av resultatet av besvarelsen. Besvarelsens spesifikasjoner og resultater kan bedriften nytte i sin egen virksomhet, men ikke utnytte økonomisk uten etter egen skriftlig avtale, på fastsatt skjema, med de øvrige parter i denne avtale.



NTNU  
Norges teknisk-naturvitenskapelige  
Universitet

5. I særlige tilfelle kan offentliggjørelsen av besvarelsen i samsvar med pkt. 2 og 3 ovenfor båndlegges (utsettes) for en periode på inntil 5 år. Det skal i slike tilfelle inngås en egen båndleggingsavtale, på fastsatt skjema, mellom student, faglærer, bedrift/virksomhet og NTNU. Båndleggingsavtalen opprettes i 4 - fire eksemplarer hvor partene skal ha hvert sitt. Båndleggingsavtalen er gyldig når den er godkjent og underskrevet av studiedirektøren ved NTNU.
6. Denne avtale skal ha gyldighet foran andre avtaler som er eller blir opprettet mellom to av partene som er nevnt ovenfor.
7. Eventuell uenighet som følge av denne avtale skal søkes løst ved forhandlinger. -Hvis dette ikke fører frem, er partene enige om å la tvisten avgjøres ved voldgift i henhold til norsk lov. Tvisten avgjøres av byrettsjustitiarius i Trondheim eller den han oppnevner.
8. Denne avtale er underskrevet i 4 - fire - eksemplarer hvor partene skal ha hvert sitt.
9. Denne avtale er gyldig når den er godkjent og underskrevet av NTNUs studiedirektør.

Trondheim.....  
(sted)

24/4-2006.....  
(dato)

Martin G. Pedersen.....  
student

Stein-Eirik Fleben.....  
faglærer ved NTNU

Stig Rohdén.....  
for bedriften/virksomheten

Avtalen godkjennes: NTNU

Institutt for industriell økonomi  
og teknologiledelse

701 TRONDHEIM

24.04.06  
Fakultetsdirektør, NTNU (dato, stempel og signatur)

Arne Børge Brundtland



NTNU  
Norges teknisk-naturvitenskapelige  
Universitet

**TILLEGGSAVTALE / ØKONOMISK UTNYTTELSE**

(Med hjemmel i standardavtalens § 4)

Tilleggsavtale mellom student Martin Geving Pedersen  
faglærer ved NTNU Stein-Erik Fleten  
bedrift/virksomhet Trondheim Energiverk.....og

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (heretter NTNU)

i tilknytning til inngått standardavtale om bruk og utnyttelse av spesifikasjoner og resultater fremlagt ved besvarelse av masteroppgave i henhold til NTNU's eksamensforskrift og utfyllende regler til denne.

1. Med hjemmel i standardavtalens § 4 inngått mellom de ovennevnte parter er alle partene blitt enige om at det med dette inngås en tilleggsavtale som gir bedriften/virksomheten rett til å kunne utnytte masteroppgavens/besvarelsens spesifikasjoner og resultater i økonomisk sammenheng.
2. Denne avtale er underskrevet i 4 - fire - eksemplarer hvor partene skal ha hvert sitt.
3. Denne avtale er gyldig når den er godkjent og underskrevet av NTNUs studiedirektør.

Trondheim  
(sted)

24/4-2006  
(dato)

Martin G. Pedersen  
student

Stein-Erik Fleten  
faglærer ved NTNU

TEU  
Stig Røholt

NTNU  
Institutt for industriell økonomi

for bedriften/virksomheten

Avtalen godkjennes: **og teknologiledelse**  
24.04.06 7491 TRONDHEIM

Anne Juvik Brævdal  
Fakultetsdirektør, NTNU (dato, stempel og signatur)

# HOVEDOPPGAVE

vårsemester 2006

Student

Martin Geving Pedersen  
Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse

## ERKLÆRING

Jeg erklærer herved på ære og samvittighet at jeg har utført ovennevnte hovedoppgave selv og uten noen som helst ulovlig hjelp

Trondheim  
Sted

25.06.2006  
dato

Martin Geving Pedersen  
Signatur

Besvarelsen med tegninger m.v. blir i henhold til Forskrifter om eksamen § 3.5, NTNU's eiendom. Arbeidene - eller resultater fra disse - kan derfor ikke utnyttes til andre formål uten etter avtale med de interesserte parter.

## **Forord**

Denne masteroppgaven er skrevet ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, våren 2006, ved institutt for industriell økonomi og teknologiledelse. Denne oppgaven ble utført i samarbeid med Trondheim Energiverk Kraft AS.

Jeg vil rette en stor takk til Stein-Erik Fleten for god veiledning og verdifulle innspill gjennom hele semesteret. Takk til Erling Kylling ved Trondheim Energiverk Kraft AS for god støtte, raske og konstruktive tilbakemeldinger, og tilgang til viktige data. Anders Gjelsvik ved Sintef Energiforskning fortjener også en takk for diskusjoner rundt eksisterende metoder og innfallsvinkler.

Trondheim, 25. juni 2006

Martin Geving Pedersen

## **Sammendrag**

Vannkraftprodusentens hovedutfordring er å tilstrebe optimal forvaltning av vannet i magasiner. Stor usikkerhet i framtidig strømpris og tilsig kompliserer beslutningsprosessen. Denne masteroppgaven vedrører hvordan den deterministiske ekvivalenten til det stokastiske problemet, i form av scenariotrær, kan anvendes for å analysere og løse produksjonsplanleggingsproblemet.

Etter dereguleringen av det norske kraftmarkedet i 1991 har norske vannkraftprodusenter vært nødt til å forholde seg til en svært volatil strømpris. Som handelsvare er strøm spesiell, siden lagringsmulighetene er svært begrensede. Standard arbitrasjeargumenter kan derfor ikke brukes for å prise framtidige leveranser. I 1993 ble den fellesnordiske kraftbørsen Nord Pool ASA etablert og i ettertid har det utviklet seg et relativt likvid marked for ulike kontrakter. Spotprisen utviser imidlertid av fundamentale grunner fortsatt spesielle egenskaper som mange og høye spisser, sesongavhengighet og mean reversion (Lucia og Schwartz, 2002). Lucia og Schwartz (2002) påviser også tunge haler og positiv skjevhet i fordelingen for avkastningen til spotprisen. For å maksimere markedsverdien bør produsenten til tross for dette utnytte tilgjengelig informasjon i terminmarkedet under produksjonsplanleggingen.

I rapporten presenteres en stokastisk optimeringsformulering for produksjonsplanleggingsproblemet. Modellen gjelder for et system med flere magasiner og stasjoner. Det antas også at produsenten er pristaker og at målet for planleggingen er å maksimere markedsverdien av produksjonen.

Den stokastiske formuleringen er blitt implementert som et lineært program i Matlab<sup>®</sup>, Scenred<sup>©</sup> og Mosel Xpress<sup>®</sup>. Prisbeskrivelsen som er brukt er basert på Ornstein-Uhlenbeck-prosessen, og er kalibrert til terminstrukturen for future- og forwardkontrakter. Ved å kjøre modellen for mange ulike scenarier for pris og tilsig finnes en forventningsverdi av produksjonen og et forløp for optimal forventet produksjonsstrategi og magasinforvaltning.

Verdien av den forventede produksjonen konvergerer for økende antall noder i de genererte scenariotræne. Løsningstiden antas akseptabel for et vannkraftverk bestående av 14 magasiner og 10 stasjoner. Sensitiviteten til de periodevise kontantstrømmene finnes ved å foreta et

parallelt skift i forwardkurven, men for hedging anbefales det en prismetode basert på andre ordens markedsinformasjon.

Løsningsmetoden brukt i oppgaven virker lovende med tanke på konvergens av verdi og løsnings tid, men en mer detaljert modell anbefales for en eventuell testing mot kommersielle produksjonsplanleggingsverktøy.



## Innholdsfortegnelse

<b>1</b>	<b>INNLEDNING</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>PRODUKSJONSPLANLEGGINGSPROBLEMET</b> .....	<b>2</b>
2.1	VANNVERDIKRITERIET .....	2
2.2	KLASSISK PLANLEGGINGSHIERARKI .....	5
2.2.1	Langtidsplanlegging.....	6
2.2.2	Sesongplanlegging .....	6
2.2.3	Korttidsplanlegging.....	6
2.2.4	Koblinger mellom de ulike nivåene i planleggingshierarkiet.....	7
2.2.5	Analysehorisont og reguleringsgrad.....	7
2.2.6	Kommersielle løsninger for produksjonsplanlegging.....	8
<b>3</b>	<b>PRODUKSJONSPLANLEGGING I ET FINANSIELT PERSPEKTIV</b> .....	<b>9</b>
3.1	ANTAGELSER.....	9
3.1.1	Vannmagasinet som opphav til merverdi .....	10
3.1.2	Vannkraft som spread opsjon.....	11
<b>4</b>	<b>KRAFTMARKEDET</b> .....	<b>14</b>
4.1	DET FYSISKE MARKEDET .....	14
4.2	DET FINANSIELLE MARKEDET .....	15
4.3	SAMMENHENG MELLOM SPOT OG FORWARDPRIS .....	16
4.4	STRØMPRISENS OPPFØRSEL .....	17
4.4.1	Sprang i pris.....	17
4.4.2	Mean reversion.....	18
4.4.3	Tunge haler i prisfordelingen.....	19
4.4.4	Sesongavhengighet.....	19
<b>5</b>	<b>HEDGING AV KRAFTPRODUKSJON</b> .....	<b>20</b>
5.1	IKKE-KOMPLETT MARKED .....	21
5.2	MARKEDSPRIS PÅ TILSIGSRISIKO .....	21
5.3	POTENSIELLE HEDGEPRODUKTER OG FORVENTEDE POSISJONER .....	23
5.4	DELTAHEDGING.....	23
<b>6</b>	<b>MODELLER</b> .....	<b>25</b>
6.1	STOKASTISKE MODELLER .....	25
6.1.1	Viktige faktorer ved valg av prismetode for bruk i produksjonsplanlegging .....	25
6.1.2	Prismetode .....	26
6.1.3	Estimering av parametere i prismetoden .....	27
6.1.4	Tilsiagsmetode .....	28
6.1.5	Estimering av parametere i tilsiagsmodellene .....	28
6.2	MODELLERING AV SCENARIOTRÆR .....	29
6.3	RESTRIKSJONER I SYSTEMET.....	31
6.3.1	Magasinnivå.....	31
6.3.2	Vannføring.....	31
6.3.3	Vannbalanse.....	31
6.3.4	Rampingrestriksjoner .....	32
6.3.5	Begrenset overføringskapasitet.....	32
6.3.6	Kostnader .....	32
6.3.7	Topologi .....	33
6.3.8	Skatt.....	33
6.4	DETERMINISTISK OPTIMERINGSMODELL.....	34
6.5	STOKASTISK OPTIMERINGSMODELL.....	36
6.6	DETERMINISTISK EKVIVALENT .....	37
<b>7</b>	<b>IMPLEMENTERING AV MODELLEN</b> .....	<b>39</b>

7.1	SKALERING AV ANALYSEPERIODEN .....	39
7.2	KALIBRERING AV PRISMODELL .....	40
7.3	SIMULERING AV PRIS OG TILSIG .....	41
7.4	SCENARIOTREGENERERING .....	41
7.5	BRUK AV ENERGIEKVIVALENTER .....	42
7.6	DISKONTERINGSFAKTOR .....	43
7.7	TOPOLOGI I NEA-NIDELVVASSDRAGET .....	43
7.8	VERDI AV SLUTTMAGASIN VED ANALYSEHORIZONTEN.....	44
<b>8</b>	<b>PRESENTASJON AV RESULTATER.....</b>	<b>45</b>
8.1	SCENARIOTREGENERERING .....	45
8.2	OPTIMERINGSANALYSE .....	47
8.3	VERDI AV PRODUKSJON .....	49
8.4	FORVENTET PRODUKSJONSSTRATEGI .....	50
8.5	FORVENTET KONTANTSTRØM .....	52
8.6	SENSITIVITET.....	53
<b>9</b>	<b>DISKUSJON.....</b>	<b>54</b>
<b>10</b>	<b>ANBEFALING TIL VIDERE ARBEIDE.....</b>	<b>56</b>
<b>11</b>	<b>REFERANSELISTE.....</b>	<b>57</b>
	<b>VEDLEGG 1: ALGORITMER FOR SCENARIOREDUKSJON OG GENERERING AV SCENARIOTRÆR.....</b>	<b>59</b>
	<b>VEDLEGG 2: NEA-NIDELVVASSDRAGET .....</b>	<b>64</b>
	<b>VEDLEGG 3: VASSDRAGSSKJEMA.....</b>	<b>65</b>
	<b>VEDLEGG 4: GRAFER AV FORVENTET PRODUKSJON OG TOTALT MAGASININNHOLD .....</b>	<b>67</b>
	<b>VEDLEGG 5: GRAF AV FORVENTEDE KONTANTSTRØMMER.....</b>	<b>68</b>
	<b>VEDLEGG 6: DIAGRAMMER FRA ANALYSE AV TILSIGSDATA FOR AUNE VANNMERKE. ....</b>	<b>69</b>
	<b>VEDLEGG 7: DIAGRAMMER FRA ANALYSE AV TILSIGSDATA FOR RATHE VANNMERKE ....</b>	<b>72</b>
	<b>VEDLEGG 8: RESULTATER FRA SPOTPRISANALYSE.....</b>	<b>75</b>
	<b>VEDLEGG 9: SCENARIOTRÆR.....</b>	<b>76</b>
	<b>VEDLEGG 10: PROGRAMSTRUKTUR.....</b>	<b>77</b>

## **1 Innledning**

Etter dereguleringen av det nordiske kraftmarkedet er situasjonen for norske vannkraftprodusenter betraktelig endret. Omstillingen har medført at aktørene må ta hensyn til et komplisert og volatilt marked under produksjonsplanleggingen.

Både framtidig pris og tilsig er forbundet med høy grad av usikkerhet. Generelt er modellene som brukes for produksjonsplanlegging likevel basert på deterministiske formuleringer. Dette skyldes at stokastiske optimeringsmodeller er mer krevende å løse. Kommersialiserte modeller for produksjonsplanlegging, som Samkjøringsmodellen og Vansimtap, baserer seg videre på fundamentalmodeller for å beskrive utviklingen til strømprisen. Det kan imidlertid argumenteres for at målet bør være å maksimere markedsverdien av produksjonen. Med et finansielt forankret utgangspunkt vil derfor en ideell modell for produksjonsplanlegging basere seg på en stokastisk optimeringsmodell med en prisbeskrivelse som betinger på tilgjengelig markedsinformasjon.

I masteroppgaven er det tatt utgangspunkt i et kraftverk drevet av Trondheim Energiverk Kraft AS. En stokastisk modell presenteres, og er implementert for det aktuelle systemet. Prisbeskrivelsen i modellen betinger på informasjon i terminstrukturen for future- og forwardkontrakter.

Rapportens struktur er som følger: I kapittel 2 analyseres og drøftes produksjonsplanleggingsproblemet generelt og i kapittel 3 i et finansielt perspektiv. Deretter følger i kapittel 4 en beskrivelse av det nordiske kraftmarkedet, egenskaper ved strømprisen og de ulike kontraktene som handles. I kapittel 5 diskuteres hedging av vannkraftproduksjon generelt og pris på tilsigsrisiko. Modeller for pris og tilsig, en beskrivelse av det konkrete systemet og optimeringsmodeller presenteres i kapittel 6. Implementeringen av den deterministiske ekvivalenten er beskrevet i kapittel 7, og resultatene fra den deterministiske modellen presenteres i kapittel 8 før diskusjonen i kapittel 9. I kapittel 10 foreslås det anbefalinger til utvidelser av modellen.

## **2 Produksjonsplanleggingsproblemet**

Forvaltning av vannet i magasiner er vannkraftprodusentens<sup>1</sup> ultimate utfordring. Generelt ønsker produsenten å bestemme optimal mengde vann som skal slippes gjennom systemet til enhver tid. Dette er ekvivalent med at produsenten må bestemme hvor mye vann som skal lagres til et senere tidspunkt. Planlegging av produksjonen er avgjørende i denne sammenheng. For å komme fram til en best mulig produksjonsplan er det nødvendig å ta hensyn til usikkerheten i problemet. Stokastikken knytter seg hovedsakelig til usikkerhet i kraftpriser og tilsig<sup>2</sup>. Målet for optimaliseringen avhenger imidlertid av i hvilken grad kraftmarkedet er regulert.

I et regulert marked gir produksjonsplanleggingen opphav til et kostnadsminimaliseringsproblem med gitte etterspørselsrestriksjoner (Wallace og Fleten, 2003). Når produsenten er forpliktet til å møte en prisuelastisk etterspørsel, vil ikke kraftprisen inngå i optimeringsproblemet. Det beste produsenten kan oppnå er å minimere kostnader. Dette var tilnærmet situasjonen for norske vannkraftprodusenter tidligere.

Etter dereguleringen av det norske kraftmarkedet i 1991 og opprettelsen av kraftbørsen Nord Pool i 1993 er produksjonsplanleggingsproblemet endret. Produsenten kan nå gjøre transaksjoner i markedet, for å møte forpliktelser, som alternativ til egen produksjon. Wallace og Fleten (2003) gir et formelt argument for at etterspørselsrestriksjonene blir overflødige i et deregulert marked. Målet i dagens situasjon bør dermed være å maksimere forventet markedsverdi av produksjonen (Wallace og Fleten, 2003).

### ***2.1 Vannverdikriteriet***

For å vise konkret hvordan avveiningen mellom å lagre vannet og å produsere umiddelbart gir føringer for produksjonsplanen er det hensiktsmessig å innføre en formell notasjon for verdien av anlegget. La  $V_t$  være markedsverdien av anlegget på tidspunkt  $t$ . Vi kan da skrive:

---

<sup>1</sup> Heretter kun referert til som produsenten.

<sup>2</sup> Det vil også være usikkerhet knyttet til forhold som uforutsett havari.

$$V_t = \max E \left[ \sum_{i=t}^{\infty} \frac{\Pi_i \times w(m_i, q_i)}{(1+r)^{i-t}} \right], \quad (2.1)$$

der  $\Pi_t$  er den stokastiske strømprisen,  $w$  er strømproduksjon som funksjon av magasinnivå,  $m_t$ , og vannstrøm,  $q_t$ <sup>3</sup>, og  $r$  er en passende diskonteringsrente. Verdien av anlegget er altså en sum av de neddiskonterte inntektene fra hver periode. Det vil si at alle kostnader ved driften er neglisjert, samt at det er gjort en diskretisering av den i utgangspunktet kontinuerlige beslutningsprosessen.

Verdien av anlegget kan åpenbart også formuleres rekursivt:

$$V_t = \max_{q_t, m_t} \left[ E[\Pi_t \times w(m_t, q_t)] + \frac{E[V_{t+1}]}{1+r} \right]. \quad (2.2)$$

Gitt at vi står i starten av periode  $t$  og antar at utfallet for prisen,  $\pi_t$ , dermed er kjent så blir (2.2):

$$V_t = \max_{q_t, m_t} \left\{ \pi_t \times w(m_t, q_t) + \frac{E[V_{t+1}]}{1+r} \right\}. \quad (2.3)$$

Det er ønskelig å finne et kriterium for optimal forvaltning av vannet, og uttrykket som maksimeres i (2.3) deriveres derfor med hensyn på vannstrømmen:

$$\frac{d}{dq_t} \left( \pi_t \times w(m_t, q_t) + \frac{E[V_{t+1}]}{1+r} \right) = \frac{\partial}{\partial q_t} (\pi_t \times w(m_t, q_t)) + \frac{\partial \mu_{V_{t+1}}}{\partial m_{t+1}} \frac{\partial m_{t+1}}{\partial q_t}. \quad (2.4)$$

$\mu_{V_{t+1}} = \mu_{V_{t+1}}(m_{t+1}, \psi_t, \pi_t)$  er forventet verdi av anlegget i periode  $t+1$  neddiskontert og  $\psi_t$  er utfallet for tilsiget. Den deriverte av magasinnivået med hensyn på vannstrømmen må være lik -1. Dette gjenspeiler direkte flytbalansen i den matematiske formuleringen av

---

<sup>3</sup>  $[q_t] = m^3$

produksjonsplanleggingsproblemet<sup>4</sup>. Ved å kreve førsteordensbetingelsene for optimalitet oppfylt får vi dermed:

$$\frac{\partial \mu_{V_{t+1}}}{\partial m_{t+1}} = \pi_t \frac{\partial w(m_t, q_t)}{\partial q_t}. \quad (2.5)$$

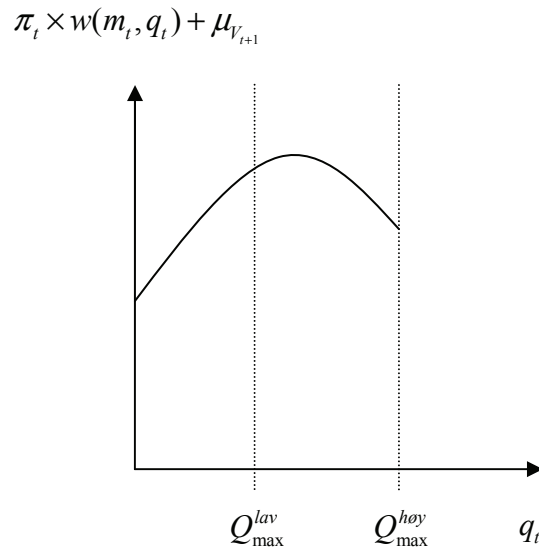
Ligning (2.5) betyr i økonomisk forstand at produsenten i enhver periode bør produsere inntil den marginale endringen av den forventede verdien av anlegget i den påfølgende periode neddiskontert blir lik den marginale inntjeningen fra produksjonen i inneværende periode. Det er denne størrelsen,  $\partial \mu_{V_{t+1}} / \partial m_{t+1}$ , som omtales som marginal vannverdi. I resten av oppgaven vil vi referere til denne størrelsen kun som vannverdi.

I den forutgående analysen er det ikke tatt hensyn til at det kan være restriksjoner på vannstrømmen,  $q_t$ , eller på magasinnivået,  $m_t$ . Hvis magasinet er fullt, og tilsiget er større enn maksimal vannstrøm, vil det oppstå overløp.  $\partial m_{t+1} / \partial q_t$  vil bli null og vannverdien er følgelig null. Et annet spesialtilfelle som kan oppstå er at prisen i en periode er så høy at det er optimalt å produsere så mye som mulig, selv om det ikke er fare for overløp. (2.5) vil da ikke nødvendigvis kunne oppfylles som likhet. Dette er illustrert i figur 2.1, hvor  $Q_{\max}$  er maksimal vannstrøm. Mer generelt vil dermed kriteriet for optimal produksjon være på formen:

$$\begin{aligned} & \max q_t \\ & s.t. \\ & \frac{\partial \mu_{V_{t+1}}}{\partial m_{t+1}} \leq \pi_t \frac{\partial w(m_t, q_t)}{\partial q_t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

---

<sup>4</sup> Se kapittel 6.4, 6.5 og 6.6.



Figur 2.1: Illustrasjon av verdi av produksjon som funksjon av  $q$ .

## 2.2 Klassisk planleggingshierarki<sup>5</sup>

Vannverdikriteriet gir oss et formelt vilkår for hvordan vi bør utforme produksjonsplanen. Imidlertid er kompleksiteten i produksjonsplanleggingsproblemet fortsatt betydelig. Det er usikkerhet i priser og tilsig, det fysiske systemet kan bestå av flere magasiner med ulike koblinger og flere stasjoner, deler av problemet er ulineært og mange ulike restriksjoner og føringer spiller inn. Samtidig er det nødvendig med en lang analysehorisont for å fange opp langsiktige trender og sesongvariasjoner. En enkelt modell med tilstrekkelig detaljeringsgrad og horisont vil bli uhandterbar regnemessig. Det har derfor vært vanlig å dele opp planleggingen ved å bruke flere modeller med ulik detaljeringsgrad for ulike tidshorisonter. Tabell 2.1 angir omtrentlige tidshorisonter og tilsvarende metoder som er i bruk for planleggingen.

---

<sup>5</sup> Delkapittelet er basert på notatet Produksjonsplanlegging i vannkraftbaserte systemer, Institutt for elkraftteknikk, NTNU, 2005.

<b>Horisont</b>	<b>Metode</b>
Langtidsplanlegging (1-5 år)	Stokastiske modeller for optimalisering og simulering
Sesongplanlegging (3-18 måneder)	Multi-scenario deterministiske optimeringsmodeller
Korttidsplanlegging (1-2 uker)	Deterministiske optimaliseringsmodeller

**Tabell 2.1: Metoder brukt for ulike tidshorisonter.**

### **2.2.1 Langtidsplanlegging**

I langtidsanalysen vil en søke å fange opp langsiktige svingninger i pris og tilsig. Med en lang analysehorisont er det vanlig å gjøre en rekke forenklinger. Eksempelvis aggregeres reservoarene i systemet til et magasin. Resultatene fra langtidsplanleggingen gir styringssignaler til neste steg i planleggingshierarkiet.

### **2.2.2 Sesongplanlegging**

Hensikten med sesongplanleggingen er å øke detaljeringsgraden og gi ytterligere signaler til korttidsplanleggingen. Analysen må samtidig kobles opp mot resultatene fra langtidsplanleggingen. Koblingen mellom de ulike trinnene er diskutert under. Gitt tilstrekkelig regnekraft vil sesongplanleggingen kunne bli overflødig (Fosso, 2005).

### **2.2.3 Korttidsplanlegging**

For de nærmeste dagene og ukene forutsettes prisutvikling og tilsig kjent. Modellene bør være en tilstrekkelig realistisk beskrivelse av systemet til at kjøreplaner kan genereres med tidsoppløsning på en time eller kortere. Kjøreplanene fra korttidsplanleggingen må i tillegg simuleres for å sikre at det ikke oppstår konflikter med regler og føringer som ikke fanges opp av modellene.



## 2.2.4 Koblinger mellom de ulike nivåene i planleggingshierarkiet

Hensiktsmessige koblinger mellom de ulike planleggingsnivåene er svært viktig for å skape konsistens i analysen. Ulike løsninger er skissert i tabell 2.2.

Type kobling	Karakteristikk
Volumkobling	Nivåene kobles gjennom et fastsatt magasinnivå på et gitt tidspunkt. Dette er en enkel løsning, men gir lite fleksibilitet.
Volumkobling med straff	Avvik fra gitt volum tillates, men gir en straff i målfunksjonen. Dette gir større fleksibilitet, men det kan være problematisk å bestemme en hensiktsmessig straff.
Vannverdikobling	Nivåene kobles ved å sikte mot en gitt vannverdi på koblingstidspunktet. Dette gir større fleksibilitet, og gjør det enklere å oppnå konsistens når eksempelvis magasiner er aggregert i langtidsmodellen.

Tabell 2.2: Koblinger mellom planleggingsnivåer.

Tidspunktet for kobling mellom nivåene kan også være av stor betydning. Deler av året vil koblingene være forbundet med større usikkerhet enn andre. Eksempelvis er det vanlig å koble langtidsanalysen og sesonganalysen under vårflommen eller på høsten når snøen legger seg.

## 2.2.5 Analysehorisont og reguleringsgrad

Intervallene som er indikert for analysehorisonten har et relativt stort spenn, særlig for sesong- og langtidsplanleggingen. En av grunnene til dette er at det er stor variasjon i hvor godt ulike system er regulert. I den forbindelse innfører vi begrepet reguleringsgrad. La  $U$  være midlere årstilsig og  $M_{\max}$  og  $M_{\min}$  være henholdsvis maksimalt og minste magasinnivå. Reguleringsgrad for et vannmagasin er da definert som følger:

$$R = \frac{M_{\max} - M_{\min}}{U}. \quad (2.7)$$

Når produsenten foretar et valg av analysehorisont, bør reguleringsgraden taes i betraktning (Gjelsvik, 2006). Med et godt regulert<sup>6</sup> magasin er det mulig å foreta disponeringer som er mer langsiktige enn med en lavere reguleringsgrad. Generelt vil dermed en høy reguleringsgrad tilsi en lang analysehorisont. Grunnen til dette er at analysen er endelig, og vi må dermed gjøre bestemte antagelser med hensyn til grensebetingelser i siste periode. Hvis reguleringsgraden eksempelvis er så lav at vi forventer flom hver vår, uavhengig av produksjonsplan, trenger vi ikke å planlegge lenger enn til vårflommen, siden vi kan anta at vannverdien er lik null. For et system med høy reguleringsgrad vil feilaktige grensebetingelser kunne gi store utslag dersom analysehorisonten velges for kort.

### **2.2.6 Kommersielle løsninger for produksjonsplanlegging**

De mest anvendte planleggingsmodellene i bruk i Norden er de SINTEF-utviklede verktøyene Samkjøringsmodellen og Vansimtap (sintef.no, 2005). Samkjøringsmodellen er beregnet for analyse av større system og gir blant annet spotprisprognoser. Vansimtap er beregnet for sesong- og langtidsplanlegging for den enkelte produsent. SHOP er et annet SINTEF-produkt som er spesielt tilpasset kortidsplanlegging av vannkraft.

---

<sup>6</sup> Med godt regulert menes høy reguleringsgrad.

### **3 Produksjonsplanlegging i et finansielt perspektiv**

Strømpriser og tilsig har som tidligere nevnt en høy grad av stokastikk, og det grunnleggende problemet i produksjonsplanleggingen er å bestemme hvordan fleksibiliteten best kan utnyttes. I et finansperspektiv er det derfor nærliggende å vurdere realopsjonsanalyse som tilnærming for å prisse produksjonen. Dette kapitlet vil sette fokus på hva opsjonaliteten i produksjonsplanleggingsproblemet innebærer. For øvrig gir Dixit og Pindyck (1994) og Trigeorgis (1996) helhetlige innføringer i realopsjonsanalyse generelt. Eydeland og Wolyniec (2003) presenterer metoder for realopsjonsanalyse rettet mot energibransjen. Davison, Rasmussen og Thompson (2004) og Tseng og Barz (2002) er representanter for nyere utvikling av realopsjonsmetoder anvendt på kraftproduksjon.

#### ***3.1 Antagelser***

I den videre analysen ligger flere antagelser til grunn. Antagelsene er som følger:

1. Kapitalmarkedene er velfungerende og komplette i den forstand at målet for produsenten alltid vil være å maksimere markedsverdien av produksjonen.
2. Produsentens disposisjoner påvirker ikke priser eller andre aktørers disposisjoner.
3. Produksjonskostnader neglisjeres.

Antagelse 1 vil ikke være oppfylt i praksis for et vannkraftverk. Hovedgrunnen til det er at det ikke eksisterer noe marked for tilsigsrisiko. Hvorvidt kraftmarkedet er tilnærmet komplett er også diskutabelt. Dette er nærmere diskutert i 5.1.

For mindre aktører er det grunn til å tro at antagelse 2 holder. For store produsenter, eksempelvis Statkraft, vil trolig antagelsen ikke holde. En stor aktør vil kunne gjøre nytte av spillteoretiske tilnærminger for å løse problemet. Dette vil ikke bli nærmere diskutert i denne oppgaven.

### **3.1.1 Vannmagasinet som opphav til merverdi**

Et elvekraftverk uten magasin har ingen lagringsmuligheter for vannet. Produsenten har i denne situasjonen ingen muligheter til å gjøre disposisjoner vedrørende produksjonen i forskjellige perioder.<sup>7</sup> Å finne verdien av kraftverket reduseres da til å forstå og modellere tilsigs- og prisprosessene (Eydeland & Wolyniec, 2003).

Verdien av et magasin i tilknytning til et kraftverk er en følge av at magasinet gir muligheter for arbitrasje i tid. Strømpriser utviser store og delvis forutsigbare sesongvariasjoner<sup>8</sup>. Magasinet gir da muligheter for å lagre vann fra perioder med lav pris til perioder med høy pris.

Følgende eksempel søker å illustrere hvordan magasinet gir opphav til merverdi, og hvordan denne verdien er et resultat av en opsjon med amerikansk karakter:

*Betrakt en diskret situasjon med kun to perioder og null tilsig. Prisen i periode 0 er kjent og  $k$  er en konstant. La videre:*

$$\Pi_1 \in \{\Pi_1^l, \Pi_1^h\}$$

$$\Pi_1^l = n \times \pi_0$$

$$\Pi_1^h = u \times \pi_0$$

$$w(m, q) = kq$$

$$n \leq 1 + r \leq u$$

*Produsenten har i denne situasjonen en amerikansk opsjon på å produsere nå eller i neste periode, gitt at muligheten for produksjon er begrenset til disse to periodene. Merk at den lineære produksjonsfunksjonen fører til at det aldri vil være optimalt å produsere i begge perioder. Teorien for binom opsjonsprising (se for eksempel McDonald (2003)) gir da verdien,  $V_0$ , som følger:*

---

<sup>7</sup> Vedlikehold kan imidlertid legges til perioder med lav strømpris / lav vannføring.

<sup>8</sup> Se 4.4.4.

$$p^* = \frac{(1+r) - n}{u - n}$$

$$V_0 = km \times \max \left[ \pi_0, \frac{(p^* \Pi_1^h + (1-p^*) \Pi_1^l)}{1+r} \right]$$

Eksempelet over er svært forenklet. I realiteten vil driftsbeslutningen være av kontinuerlig karakter, det vil være et stokastisk tilsig, fysiske restriksjoner på magasinnivå og vannføring og en ulineær produksjonsfunksjon. Opsjonaliteten i problemet vil like fullt være tilstede, men i en langt mer kompleks form.

### 3.1.2 Vannkraft som spread opsjon

I avsnitt 2.1 ble det vist at optimal produksjon er gitt ved vannverdikriteriet. Davison, Rasmussen og Thompson (2004) utleder et alternativt kriterium i kontinuerlig tid. Kriteriet gjelder i et relativt generelt univers med hensyn til pris- og tilsigsprosess. Gitt at vi står i t gir kriteriet at optimal vannstrøm tilfredsstillende uttrykket

$$\max_{\dot{q}_t} \left[ \pi_t \times \dot{w}(m_t, \dot{q}_t) - \dot{q}_t \frac{\partial V_t}{\partial m_t} \right], \quad (3.1)$$

der  $\dot{w}$  er produsert effekt som funksjon av magasinnivå og momentan vannstrøm,  $\dot{q}$ . Hvis vi går over til diskret tid ved å gjøre tilnærmingen

$$\frac{\partial V_t}{\partial m_t} \approx \frac{\partial \mu_{V_{t+1}}}{\partial m_{t+1}} \quad (3.2)$$

og lar

$$\dot{w}(m_t, \dot{q}_t) \rightarrow w(m_t, q_t), \quad (3.3)$$

så får vi følgende uttrykk:

$$\max_{q_t} \left[ \pi_t \times h(m_t, q_t) - q_t \frac{\partial \mu_{V_{t+1}}}{\partial m_{t+1}} \right]. \quad (3.4)$$

(3.4) gir oss ikke utbetalingsstrukturen fra opsjonen direkte, men viser at vannet har en verdi og hvordan denne verdien er med på å bestemme optimal produksjon. Hvis vi tolker  $\partial \mu_{V_{t+1}} / \partial m_{t+1}$  som enhetskostnaden for vannet, så gir (3.4) at optimal produksjonsstrategi maksimerer differansen mellom inntjeningen og alternativkostnadene til vannet. I en situasjon der det kun er mulig å enten forbruke et konstant volum eller ikke produsere tar (3.4) form av en spread opsjon med differansen mellom markedsverdien av produsert kraft og verdien av vannet som underliggende.

La  $q_t^*$  benevne optimalt produksjonsvolum. Verdien av produksjonen kan da ved (2.3) uttrykkes som følger:

$$V_t = \Pi_t \times h(m_t, q_t^*) + \mu_{V_{t+1}}. \quad (3.5)$$

For å undersøke feilen i (3.2) deriverer vi (3.5) med hensyn på magasinnivået:

$$\frac{\partial V_t}{\partial m_t} = \Pi_t \frac{\partial h(m_t, q_t^*)}{\partial m_t} + \frac{\partial \mu_{V_{t+1}}}{\partial m_{t+1}} \frac{\partial m_{t+1}}{\partial m_t}. \quad (3.6)$$

Gitt at det ikke oppstår overløp så vil  $\partial m_{t+1} / \partial m_t = 1$ , og feilen i (3.4) vil avhenge av hvor bratt produksjonsfunksjonen er i m-retningen. Hvis det oppstår overløp vil ikke lenger  $\partial m_{t+1} / \partial m_t$  være definert. Vi har imidlertid tidligere argumentert for at vannverdien i denne situasjonen er lik null. (3.4) fører da til at produksjonen vil gå til maksimal produksjon, som er et fornuftig resultat. Det presiseres at innføringen av (3.4) er gjort for å illustrere dynamikken i problemet, og ikke er et resultat av en stringent matematisk analyse.

For å oppsummere så har produsenten i hver periode en opsjon på å løse inn vann for å produsere kraft. Opsjonen er som tidligere diskutert av amerikansk karakter. Ytterligere

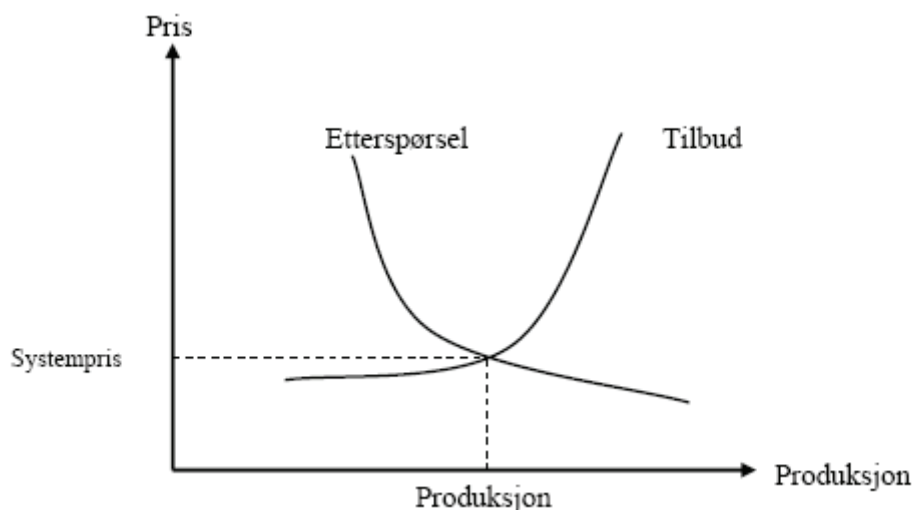
forhold som kompliserer prisingen er at innløsningskursen er en stokastisk funksjon av tilstandsvariablene. Framtidig innløsningskurs påvirkes videre av de disposisjoner vi gjør i dag og et stokastisk tilsig. Verdien på underliggende avhenger heller ikke kun av strømprisen, men også av magasinnivå og hvor mye vann vi velger å løse inn.

## 4 Kraftmarkedet

I 1991 ble det foretatt en deregulering av det norske markedet for elektrisk kraft. I kjølvannet av dette ble den fellesnordiske kraftbørsen Nord Pool opprettet. Denne kraftbørsen har økt i omfang etter hvert som de andre nordiske landene også har åpnet for å deregulere markedene. Nord Pools oppgaver er å drifte det fysiske markedet (Elspot) og administrere de finansielle (Eltermin og Eloption). Nord Pool garanterer også for enighet og leveranse, ved å være en nøytral motpart for både kjøper og selger.

### 4.1 Det fysiske markedet

Elspot er et marked hvor det blir handlet kraftkontrakter for fysisk leveranse for hver av de 24 timene det påfølgende døgnet. Markedet fungerer på den måten at de som ønsker å kjøpe eller selge kraft angir pris og kvantum for det de vil handle i de ulike timene. For hver time i det neste døgnet får man da en systempris, som kommer frem av krysningen mellom den totale tilbuds- og etterspørselskurven for alle deltakerne i markedet (se figur 4.1). Dersom det ikke er begrensninger i overføringskapasitet blir spotprisen lik systemprisen.

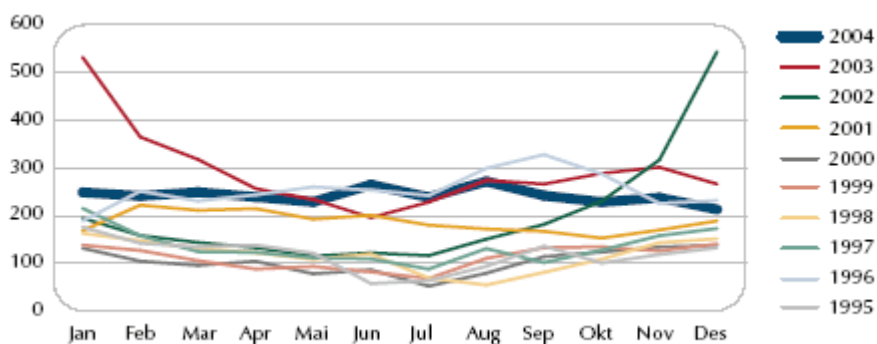


Figur 4.1: Sammenheng mellom systempris og tilbud/etterspørsel i markedet.



Faktorer som påvirker systemprisen er i særlig grad sesong (temperatur) og periode på døgnet (Lucia & Schwartz, 2002). Ved lave temperaturer vil etterspørselen øke og systemprisen gå opp.

I Norge kommer 99% av elkraften fra vannkraftverk og i Norden 55% (nordpool.no, 2006). På grunn av dette vil systemprisen være svært avhengig av fyllingsgraden i magasinene. Variasjonene kan observeres i figur 4.2, der systemprisen er typisk høy i vintermånedene og lav om sommeren. Det er også verdt å merke seg hvordan systemprisen blir påvirket av perioder med lite nedbør slik som i vinteren 2002/2003.



Figur 4.2: Systempris i NOK pr MWh fra 1992 til 2004, (Nordpool.no).

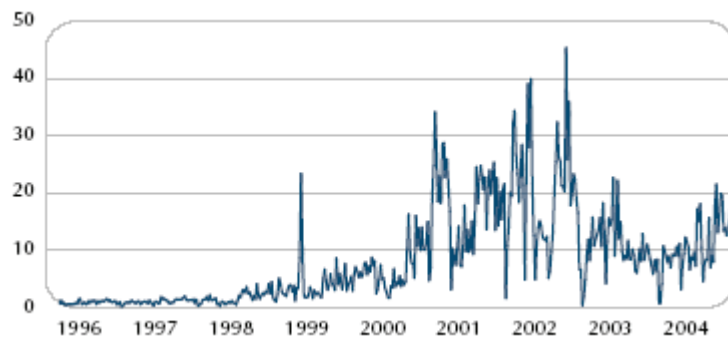
## ***4.2 Det finansielle markedet***

På markedet Eltermin blir det handlet forskjellige typer future- og forwardkontrakter oppdelt ut ifra ulike leveringsperioder. Det handles i dag futurekontrakter for dager og uker og forwardkontrakter for måneder, kvartaler og år. Kontraktene er standardiserte og er på 1 MW, innenfor sine respektive leveringsperioder. I 2004 ble det omsatt for 148,5 Mrd NOK noe som tilsvarte 590 TWh (se figur 4.3). Hovedforskjellen på futures og forwards ligger i at førstnevnte har mark-to-market oppgjør, mens sistnevnte har akkumulert oppgjør etter siste leveringsdag. Det handles kontrakter med levering opptil tre år frem i tid.

Ingen av forwardkontraktene på Nord Pool innebærer faktisk fysisk leveranse, men blir gjort opp mot systemprisen i spotmarkedet. Elektrisitet er en bulkvare og må i praksis brukes samtidig som den lages. Forwardkontraktene er derfor en type 'swaps'. Prisene blir bestemt ut ifra en forventet gjennomsnittlig pris over en periode og ikke for et visst leveringstidspunkt.

Siden høsten 1999 har det også vært mulig å handle europeiske opsjoner eller 'swaptions' på markedet Eloption. Dersom en kjøps- 'swaption' er lønnsom ved innløsningstidspunkt vil man innta en posisjon i den underliggende 'swap' mot en innløsningspris. Utbetalingen fra å inneha en posisjon i opsjonen vil skje i løpet av leveranseperioden til den underliggende 'swap', og følgelig ikke ved innløsning av opsjonen (Gaarder Haug, 2005).

For en vannkraftprodusent vil informasjonen som ligger i det finansielle markedet være nyttig når den optimale ressursutnyttelsen skal avgjøres. Ettersom prisene på de ulike kontraktene er offentlige, kan de være med og hjelpe vannkraftprodusenten til å bestemme sannsynlig risikopremie (Eydeland & Wolyniec, 2003).



Figur 4.3: Omsetning i TWh pr uke på Eltermin (Nordpool.no)

### ***4.3 Sammenheng mellom spot og forwardpris***

En forward skal etter prinsippet om nullarbitrasje være priset lik spotprisen ved leveringstidspunkt,  $T$ , diskontert med en risikofri rente  $r$  subtrahert med dividenden  $\delta$ :

$$F_{t,T} = S_t e^{(r-\delta)(T-t)}. \quad (4.1)$$

For handelsvarer er det ofte snakk om lagringskostnader og 'convenience yield'.

'Convenience yield' er verdien av å holde en fysisk vare i terminmarkedet. Ettersom det er svært begrensede muligheter for fysisk lagring av elektrisitet er det vanlig å neglisjere lagringskostnadene og 'convenience yield'. Arbitrasjemuligheter i tid og rom blir derfor svært

begrenset. Sammenhengen mellom spot- og forwardpris blir som følge av dette ikke like enkel som beskrevet i grunnleggende finansiell teori

Forventet spotpris i tidspunkt T er spotpris i t med en forventet avkastning  $\alpha$ :

$$E_t[S_T] = S_t e^{\alpha(T-t)} . \quad (4.2)$$

For å unngå risikofri profittering er det nødvendig at forwardkontrakten prises slik at verdien av å holde en kontrakt og eie en andel i underliggende blir den samme i en risikonøytral vurdering:

$$F_{t,T} = E_t[S_T] e^{(r-\alpha)(T-t)} . \quad (4.3)$$

I et elkraftmarked er det ikke nødvendigvis sammenheng mellom etterspørsel i dag og i fremtiden. Det er derfor vanlig å se på elkraft handlet på to ulike tidspunkt som to forskjellige varer. Sammenhengen i ligning (4.3) holder likevel også i elkraftmarkeder (McDonald, 2003).

#### ***4.4 Strømprisens oppførsel***

Deregulerte markeder for elektrisk kraft er relativt nye. Det finnes derfor begrensede mengder historiske data for likvide spotpriser og derivater. Det er likevel gjort flere studier vedrørende egenskapene til strømprisen (Lucia & Schwartz, 2002). Viktige observerte egenskaper ved strømprisen er sprang i pris, mean reversion, tunge haler i prisfordelingen og sesongavhengighet.

##### **4.4.1 Sprang i pris**

Prisen på elektrisk kraft kan være meget volatil etter standard mål på volatilitet (Lucia & Schwartz, 2002). Det kan ofte forekomme plutselige, uventede og diskontinuerlige forandringer i spotprisen. Figur 4.4 er et plot av spotprisen på Nord Pool fra januar 2005 til mai 2006.



Figur 4.4: Spotpriser fra Nord Pool fra Januar 2005 tom. Mai 2006 (nordpool.no).

En sannsynlig forklaring er at disse sprangene kommer av stor variasjon i etterspørselen og lav elastisitet i tilbudet. Den lave elastisiteten kommer av begrenset overføringskapasitet og små muligheter for lagring av elektrisitet.

#### 4.4.2 Mean reversion

En annen veldokumentert egenskap ved råvarepriser er mean reversion. Denne egenskapen kan illustreres med følgende modell (Clewlow & Strickland, 2000):

$$dS = \kappa(\mu - \Pi) \Pi dt + \Pi \sigma dZ . \quad (4.4)$$

Her vil spotprisen trekkes tilbake til det langsiktige nivået  $\bar{\Pi} = e^{\mu}$  med en hastighet som er gitt av mean reversion raten  $\kappa$ . Denne raten er bestandig positiv. Dersom spotprisen ligger over det langsiktige nivået  $\bar{\Pi}$  så vil driften  $\mu$  i spotprisen være negativ, og prisen vil ha en tendens til å gå tilbake til det langsiktige nivået. På samme måte vil driften være positiv dersom spotprisen ligger under det langsiktige nivået. Spotprisen trenger ikke nødvendigvis vende tilbake til det langsiktige nivået ved ethvert tidspunkt. Den tilfeldige endringen i spotprisen kan være større enn driften og inneha motsatt fortegn.

Tester for tilstedeværelse av 'mean reversion' hos strømpriser har ikke gitt entydige resultater. Dette skyldes at det er vanskelig å skille mellom 'mean reversion' som følge av prishopp i strømdataene det testes på og faktisk 'mean reversion'. (Eydeland & Wolyniec, 2003).

#### **4.4.3 Tunge haler i prisfordelingen**

En konsekvens av sprang i spotprisen og høy stokastisk volatilitet er tjukke haler i prisfordelingen. Dette kommer av at sannsynligheten for store utslag fra empiriske data typisk vil overgå de teoretiske sannsynlighetsfordelingene som spotprismodellene baseres på. Et estimat av kurtosen hos spotprisfordelingen i det nordiske kraftmarkedet har gitt verdier som ligger betraktelig høyere enn kurtose for standard normalfordeling (Lucia & Schwartz, 2002). Forekomst av høy og lav avkastning vil følgelig ha større sannsynlighet enn for en normalfordeling med samme varians. Det er også påvist en positiv skjevhet i avkastningen hos spotprisen, som tilsier høyere sannsynlighet for høy enn for lav avkastning (Lucia & Schwartz, 2002).

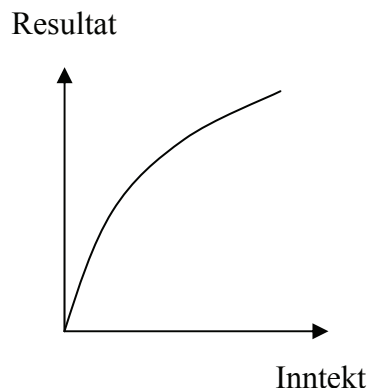
#### **4.4.4 Sesongavhengighet**

Strømpriser i Norden er påvist å være avhengig av sesong (Clewlow & Strickland, 2000). Systemprisen for vintersesongen har median, middel-, maksimum- og minimumverdier som ligger over den varme sesongen. Den midlere prisen for kalde sesonger er 28% høyere enn for varme (Lucia & Schwartz, 2002). En nøyaktig estimering av det årlige sesongavhengige mønsteret krever derimot et høyt antall år. I Norge er 70% av oppvarmingsbehovet dekket med elektrisitet (Olje- og energidepartementet, 2005). Dette fører til at klima i stor grad er med og bestemmer konsumet av elektrisk kraft. Kortere dager i vinterhalvåret fører også til økt bruk av kunstig lys, som igjen øker strømforbruket. Sesongavhengigheten er inkludert i verdisettingen hos deltakere i markedet (Lucia & Schwartz, 2002). Formen på future-kurven viser at det er en topp og en bunn for hvert år noe som er i samsvar med oppførselen til spotprisen. Den midlere spotprisen for helge- og helligdager ligger også under den midlere spotprisen for vanlige ukedager (Lucia & Schwartz, 2002).

## 5 Hedging av kraftproduksjon

Gjennombruddet for moderne opsjonsprisingsteori regnes for å være artikkelen *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* (Black og Scholes, 1973). Fundamentet for teorien er at det er mulig å sette sammen andre finansielle produkter som, uavhengig av prisutviklingen på underliggende, gir den samme utbetalingsstrukturen som derivatet. Dette alternative settet med produkter kalles hedgeporteføljen.

I kapittel 3 ble det illustrert hvordan et vannkraftverk kan betraktes som et komplekst derivat på kraftpris og tilsig. For å kunne hedge kraftproduksjonen ønsker vi analogt med Black-Scholes-teorien å finne et sett av produkter som best mulig replikerer kontantstrømmene fra kraftverket. Det kan være flere grunner til at produsenten ønsker å hedge produksjonen. Wallace og Fleten (2003) poengterer at friksjon i markedet kan føre til at det vil være skalaøkonomi i risikostyring; det kan være billigere for produsenten å hedge enn for individuelle investorer i selskapet. En annen grunn til å hedge kan oppstå, som illustrert i figur 5.1, dersom resultatet fra produksjonen som funksjon av inntektene har negativ andrederivert.



**Figur 5.1: Illustrasjon av resultat som funksjon av inntekt.**

Wallace og Fleten (2003) presenterer et argument for at hedging kun bør gjøres ved transaksjoner i markedet og ikke ved å endre produksjonsplanen. Argumentet går kort som følger: Markedsverdien av en finansiell kontrakt i et likvid marked er null i det den inngås og vil derfor ikke endre markedsverdien av produksjonen. En endring av produksjonsplanen fører imidlertid til en endring av markedsverdien til produksjonen. Derfor bør

produksjonsplanen utformes for å maksimere markedsverdien til produksjonen, og deretter kan en gjøre transaksjoner i markedet for å begrense risikoen. Dette argumentet vil være utgangspunktet for resten av diskusjonen.

### **5.1 Ikke-komplett marked**

Som tidligere nevnt finnes det ikke noe marked for tilsigsrisiko. Det vil dermed alltid være en viss basisrisiko forbundet med produksjonen. Elkraftmarkedet er trolig heller ikke komplett i den forstand at det er mulig å kvitte seg med all prisrisiko. Tidsoppløsningen for produksjonsplanleggingen er typisk kortere enn de tilgjengelige kontraktene på lang og mellomlang sikt. Hvis det eneste tilgjengelige instrumentet er en årskontrakt, kan ikke risiko på ukesbasis hedges, siden instrumentet kun avspeiler gjennomsnittlig risiko over hele perioden. I tillegg er det nødvendig å gjøre en antakelse om verdien av sluttmagasinet<sup>9</sup>. Analysehorisonten som er anvendt i kapittel 7 strekker seg ikke til slutten av siste terminkontrakt. Prisrisiko forbundet med sluttmagasinet kan dermed hedges til en viss grad. I det videre forutsettes imidlertid likevel et tilnærmet komplett kraftmarked.

### **5.2 Markedspris på tilsigsrisiko**

At vi ikke kan hedge all risiko forbundet med kraftproduksjonen kompliserer framgangsmåten for risikonøytral prising og dermed også hedging. Eydeland og Wolyniec (2003) påpeker at en bør finne markedsprisen på den risikoen som ikke kan hedges og bruke den i stedet for den risikofrie renten.

La  $\alpha$  være forventet avkastning,  $\sigma$  volatilitet og  $r_f$  risikofri rente. Pris på risiko per volatilitetsenhet,  $\lambda$ , kan da defineres som

$$\lambda = \frac{\alpha - r_f}{\sigma}. \quad (5.1)$$

---

<sup>9</sup> Selv om et modellen fordrer et fast sluttmagasin vil det innebære en implisitt verdivurdering av restmagasinet.

(5.1) kalles også Sharpe-forhold (McDonald, 2003). Hvis en tror at risikopremien på vannkraftaksjer i hovedsak skyldes tilsigsrisiko kan kapitalverdimodellen forslagsvis benyttes for å finne risikopremien for en portefølje av rene vannkraftaksjer<sup>10</sup>:

$$\alpha_{\text{vannkraft}} - r = \beta_{\text{vannkraft}} (\alpha_{\text{marked}} - r_f). \quad (5.2)$$

For to eiendeler som er identisk korrelert med markedet forøvrig vil Sharpe-forholdet være det samme (McDonald, 2003). Anta at markedsverdien av egen produksjon er likt korrelert med markedet som porteføljen av vannkraftaksjer, og videre at risikopremien for vannkraftaksjer kun skyldes tilsigsrisiko. Risikopremien for eget tilsig blir da:

$$\alpha_{\text{tilsig}} - r_f = \frac{\sigma_{\text{produksjon}}}{\sigma_{\text{vannkraft}}} (\alpha_{\text{vannkraft}} - r_f), \quad (5.3)$$

der  $\sigma_{\text{produksjon}}$  er volatiliteten til markedsverdien av egen produksjon.

Eydeland og Wolyniec (2003) foreslår også å bruke selskapets generelle avkastningskrav i lignende situasjoner. Eventuelt kan en vurdere hvorvidt tilsigsrisiko er en systematisk eller usystematisk risiko. Hvis tilsigsrisiko er usystematisk innebærer det at investorene kan eliminere risikoen ved å holde en veldiversifisert portefølje. I et tilstrekkelig likvid marked vil en premie for tilsigsrisiko da innebære en arbitrasjemulighet, som ikke kan vedvare. Risikopremien bør i denne situasjonen være lik null.

---

<sup>10</sup> Aksjer på selskaper som hovedsakelig er vannkraftprodusenter.



### **5.3 Potensielle hedgeprodukter og forventede posisjoner**

Selv om det er høyst usannsynlig å finne en perfekt hedge for vannkraftproduksjonen kan likevel variansen i kontantstrømmene begrenses, ved å ta posisjoner i de produkter som faktisk handles. For å låse inn framtidig pris kan produsenten typisk inngå korte posisjoner i future- og forwardkontrakter. Det er imidlertid usikkerhet knyttet ikke bare til prisen, men også til produsert kvantum. For å oppnå et konsistent resultat er produsenten derfor avhengig av å planlegge og prise produksjonen på en måte som gir sensitiviteter for produksjonsvolum i forhold til de tilgjengelige future- og forwardkontraktene.

Eydeland og Wolyniec (2003) diskuterer prising og hedging av gasslagre og hevder at de samme teknikkene, med modifikasjoner, kan brukes til å prise og hedge vannkraftproduksjon. De resulterende hedgene for gasslageret består av opsjoner. Dette kan tyde på at opsjoner kan være egnet også til å hedge vannkraftproduksjon.

### **5.4 Deltahedging**

Deltahedging innebærer å inneha både en posisjon og en opsjon i den samme underliggende kontrakten. Prosessen fører til en dynamisk trading av posisjonen i den underliggende energikontrakten slik at for alle tidsintervaller mellom trading, vil en endring i opsjonsprisen tilsvares av en lik og motsatt endring i verdien av posisjonen i den underliggende. På denne måten vil ikke porteføljen endre verdi, og aktøren er derfor immun mot risiko fra endringer i pris på underliggende.

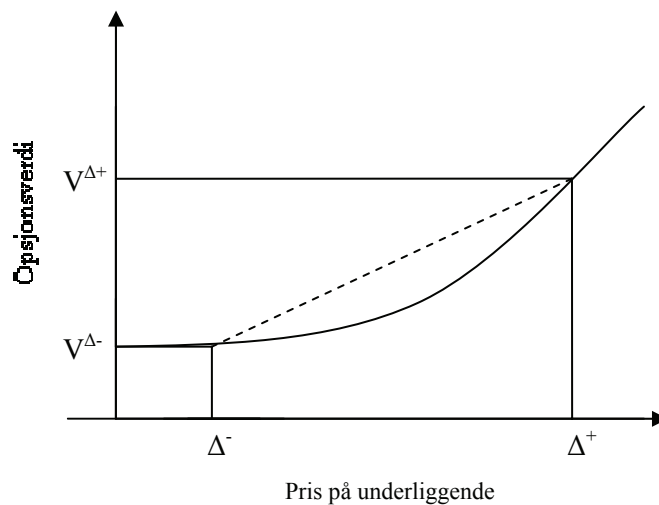
For å kunne hedge perfekt må  $\Delta F \rightarrow 0$ . Dette fører til definisjonen av delta:

$$\left. \frac{\Delta C}{\Delta F} \right|_{\Delta F \rightarrow 0} = \frac{\partial C}{\partial F} = \text{delta} \quad (5.4)$$

Enhver forandring i den underliggende forwardprisen fører til en forandring i delta. Dette fører til en kontinuerlig trading i den underliggende kontrakten for å holde posisjonen i

underliggende lik delta, og holde porteføljen hedget. I praksis er det verken mulig eller nødvendig å trade den underliggende kontinuerlig, men kun når den underliggende har forandret seg nevneverdig (Clewlow & Strickland, 2001).

Glassermann (2003) beskriver en estimator for å finne den tilnærmede forandringen i opsjonverdier med hensyn på forandring i underliggende. Denne estimatoren kaller han 'central-difference estimator' (se figur z.zz).



**Figur 5.2: Illustrasjon av den tilnærmede tangenten til prisen på underliggende ved bruk av 'central-difference estimator'.**

Dersom det antas at de optimalt forventede kontantstrømmene fra vannkraftproduksjonen er en opsjon som betinger på forwardkurven, vil delta kunne uttrykkes som:

$$\frac{\partial V_t}{\partial F_{\text{kurve}}} \approx \Delta \equiv \frac{V_t^{\Delta^+} - V_t^{\Delta^-}}{2} \quad \forall t, \quad \text{der } t \text{ er et tidsintervall.} \quad (5.5)$$

## **6 Modeller**

For å være i stand til å finne en advekat løsning på produksjonsplanleggingsproblemet er det nødvendig med beskrivelser av strømpris, tilsig og produksjonssystemet. Når forutnevnte er etablert, er det videre nødvendig å formulere problemet matematisk. Dette kapitlet vedrører disse forholdene.

### ***6.1 Stokastiske modeller***

Både pris og tilsigsprosessen er uforutsigbare i den grad at en modell som ikke tar hensyn til stokastikken vil være urealistisk. For å kunne oppnå en fornuftig hedgestrategi er det videre ønskelig med en prismodell i produksjonsplanleggingen som betinger på markedsinformasjon. I denne oppgaven er det valgt tidskontinuerlige stokastiske prosesser basert på Brownsk bevegelse for både pris og tilsig. Varianter av Brownsk bevegelse er hyppig brukt som modell innen finans og er inngående studert. For en analyse av egenskapene til Brownsk bevegelse se for eksempel Ross (2003). McDonald (2003) gir en innføring i anvendelsen av Brownsk bevegelse som byggestein for modeller i finans.

#### **6.1.1 Viktige faktorer ved valg av prismodell for bruk i produksjonsplanlegging**

Produksjonsplanlegging av vannkraft er påvirket av den kortsiktige dynamikken hos spotprisen, men også av den langsiktige dynamikken hos forward-kurven. I systemer med høy reguleringsgrad kan tilstanden og dynamikken i den lange enden av forward-kurven ha stor påvirkning på produksjonsplanleggingen. Et vannkraftverk kan betraktes som et komplett derivat til spotprisen, men dette umuliggjør hedging da spotprisen ikke kan lagres. Det er derfor hensiktsmessig å bruke en modell som baseres på eksisterende finansielle kontrakter, samt dynamikken i det finansielle markedet. En prismodell som tar hensyn til alle egenskaper ved strømprisen ville vært en stor oppgave i seg selv, med tanke på avvikene til antagelsene

om standard normalfordeling (som diskutert i avsnitt 4.4). Det er derfor tatt forenklete antagelser med hensyn på spotprisen i denne oppgaven.

### 6.1.2 Prismodell

Som diskutert i 4.4 har strømprisprosessen en rekke særegenheter. Kort oppsummert utviser strømpriser en tydelig sesongvariasjon og mean reversion. Samtidig har fordelingen tunge haler og store sprang i prisen forekommer ofte. En modell som tar hensyn til alle forhold blir relativt komplisert og vil ha mange parametere som må estimeres. Fokuset for denne oppgaven er ikke å foreslå en best mulig modell for strømpriser. Likevel er det nødvendig å benytte en modell som er i en viss overenstemmelse med markedet, for å oppnå fornuftige resultater. For en studie av ulike modeller som kan være aktuelle i kraftmarkeder se Clewlow og Strickland (2000) eller Eydeland og Wolyniec (2003). Schwartz (1997) regnes forøvrig å være et viktig bidrag til modellering av råvarepriser.

Prismodellen som er valgt i denne oppgaven er en variant av Ornstein-Uhlenbeck prosessen med tidsavhengig forventning. Modellen er beskrevet i de tre referansene nevnt over og uttrykkes generelt:

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = \kappa(\theta_t - \ln \Pi_t) dt + \sigma dZ_t \quad (6.1)$$

der  $dZ$  er et inkrement til en standard brownsk bevegelse,  $\kappa$  er mean reversion parameteren,  $\theta_t$  er tidsvarierende forventning og  $\sigma$  er standardavviket til den brownske bevegelsen. For å simulere denne modellen er det hensiktsmessig å gjøre transformasjonen

$$f_t = \ln \Pi_t \quad (6.2)$$

Itô's formel gir da

$$df_t = \kappa(\theta_t - f_t) dt + \sigma dZ_t, \quad \hat{\theta}_t = \theta_t - \frac{\sigma^2}{2\kappa} \quad (6.3)$$

For å simulere modellen gjøres diskretiseringen

$$\Delta f_t = \kappa(\hat{\theta}_t - f_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}N_t \quad (6.4)$$

der  $N$  er en standard normalfordelt variabel. Clewlow og Strickland (2000) påpeker at  $f$  inngår i driften, og at diskretiseringen derfor kun er eksakt i grensen  $\Delta f \rightarrow df$ . Tidsstegene bør derfor velges korte relative til mean reversion hastigheten.

For å gjøre prisprosessen risikonøytral kan driften kalibreres ved hjelp av terminstrukturen. Clewlow og Strickland (2000) viser da at

$$\theta_t = \frac{1}{\kappa} \frac{d \ln F_{0,T}}{dt} + \kappa \ln F_{0,T} + \frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa T}) \quad (6.5)$$

der  $F_{0,T}$  er terminprisen for strøm levert i tidspunkt  $T$  på nåtidspunkt. Modellen er per definisjon kalibrert til terminstrukturen i forventning, men betinger ikke på andre ordens markedsinformasjon. Modellen kan derfor ikke ventes å gi korrekte opsjonspriser.

### 6.1.3 Estimering av parametere i prismodellen

Estimering av parametrene til prismodellen er gjort i Excel®. Datagrunnlaget for analysen er ukentlige spotpriser i Trondheim i tidsrommet 1996-2005 .

Parametrene i strømprismodellen er estimert med utgangspunkt i at Ornstein-Uhlenbeck (Schwartz) prosessen har felles fordeling med en AR(1)-prosess, der parametrene er gitt som funksjoner av parametrene til ornstein-uhlenbeck prosessen, når observasjonene har lik avstand.

$$(1 - e^{-\kappa B})Y_n = (1 - e^{-\kappa B})\hat{\theta} + \xi_n \quad , \quad \xi_n \sim N\left(0, \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\kappa})}{2\kappa}\right) \quad (6.6)$$

Her er  $B$  en “back shift operator” (Brockwell & Davis, 2002).

Dikretiseringen i (6.5) ble brukt til å estimere  $\sigma$  og  $\kappa$  samtidig ved å minimere de midlere kvadratiske feilene. Estimerte parametere og deskriptiv statistikk fra analysen av de historiske prisene finnes i vedlegg 8.

#### **6.1.4 Tilsigsmodell**

Modellen for tilsiget er også modellert som en Ornstein-Uhlenbeck prosess. Tilsigsmodellen har i tillegg til sesongavhengig forventning også sesongavhengig varians. I følge Gjelsvik(1992) er autokorrelasjon ofte en signifikant faktor i tilsigsserier. Ornstein-Uhlenbeck prosessen er den tidskontinuerlige versjonen av en AR(1)-prosess. AR(1)-prosessen er autokorrelert ved lag 1 (Brockwell og Davis, 2002).

#### **6.1.5 Estimering av parametere i tilsigsmodellene**

Estimering av parameterne til tilsigsmodellen er gjort i Excel®. Analysegrunnlaget er observerte ukentlige tilsig fra vassmerkene Aune og Rathe i Nea/Nidelvassdraget i tidsrommet 1950 – 2001. Estimeringen av mean-reversion koeffesientene og de ukentlige volatilitetene er gjort ved bruk av minste kvadraters metode. Estimerte parametere og resultater fra tilsigsanalysen til henholdsvis Aune og Rathe vannmerke finnes i vedlegg 6 og 7.

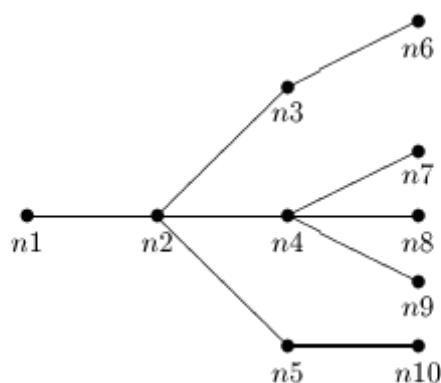
## 6.2 Modellering av scenariotrær

En vannkraftprodusent er som nevnt i kapittel 3, tvunget til å ta avgjørelser under usikkerhet. Presentasjon av fremtidige hendelser i form av scenarier kan være en viktig beslutningstøtte, der hvert scenario samsvarer med et enkelt utfall av en tilfeldig mengde. Sampling fra historiske tidsrekker eller fra statistiske modeller er de mest anvendte metodene for å lage scenarier. Scenariene og de tilhørende sannsynlighetene blir da en tilnærmet beskrivelse av den stokastiske prosessen.

Dersom man antar at første periode i en stokastisk prosess er kjent (deterministisk), vil genererte scenarier ta form som en vifte, der alle scenariene har samme startverdier.

En slik vifte kan være en god beskrivelse av den underliggende stokastiske prosessen, men er ikke anvendelig i trinnvise beslutningsprosesser.

Et viktig hjelpemiddel i å løse flertrinns stokastiske programmer er en tilnærmet fremstilling av den underliggende stokastiske prosessen i form av et scenariotre. Et scenariotre kan fremstilles ved et endelig sett med noder. Scenariotreet starter i rotnoden i den første perioden og forgreiner seg til noder i neste periode. Hver node har en enkelt forgjengernode, men kan ha flere etterfølgere. Et enkelt eksempel er illustrert i figur 6.1 Hver sti fra rotnoden  $n1$  til en av dens endetilstander  $n6, \dots, n10$  er et scenario.

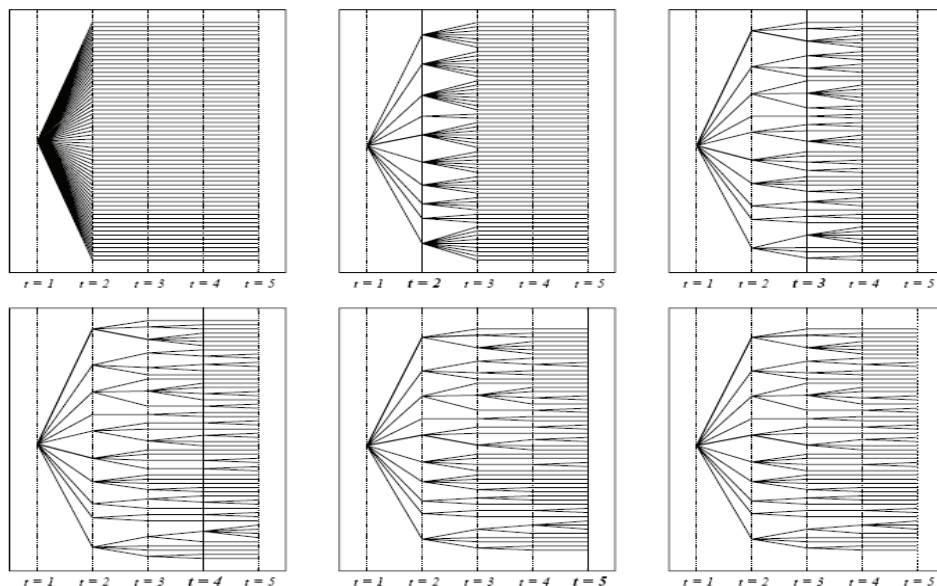


Figur 6.1: Eksempel på scenariotre, med 10 noder og 5 scenarier.

Å lage scenariotrær som beskriver den stokastiske prosessen på en tilfredsstillende måte er en utfordring. Et gitt antall forgreininger i hver node vil gi en eksponentiell økning i antall noder for hvert diskrete tidssteg. Dette vil føre til dimensjonsproblemer ved mange forgreiningperioder. I tillegg vil et forenklet scenariotre kunne gi en svært misvisende tilnærming til den underliggende stokastiske prosessen.

Heitsch og Römisch (2003 & 2005) har beskrevet metoder for å konstruere scenariotrær basert på scenariovifter, slik at sannsynlighetsfordelingen og filtreringsstrukturen hos dataene i scenariene tilnærmelsesvis gjenopprettes. Algoritmene reduserer den opprinnelige viften til et scenariotre ved å modifisere trestrukturen og bunte lignende scenarier. Flytting av øvre grenser for sannsynlighet- og filtreringsavstand gir mulighet til å påvirke prosessen for rekursiv scenarioreduksjon og forgreining, og dermed indirekte bestemme antall scenarier og noder i det resulterende treet.

Heitsch og Römisch presenterer to algoritmer for scenariotregenerering i sine artikler; forover- og baklengs reduisering av scenariovifter. Begge reduseringsmetodene tar utgangspunkt i vilkårene for stabilitet hos optimale verdier for flerstegs stokastiske programmer. Dette er gjennomgående beskrevet i Heitsch og Römisch (2003). Figur 6.2 viser trinn i genereringen av et scenariotre ved bruk av algoritmen beskrevet i appendix zz for foroverreduisering av en scenariovifte.



**Figur 6.2: Illustrasjon av en trinnvis generering av et scenariotre med  $T = 5$  tidsperioder og med utgangspunkt i en scenariovifte med  $N = 58$  scenarier.**



### **6.3 Restriksjoner i systemet**

Produksjonsplanleggingsproblemet innbefatter en rekke restriksjoner. Beskrankninger oppstår i hovedsak av tekniske, miljømessige og fysiske årsaker. Her gir vi en oversikt over de viktigste restriksjonene og redegjør for hvilke som er utelatt fra de matematiske formuleringene i 6.4, 6.5 og 6.6.

#### **6.3.1 Magasinnivå**

Alle vannmagasiner har en øvre og nedre grense for vannstand. Det er opplagt at ethvert magasin vil ha et endelig maksimalt volum og heller ikke kan ha et negativt volum. Om den nedre grensen er null eller om et minste volum er påkrevd vil ikke påvirke analysen. Restriksjonen på magasinnivå og vannføring kan tenkes å være forskjellig på ulike tider av året, eksempelvis av hensyn til gytteforhold i vassdraget. I denne oppgaven antas disse grensene imidlertid konstante.

#### **6.3.2 Vannføring**

I de fleste tilfeller vil det være en øvre og nedre grense på hvor mye vann som kan slippes ut av magasinet til enhver tid. I modellen presentert i 6.4 er det en øvre grense på produksjonsvolumet, men imidlertid ingen grense for hvor stort overløpet eller forbitappingen kan være.

#### **6.3.3 Vannbalanse**

Alt vann som kommer inn i magasinet må enten lagres eller strømme videre. Uten en vannbalanse vil problemformuleringen få et åpent løsningsrom. Modellmessig blir da resultatet at vann strømmer ut av magasinet uten at det påvirker magasinnivået.

### **6.3.4 Rampingrestriksjoner**

Ramping indikerer endring i produksjonshastighet. Ved vannkraftproduksjon vil det i de aller fleste tilfeller være en begrensning på hvor raskt gjennomstrømningsvolumet og dermed produksjonshastigheten kan endres. Dette skyldes både tekniske, miljømessige og sikkerhetsmessige forhold. Innvirkningen av rampingrestriksjoner på løsningen vil trolig være lite uttalte ved en tidsoppløsning som er betraktelig lengre enn tiden for å gå fra maksimum til minimum volumstrøm indikert av restriksjonen. Vi velger derfor å neglisjere rampingrestriksjoner med bakgrunn i tidsoppløsning på en uke i vårt problem.

### **6.3.5 Begrenset overføringskapasitet**

I realiteten er det begrensninger på overføringskapasitet for elektrisk kraft både innen og mellom delområder. Begrenset overføringskapasitet kan føre til flaskehals i systemet og er en direkte årsak til at det oppstår områdepriser. I oppgaven antar vi ubegrenset overføringskapasitet med det resultat at områdeprisen blir lik systemprisen.

### **6.3.6 Kostnader**

Kostnader er i seg selv ikke en restriksjon, men bør inngå i målfunksjonen. I denne oppgaven er kostnader valgt utelatt fra den matematiske formuleringen av problemet. Antagelsen er at kostnadene er så små at de ikke vil påvirke driftsbeslutningene.<sup>11</sup> Nilsson og Sjelvgren (1997) hevder at kostnader knyttet til oppstart av vannkraftproduksjon hovedsakelig er knyttet til vedlikehold, men at tap av vann også er et problem. De påpeker at dette kan være av betydning ved korttidsplanlegging. Ved langtidsplanlegging, med tidsoppløsning på en uke, er trolig problemet mindre uttalt. I følge Fosso (2005) er kostnader knyttet til en oppstart i størrelsesorden NOK 2,500. Start- og stoppkostnader er derfor utelatt av den matematiske problemformuleringen.

---

<sup>11</sup> Med kostnader menes det her kostnader som medfører utbetalinger, og altså ikke alternativkostnaden til vannet.

### **6.3.7 Topologi**

Et vassdrag kan bestå av mange magasiner og stasjoner. Topologien beskriver hvilke koblinger som finnes mellom enhetene i vassdragssystemet. Vann som er lagret i magasiner høyt oppe i systemet kan ha større verdi enn vann som ligger lenger nede<sup>12</sup>. Dette skyldes at vann som er lagret høyt oppe i topologien kan kjøres gjennom flere turbiner før det når havnivå.

### **6.3.8 Skatt**

Det eksisterer lover og regler som vedrører utnytting av naturressurser i Norge. For vannkraftproduksjon regnes det med en grunnrente fordi nedbør, magasiner og vannfall har en implisitt verdi som innsatsfaktor. Grunnrenten er den delen av overskuddet som overstiger normal avkastning på realkapitalen som er investert i selskapet. Det er dog ikke tatt hensyn til beskatning i modellene presentert her.

---

<sup>12</sup> Gitt at det ikke oppstår overløp.

## **6.4 Deterministisk optimeringsmodell**

Hvis kraftpriser og tilsig er kjent for alle perioder i planleggingsperioden reduserer produksjonsplanleggingsproblemet til et deterministisk optimeringsproblem. En optimal løsning vil da simpelthen allokere mest mulig vann til perioder med høyest priser.<sup>13</sup> I det følgende presenteres et matematisk program for å gjøre en slik deterministisk optimering av ett enkelt scenario for pris og tilsig.

### **Indeks**

- t        Indeks for periode.  $t=0$  indikerer første periode.  
i        Indeks for magasin.

### **Data**

- $\pi_t$       Kraftpris i periode  $t$ .  
 $\psi_{t,i}$     Tilsig i periode  $t$  for magasin  $i$ .  
 $M_{\max,i}$  Øvre grense på magasinnivå for magasin  $i$ .  
 $M_{\min,i}$  Nedre grense på magasinnivå for magasin  $i$ .  
 $M_{0,i}$     Startmagasin for magasin  $i$ .  
 $M_{T+1,i}$  Sluttmagasin for magasin  $i$ .  
 $Q_{\max,i}$  Øvre grense på vannstrøm gjennom stasjonen for magasin  $i$ .  
 $r$         Diskonteringsrente.  
 $N$         Antall magasiner.

### **Variable**

- $V$         Verdi av produksjonen for totalperioden.  
 $m_{t,i}$     Magasinnivå i starten av periode  $t$  for magasin  $i$ .  
 $l_{t,i}$     Overløp i periode  $t$  for magasin  $i$ .  
 $p_{t,i}$     Kraftproduksjon i periode  $t$  for magasin  $i$ .

---

<sup>13</sup> Produksjonsfunksjonen er imidlertid generelt ulineær, slik at allokeringen ikke generelt er triviell.

- $q_{t,i,j}$  Produsert vannstrøm i periode  $t$  for magasin  $i$  til magasin  $j$ , gitt at magasin  $j$  er rett nedstrøms i topologien.
- $h_{t,i,j}$  Forbitappet vann i periode  $t$  fra magasin  $i$  til magasin  $j$ , gitt at magasin  $j$  er rett nedstrøms i topologien.
- $g_{t,i,j}$  Tilsig i periode  $t$  til magasin  $i$  fra magasin  $j$ , gitt at magasin  $j$  er rett oppstrøms i topologien.

## Målfunksjon

$$(1) \quad \max_{q_{t,i,j}, m_{t,i}, l_{t,i}, h_{t,i,j}, g_{t,i,j}} V = \sum_{t=0}^T \frac{\pi_t}{(1+r)^t} p_{t,i}$$

## Restriksjoner

- $$(2) \quad p_{t,i} = \sum_j^N w_i(m_{t,i}, q_{t,i,j}) \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N$$
- $$(3) \quad m_{t+1,i} - m_{t,i} + \sum_j^N q_{t,i,j} + l_{t,i} = \psi_{t,i} + \sum_{j=1}^N g_{t,i,j} - \sum_{j=1}^N h_{t,i,j} \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N$$
- $$(4) \quad m_{0,i} = M_{0,i} \quad \forall 1 \dots N$$
- $$(5) \quad m_{T+1,i} = M_{T+1,i} \quad \forall 1 \dots N$$
- $$(6) \quad M_{\min,i} \leq m_{t,i} \leq M_{\max,i} \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N$$
- $$(7) \quad Q_{\min,i} \leq \sum_j^N q_{t,i,j} \leq Q_{\max,i} \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N$$
- $$(8) \quad q_{t,i,j}, l_{t,i} \geq 0 \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N$$
- $$(9) \quad \sum_j^N q_{t,i,j} + \sum_{j=1}^N h_{t,i,j} = \sum_{j=1}^N g_{t,j,i} \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N$$

Målfunksjonen, (1), er en sum av de neddiskonterte inntektene fra hver periode. Ligning (2) gir mengde produsert kraft i en periode som en funksjon av vannstrømvolumet og magasinivået i starten av perioden. Produksjonsfunksjonen er generelt ulineær og gir ikke nødvendigvis et konvekst mulighetsområde. Restriksjon (3) er flytbalansen og formulerer kravet om at mengden vann som overføres fra en periode til neste må være lik startmagasinet i den foregående perioden pluss netto tilførsel av vann til magasinet i den foregående perioden.

Ligning (4) og (5) er restriksjoner henholdsvis på nivået på startmagasinet og sluttmagasinet. Krav til minste og største magasinnivå er formulert i restriksjon (6). Ligning (7) begrenser maksimal produksjon, mens (8) er ikke-negativitetskrav til produksjons- og overløpsvolum. Ligning (9) legger restriksjon på flytbalansene mellom magasiner.

## 6.5 Stokastisk optimeringsmodell

Det er tidligere argumentert for at pris og tilsig er forbundet med stor usikkerhet. Den følgende optimeringsformuleringen tar eksplisitt høyde for dette, ved å la pris og tilsig være stokastiske variable.

### Målfunksjon

$$(1) \quad V_{t,i} = \max_{q_{t,i,j}, m_{t,i}, l_{t,i}, h_{t,i,j}, g_{t,i,j}} E \left[ \Pi_t \times p_{t,i} + \frac{V_{t+1,i}}{(1+r)} \right] \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N$$

### Restriksjoner

$$(2) \quad p_{t,i} = \sum_j^N w_i(m_{t,i}, q_{t,i,j}) \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N$$

$$(3) \quad m_{t+1,i} - m_{t,i} + \sum_j^N q_{t,i,j} + l_{t,i} = \Psi_{t,i} + \sum_{j=1}^N g_{t,i,j} - \sum_{j=1}^N h_{t,i,j} \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N$$

$$(4) \quad \mu_{V_{T+1,i}} = f(\Pi_{T,i}, \Psi_{T,i}, m_{T+1,i}) \quad \forall 1, \dots, N$$

$$(5) \quad m_{0,i} = M_{0,i} \quad \forall 1, \dots, N$$

$$(7) \quad M_{\min,i} \leq m_{t,i} \leq M_{\max,i} \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N$$

$$(8) \quad Q_{\min,i} \leq \sum_j^N q_{t,i,j} \leq Q_{\max,i} \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N$$

$$(9) \quad q_{t,i,j}, l_{t,i} \geq 0 \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N$$

$$(10) \quad \sum_j^N q_{t,i,j} + \sum_{j=1}^N h_{t,i,j} = \sum_{j=1}^N g_{t,j,i} \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N$$

Målfunksjonen er lik (2.2), bortsett fra at overløp, forbitapping og tilsig fra andre oppstrøms magasiner også er innført som argument. Merk at denne modellen, i motsetning til den deterministiske, er formulert rekursivt. Det er innført en restriksjon, (4), for verdien av sluttmagasinet i stedet for volumrestriksjonen i det deterministiske programmet. De øvrige restriksjonene korresponderer med den deterministiske formuleringen.

## **6.6 Deterministisk ekvivalent**

Et flertstegs stokastisk programmeringsproblem kan beskrives som en kombinasjon av en flerstegs dynamisk modell og en stokastisk prosess i diskret tid. Dersom den stokastiske prosessen kan beskrives ved et endelig antall tilstander, kan det stokastiske programmet formuleres som et tilnærmet deterministisk problem. Denne deterministiske tilnærmingen kalles den deterministiske ekvivalenten.

Den deterministiske ekvivalenten til produksjonsplanleggingsproblemet er beskrevet nedenfor. Det er tatt utgangspunkt i at den stokastiske prosessen kan beskrives i form av et scenariotre med noder  $n$  som representerer unike tilstander i den stokastiske prosessen (se avsnitt 6.2). Usikkerheten i problemet er gjengitt i form av ubetingede sannsynligheter for transisjonene til neste tilstand i hver node.

Her er:

$n$  – indeks for node

$S_t$  – Settet med noder i periode  $t$ .

$a(t,n,k)$  – Indeksen til forgjengeren til node  $(t,n)$  i periode  $t-k$ .

$P_{t,n}$  – Den ubetingede sannsynligheten for tilstanden i node  $(t,n)$ .

## Målfunksjon

$$\max_{q_{t,i,j,n}, m_{t,i,n}, l_{t,i,n}, h_{t,i,j,n}, g_{t,i,j,n}} V = \sum_t^T \left[ \sum_{n \in S_t} P_{t,n} \frac{\pi_{t,n}}{(1+r)^t} p_{t,i,n} \right]$$

## Restriksjoner

- (2)  $p_{t,i,n} = \sum_j^N w_j(m_{t,i,n}, q_{t,i,j,n}) \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N, n \in S_t$
- (3)  $m_{t,i,n} - m_{t,i,a(t,n,l)} + \sum_j^N q_{t,i,j,n} + l_{t,i,n} = \psi_{t,i,n} + \sum_{j=1}^N g_{t,i,j,n} - \sum_{j=1}^N h_{t,i,j,n} \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N, n \in S_t$
- (4)  $m_{0,i,1} = M_{0,i,1} \quad \forall 1, \dots, N, n \in S_T$
- (5)  $m_{T+1,i,n} = M_{T+1,i,n} \quad \forall 1, \dots, N, n \in S_T$
- (6)  $M_{\min,i,n} \leq m_{t,i,n} \leq M_{\max,i,n} \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N, n \in S_t$
- (7)  $Q_{\min,i,t} \leq \sum_j^N q_{t,i,j,n} \leq Q_{\max,i,t} \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N, n \in S_t$
- (8)  $q_{t,i,j,n}, l_{t,i,n} \geq 0 \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N, n \in S_t$
- (9)  $\sum_j^N q_{t,i,j,n} + \sum_{j=1}^N h_{t,i,j,n} = \sum_{j=1}^N g_{t,i,j,n} \quad \forall 1, \dots, T, \forall 1, \dots, N, n \in S_t$

Målfunksjonen er en sum av de forventede neddiskonterte inntektene fra hver periode. I restriksjon (3) er magasinet i hver node  $(t,n)$  betinget på magasinet i forgjengernoden  $a(t,n,l)$ . Restriksjonen på vannstrømmene (7) har tidsindeks grunnet ulike lengder på tidsintervallene. De øvrige restriksjonene er de samme som i den deterministiske modellen.



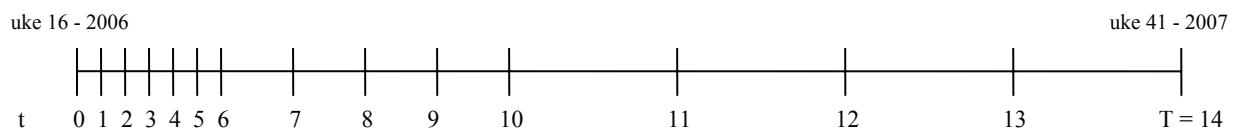
## 7 Implementering av modellen

I forbindelse med masteroppgaven er produksjonsplanleggingsproblemet løst for Nea-Nidelvvassdraget, ved å implementere modellene presentert i avsnitt 6 i Matlab®, Scenred® og Mosel Xpress®. Programstrukturen kan studeres i vedlegg 10. Selve optimeringen ble foretatt på en 2,4GHz Intel Celeron CPU med 3,71 GB RAM.

Et antall scenarier ble generert ved å simulere prismodellen i 6.1.2 og tilsigsmodellen i 6.1.4. Ut ifra de simulerte scenariene ble det konstruert scenariotrær med algoritmen beskrevet i vedlegg 1. Optimal forventet produksjon ble deretter funnet ved å løse optimeringsproblemet beskrevet i 6.6. Forutnevnte og andre resultater er presentert i kapittel 8 og diskutert i kapittel 9. Analysens tidshorisont var fra 16.04.2006 til 08.10.2007. Her følger en mer inngående beskrivelse av hvordan modellen ble implementert.

### 7.1 Skalering av analyseperioden

Analyseperioden ble skalert i 14 tidsintervall med ulik lengde. De seks første intervallene er uker, de 4 neste er måneder og de 4 siste er kvartaler (figur 7.1). Intervallene ble inndelt slik at de har samme start- og stopptidspunkt som handlede future- og forwardkontrakter på Nord pool.

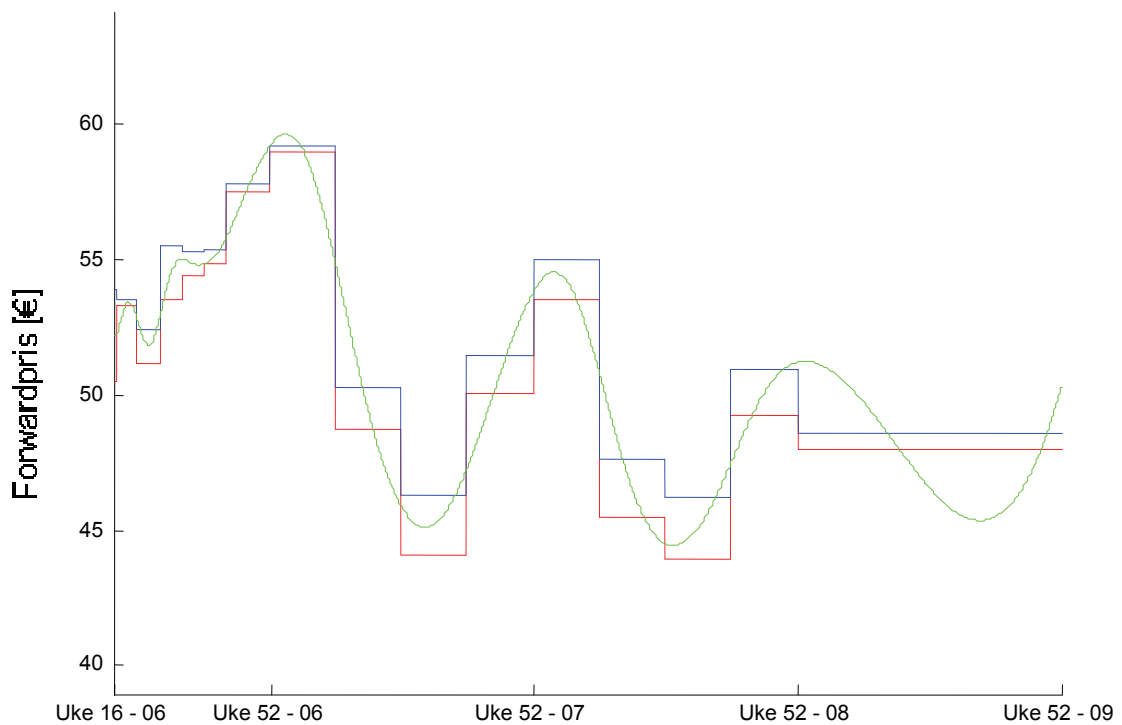


Figur 7.1: Skalering av analyseperioden.

For periodene med grovere tidsoppløsning ble spotprisen satt til gjennomsnittlig spotpris for de simulerte ukene i tidsintervallet. De ukentlige tilsigene fra simuleringene ble summert for periodene med grovere tidsoppløsning.

## 7.2 Kalibrering av prismodell

Spotprismodellen ble kalibrert mot terminstrukturen 17.04.2006 for forward- og futurekontrakter med data hentet fra nordpool.no. Terminstrukturen ble glattet ad hoc ved å interpolere med kubiske splines. Hvis terminstrukturen tegnes i planet danner bid og ask for hver kontrakt et rektangel. Den glattede terminstrukturen treffer disse punktene. Under glattingen ble det imidlertid ikke satt noen restriksjoner på den gjennomsnittlige kontraktprisen. Resultatet innebærer derfor sannsynligvis arbitrasjemuligheter i forhold til den opprinnelige terminstrukturen. Ved endene på terminstrukturen ble det gjort ytterligere justeringer for å oppnå en mer realistisk sesongeffekt. Resultatet kan studeres i figur 8.1.



Figur 7.2: Glatt forwardkurve.

### **7.3 Simulering av pris og tilsig**

Pris og tilsig ble simulert ved å gjøre diskretiseringen i 6.4. Startpris ble satt til startpunktet på den glatte forwardkurven, og starttilsigene ble satt til midlere tilsig for uke 16. Onsdag i hver uke ble valgt som punkt for simulering av pris og tilsig.

De simulerte totale tilsigene for hver uke ble delt mellom de ulike magasinene ut ifra fraksjonen mellom det lokale årsmiddeltilsiget for magasinet og det totale årsmiddeltilsiget for det aktuelle området.

Det ble introdusert korrelasjon mellom prosessene ved å trekke de standardnormalfordelte variablene korrelert. Dette ble gjort ved Cholesky faktorisering. Imidlertid er det ikke gjort noen analyse av den faktiske korrelasjonsstrukturen mellom tidsserier for pris og tilsigene. Grunnen til at det likevel er valgt å introdusere korrelasjon er basert på en antagelse om at det er negativ korrelasjon mellom pris-og tilsigsprosessene. Korrelasjonsfaktoren mellom pris og tilsig ble valgt til  $\rho = -0.2$ . Tilsigsprosessene antas perfekt korrelert. Det ble også gjort simuleringer uten korrelasjon mellom pris og tilsigprosessene.

### **7.4 Scenariotregenerering**

I denne oppgaven er programmet Scenred© benyttet. Dette er et C++ - basert program for generering av scenariotrær, utviklet av Holger Heitsch (2005). De implementerte algoritmene for scenariotregenerering, samt grunnleggende teoremer finnes i vedlegg 1.

For å sette et mål for avstanden mellom de opprinnelige og de tilnærmede sannsynlighetsfordelingene, ble det brukt en relativ toleranse:

$$\mathcal{E}_{rel} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{max}} \quad (7.1)$$

,der  $\varepsilon_{max}$  er den best mulige avstanden mellom sannsynlighetsfordelingen til den opprinnelige scenarioviften og fordelingen til det reduserte scenariotreet (se vedlegg 1).

For generering av ulike scenariotrær blir da toleransen i hvert forgreningspunkt  $\varepsilon_t$  valgt slik at

$$\varepsilon_t = \frac{\varepsilon}{T} \left[ 1 + q \left( \frac{1}{2} - \frac{t}{T} \right) \right], \quad t = 2, \dots, T \quad (7.2)$$

,der  $q \in [0,1]$  er en parameter som påvirker forgreningsstrukturen til de konstruerte scenariotrærne (Heitsch & Römis, 2005).

I denne oppgaven ble ulike scenariotrær konstruert med en parameter som bestemmer reduksjonsnivået for scenariotregenereringen i Scenred. Sammenhengen mellom reduksjonsnivå og antall noder i de resulterende trærne kan studeres i figur 8.1.

## **7.5 Bruk av energiekvivalenter**

Dersom magasinene tappes til et lavt nivå vil virkningsgraden være redusert i forhold til fullt magasin på grunn av mindre vannsøyle. I denne oppgaven vil en fast midlere energiekvivalent benyttes, slik at endring i virkningsgrad på grunn av endret magasindisponering ikke blir tatt hensyn til. For Nesjøen, som er det største magasinet i Nea-Nidelvassdraget, vil denne tilnærmingen ikke være urealistisk, på grunn av høy energiekvivalent til havet og store volum pr høydemeter. Denne tilnærmingen antas derfor bedre for enkelte stasjoner.

Ved implementeringen ble produksjonsfunksjonene tilnærmet som en konstant ganger vannstrømmen:

$$\dot{w}_i \approx k_i \times \dot{q}_i, \quad k_i = \text{energiekvivalent (EK)}. \quad (7.3)$$

Optimeringsproblemet reduseres da til et lineært program. Det er ikke gjort noen kvantitativ analyse av feilen ved å gjøre dette. Energiekvivalentene for Nea-Nidelvassdraget er gitt av Trondheim Energiverk og finnes i vassdragsskjemaet i vedlegg 3.

## **7.6 Diskonteringsfaktor**

Det benyttes ingen diskonteringsrente i dagens produksjonsplanleggingsverktøy i TEV, dvs at fremtidige kontantstrømmer diskonteres med en rente på 0%. Det er i oppgaven ikke tatt standpunkt til hva som vil være et fornuftig avkastningskrav. Det er gjort simuleringer både med en risikofri rente<sup>14</sup> og med et risikojustert avkastningskrav<sup>15</sup>. Det som i praksis bør velges som avkastningskrav vil ha sammenheng med forholdene diskutert i kapittel 5.

Diskonteringsrenten er justert for perioder med ulik lengde.

## **7.7 Topologi i Nea-Nidelvassdraget**

Trondheim Energiverks produksjonsanlegg i Nea-Nidelvassdraget består i skrivende stund av 10 magasiner og 14 kraftstasjoner med en installert effekt på 614 MW. Vassdraget har sitt utspring i Sverige og strekker seg 160 km til sitt utløp i Trondheim. På grunn av sin relativt høye reguleringsgrad på 64 prosent er dette anlegget godt egnet til en analyse av produksjonsplanlegging og risikostyring. Topologien er implementert som to matriser, der den ene beskriver koblingene oppstrøms i vassdraget, og den andre beskriver koblingene nedstrøm. Nøkkeltall for vassdraget, samt et oversiktskart og vassdragsskjema finnes henholdsvis i vedlegg 2 og 3.

---

<sup>14</sup> Den risikofrie renten ble valgt tilnærmet lik ettårig NIBOR.

<sup>15</sup> WACC = 8,9 %.

## **7.8 Verdi av sluttmagasin ved analysehorisonten**

Det er ikke gjort noen vurdering av hvordan sluttmagasinet kan prises, men funksjonen for denne verdien bør trolig være økende i pris og sluttmagasinvolum. Å identifisere en fornuftig funksjon for verdien av sluttmagasinet kan eksempelvis baseres på fundamentalmodeller for framtidig forventet spotpris. Det påpekes at ved valg av en analysemetode som baserer seg på å treffe et gitt sluttmagasin, gjøres en implisitt verdivurdering av sluttmagasinet. Hvis det er mulig vil det derfor være gunstig å gjøre denne antagelsen eksplisitt, ved å introdusere en funksjon for denne verdien.

I denne oppgaven blir sluttmagasinene fastsatt og gitt ved definisjonen i (7.4):

$$f_t \equiv \frac{M_{i,t}}{M_{i,maks}} \forall i \quad (7.4)$$

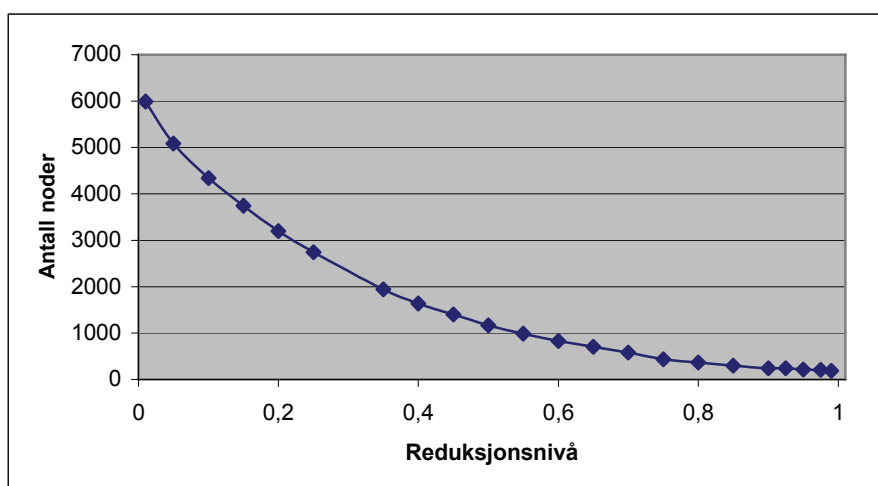
Alle startmagasin i analysene ble satt til faktiske magasiner per uke 16, 2006, dvs.  $f_0 \approx 0,49$ .

## 8 Presentasjon av resultater

Løsningen av modellen i 6.6, gir den maksimalt forventede verdien av vannkraftproduksjonen i analyseperioden. I det følgende presenteres resultatene fra optimeringen.

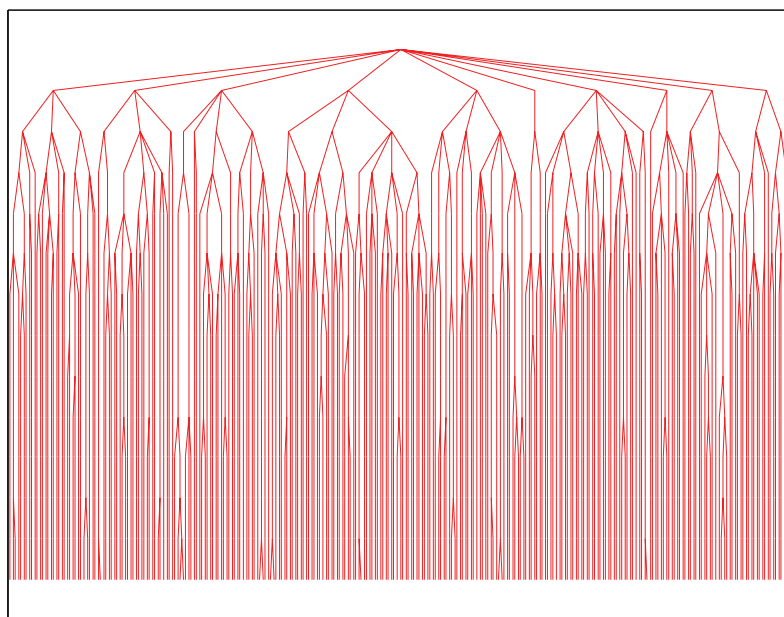
### 8.1 Scenariotregenerering

Sammenhengen mellom satt reduksjonsnivå i Scenred© og antall noder i det resulterende scenariotreet, kan studeres i figur 8.1. Antall noder i det genererte scenariotreet minker med økende reduksjonsnivå.

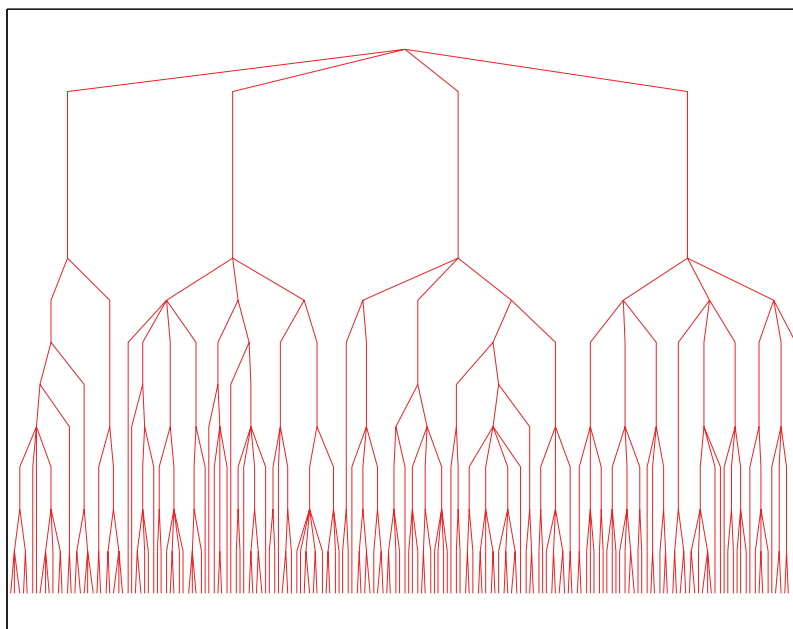


Figur 8.1: Antall noder i generert scenariotree gitt reduksjonsnivå.

Figurene 8.2 og 8.3 illustrerer to ulike scenariotrær generert ved reduksjonsnivå 0,12 og 0,6. Begge scenariotrærne er generert av den samme scenarioviften. Det er her tatt utgangspunkt i en scenariovifte med kun 300 scenarier, av illustrative årsaker. Scenariotrær generert ved reduksjonsnivå 0,25 og 0,4 finnes i vedlegg 9.



**Figur 8.2: Scenariotre generert med reduksjonsnivå = 0,12.  
Antall noder og scenarier er henholdsvis 2515 og 284.**



**Figur 8.3: Scenariotre generert med reduksjonsnivå = 0,6.  
Antall noder er 583 og antall scenarier 180.**



## 8.2 Optimeringsanalyse

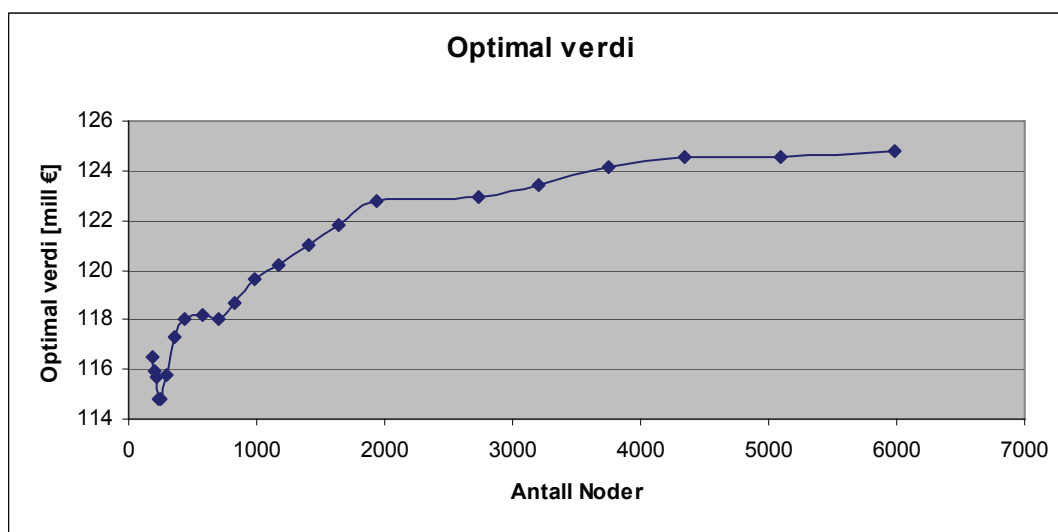
Optimeringen ble gjennomført med algoritmen dual simplex i Mosel Xpress®.

Optimeringsanalysen ble gjort med følgende testcase.

$f_T$	$S_{\text{vifte}}$	Rente	Korrelasjon
0,725	500	3,5	-0,2

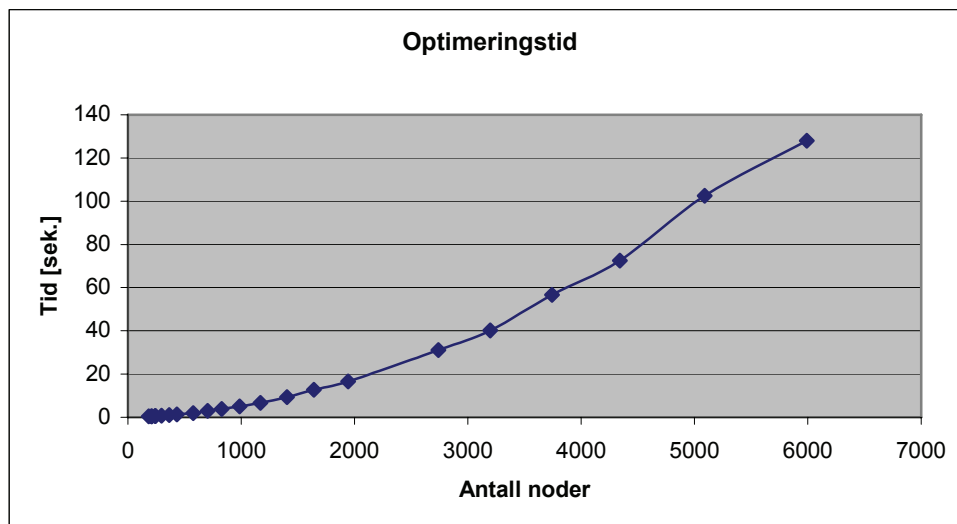
Tabell 8.1: Case for optimeringsanalyse.

Ved å benytte minkende reduksjonsnivå for testcase i tabell 8.1, ble det generert scenariotrær med økende antall noder. Den optimale verdien av den forventede produksjonen i perioden observeres å konvergere for økende antall noder i scenariotreet.



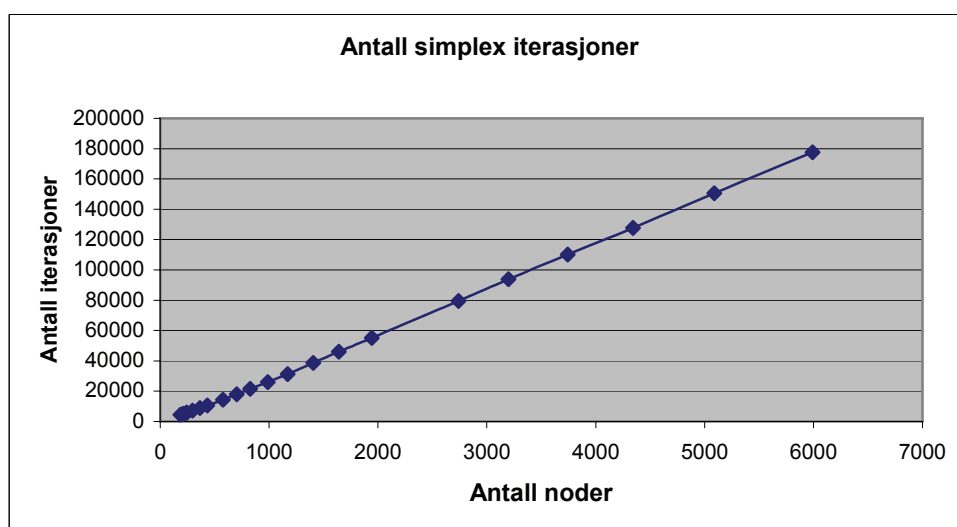
Figur 8.4: Optimal verdi gitt antall noder i scenariotreet.

Figur 8.5 viser tiden det tok å finne optimal løsning gitt antall noder i scenariotreet. Optimeringstiden øker med antall noder i scenariotrærne.



Figur 8.5: Optimeringstid gitt antall noder i scenariotreet.

Figur 8.6 viser antall simplex iterasjoner foretatt før optimal løsning ble funnet. Antall iterasjoner øker med antall noder i scenariotreet.



Figur 8.6: Antall simplexiterasjoner ved optimering gitt antall noder i scenariotreet.

### 8.3 Verdi av produksjon

Optimal verdi av vassdraget ble funnet med case i tabell 8.2:

$S_{vifte}$	Reduksjonsnivå	$S_{tre}$	Noder
1000	0,35	771	3701

Tabell 8.2: Case for test av verdi.

Tabell 8.3 viser resultater for verdien av produksjonen i perioden for ulike sluttmagasin. Som ventet er verdien høyere for mindre sluttmagasin, enn for stort sluttmagasin.

$f_T$	$\rho$	$r$ [%]	Verdi [M€]
0,75	-0,2	3,5	123,7
0,725	-0,2	3,5	126,0
0,7	-0,2	3,5	128,3
0,675	-0,2	3,5	130,5

Tabell 8.3: Verdi av produksjon for ulike sluttmagasin med negativ korrelasjon og  $r = 3,5\%$ .

Ved å sammenligne tabell 8.3 og tabell 8.4 ser vi at verdien er størst ved den laveste diskonteringsrenten. Disse observasjonene tyder på at modellen gir fornuftige resultater.

$f_T$	$\rho$	$r$ [%]	Verdi [M€]
0,75	-0,2	8,9	118,5
0,725	-0,2	8,9	120,7
0,7	-0,2	8,9	122,8
0,675	-0,2	8,9	125,0

Tabell 8.4: Verdi av produksjon for ulike sluttmagasin med negativ korrelasjon og  $r = 8,9\%$ .

Ved å sette korrelasjonskoeffisienten lik null under simuleringen får vi verdier som er tilnærmet like verdiene med korrelasjon (tabell 8.5). Dette kan tyde på at en lav korrelasjon ikke nødvendigvis har en stor innvirkning på verdien.

$f_T$	$\rho$	r	Verdi [M€]
0,75	0,0	3,5	124,1
0,725	0,0	3,5	126,4
0,7	0,0	3,5	128,6
0,675	0,0	3,5	130,9

**Tabell 8.5: Verdi av produksjon ved ulike sluttmagasin, uten korrelasjon og  $r = 3,5\%$ .**

#### **8.4 Forventet produksjonsstrategi**

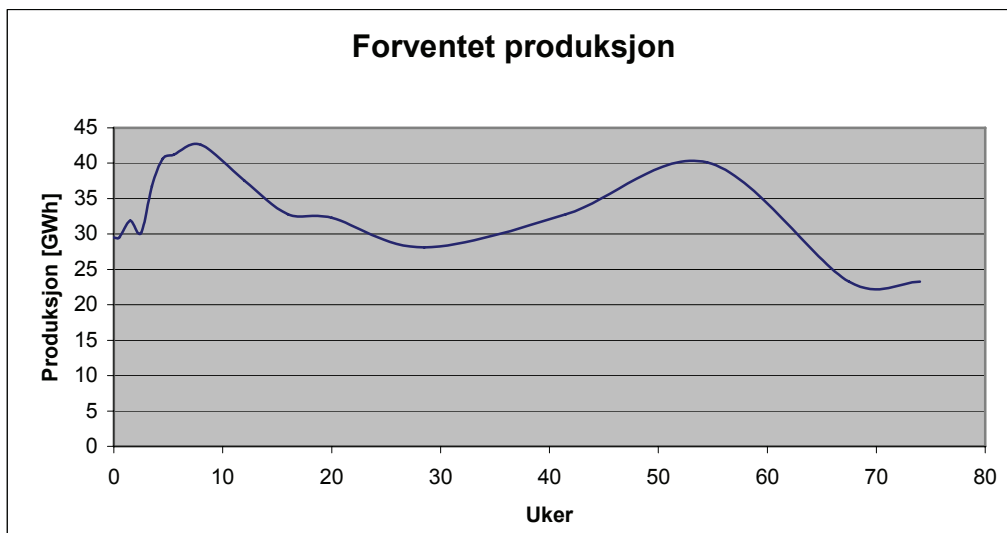
Forventet produksjonsstrategi ved optimal utnyttelse av vassdraget ble funnet for følgende testcase:

$f_T$	$\rho$	$S_{vifte}$	Reduksjonsnivå	r	Noder	$S_{tre}$
0,7	-0,2	1000	0,12	3,5 %	7395	937

**Tabell 8.6: Case for test av produksjonsstrategi.**

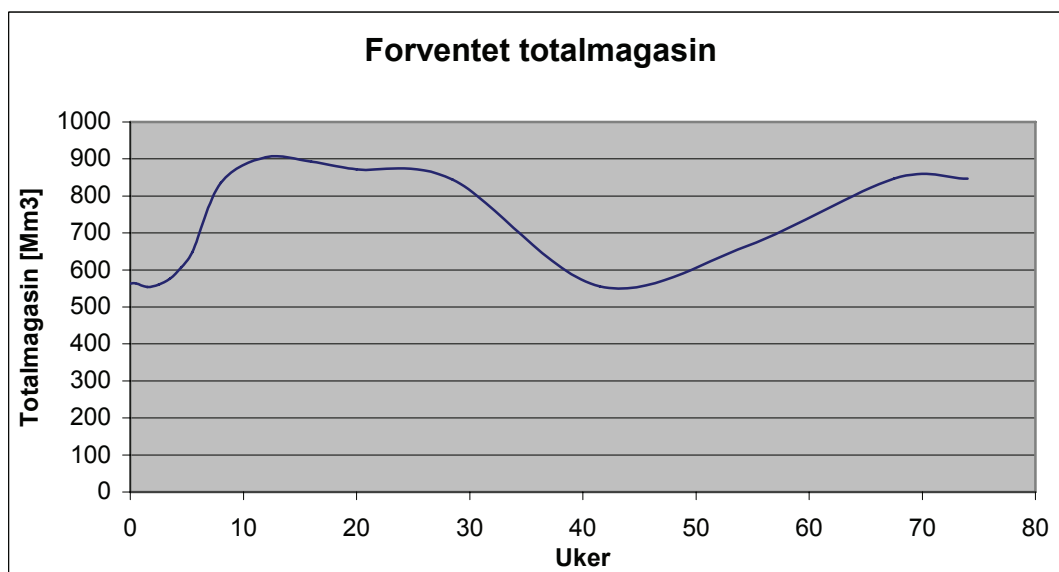
Figur 8.7 og 8.8 viser eksempler på forventet nivå for henholdsvis produksjon og magasinnivå. De motsvarende grafene for  $r = 8,9\%$  er vist i vedlegg 6. De forventede verdiene for produksjonen utviser en klar sesongvariasjon og en nedadgående trend. Sesongvariasjonen er delvis et resultat av sesongvariasjonen i terminstrukturen.

Det er viktig å være oppmerksom på den grove tidsopløsningen mot slutten av analyseperioden.



Figur 8.7: Forventet ukentlig produksjon for case i tabell 8.6

Ulik diskonteringsrente gir også utslag i magasinivå, som forventningsmessig ligger lavere med høy diskonteringsrente (sammenlign figur V6.1 og figur 8.8).

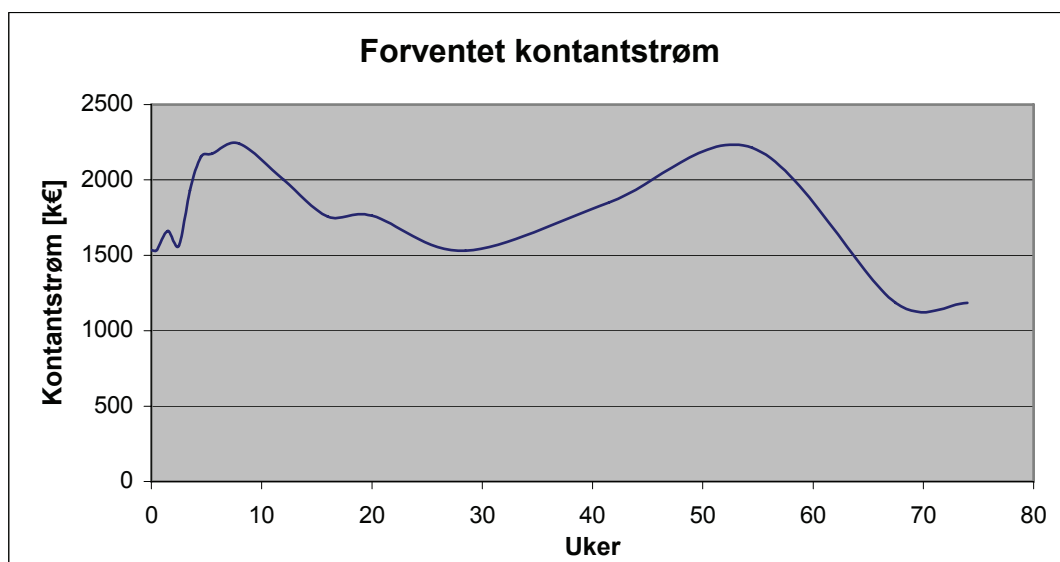


Figur 8.8: Forventet magasininnhold for case i tabell 8.6.

### 8.5 Forventet kontantstrøm

Som en følge av ulik produksjonsstrategi blir også kontantstrømmene for ulike diskonteringsrenter forskjellige. Et eksempel på forventet kontantstrøm er tegnet i figur 8.9 og den motsvarende grafen for  $r = 8,9\%$  er vist i vedlegg 7.

Kontantstrømkurvene har visse likhetstrekk med forwardkurven. Dette er intuitivt ettersom forwardkurven innehar informasjon om spotprisutviklingen.



Figur 8.9: Forventede ukentlige kontantstrømmer for case i tabell 8.6.

## 8.6 Sensitivitet

Ved å addere og subtrahere en enhet for alle kontrakter i forwardkurven oppnås, ved å bruke ligning 8.1, et uttrykk for sensitiviteten til kontantstrømmene i de ulike periodene, og den totale verdien av produksjonen, med hensyn på et parallelt skift i terminstrukturen.

$$\frac{KS_{\frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2}} [\text{€}]}{\Delta F \left[ \frac{\text{€}}{\text{MWh}} \right]} = \text{delta} [\text{MWh}] \quad (8.1)$$

Sensitiviteten ble testet med caset beskrevet i tabell 8.7 nedenfor:

$f_T$	$\rho$	$S_{\text{vifte}}$	Reduksjonsnivå	$r$	Noder	$S_{\text{tre}}$
0,7	-0,2	500	0,12	3,5 %	4058	472

Tabell 8.7: Case for test av sensitiviteter.

Resultatene fra sensitivitetsanalysen for hvert intervall kan sees i tabell 8.8. For hver periode kan delta observeres i form av et kvantitativt avvik i de forventede kontantstrømmene.

Periode [t]	1	2	3	4	5	6	7
$KS_{\Delta^+} [\text{k€}]$	1382,1	1222,53	1241,42	1640,3	1989,99	1970,31	8196,7
$KS_{\Delta^-} [\text{k€}]$	1779,64	2009,14	1741,14	1896,34	2122,92	1994,56	8431,34
$\text{delta} [\text{GWh}]$	-198,77	-393,305	-249,86	-128,02	-66,465	-12,125	-117,32

8	9	10	11	12	13	14	Hele perioden
7776,6	7668,41	7618,98	20298,7	26035,7	30412,4	15759,8	133213,9
9047,13	7362,34	7224,45	17903,6	24393,5	27201,8	14227,9	127335,8
-635,265	+153,035	+197,265	+1197,55	+821,1	+1605,3	+765,95	+2939,07

Tabell 8.8: Sensitivitet i kontantstrømmer mhp et parallelt skift i forwardkurven.

## **9 Diskusjon**

Løsningene av den deterministiske ekvivalenten kan sies å ha gitt fornuftige resultater. Den optimale verdien konvergerer for høyt antall noder i de genererte scenariotrærne. Verdien av den forventede produksjonen økte for lavere satt sluttmagasin. For høyere diskonteringsrente sank den forventede totalverdien. Ved introduksjon av en lav negativ korrelasjon kunne det dog ikke observeres en betraktelig innvirkning på forventet verdi. Det observeres sesongvariasjon i både forventet produksjonsstrategi og magasinforløp.

En stor ulempe med presentasjon av stokastikken i form av et scenariotre er forutsetningen om at framtidige tilstander i treet ikke påvirkes av avgjørelser underveis. Strømpriser vil kunne påvirkes av produsentenes produksjonsplan. Denne påvirkningen antas å være mer betydelig for større produsenter.

Spotprismodellen i denne oppgaven tar ikke hensyn til alle de typiske egenskapene ved strømprisen, men ukesoppløsningen gjør at korttidsegenskapene ved strømprisen forsvinner. Det er også avgjort at antagelsene om standard normalfordeling ikke holder for avkastningen hos strømpriser.

Viktigheten av en god modell for prising kan underbygges med to viktige poenger; for det første må modellen brukes til å finne hvilken fremtidig pris vannet selges til, for det andre så må modellen brukes til å bestemme de fortløpende deltaene som brukes i hedge-strategien. En hedging-strategi bør funderes på en prismodell som tar hensyn til andre ordens markedsinformasjon. En forwardkurvemodell tar hensyn til dette, og antas å gjengi dynamikken til forward-kurven bedre. Det kan også være ønskelig med en modell som beskriver korrelasjonsstrukturen mellom spotpris og tilsig. Spotprismodellen kan lett oppgraderes i modellen som anvendes i denne oppgaven.

En hedging-strategi som innebærer mange og hyppige handler vil kunne føre til store transaksjonskostnader. Lange intervaller mellom hver gang det hedges kan føre til uønskede tap. Manglende innsyn i tilbudte opsjonspriser kan også føre til problemer ved kalibrering av en modell som baseres på andre ordens markedsinformasjon.



Den numeriske tilnærmingen i scenariotregenereringen gjør det mulig å implementere kompliserte pris- og tilsigsmodeller. Gitt den korte løsnings tiden for et relativt stort problem har metodene, etter forfatterens mening, et stort potensial innen planlegging og risikostyring av vannkraftproduksjon. Det er dog nødvendig med utvidelser og oppgraderinger av modellene ved en eventuell testing mot kommersielle planleggingsverktøy.

## **10 Anbefaling til videre arbeide**

Mulighetene for utvidelse av modellen er mange. Nedenfor er det presenter noen mulige utbedringer:

- Implementere ulineære produksjonsfunksjoner. Kjøretid er da ventet å øke betraktelig. Produksjonsfunksjonene kunne eventuelt blitt tilnærmet med flere plane restriksjoner som danner et konvekst mulighetsområde. Problemet vil da fortsatt kunne løses med lineær programmering
- Anvende en funksjon som gir verdien på sluttmagasin ut ifra forventninger om pris og tilsig.
- Teste ut med en prismodell er kalibrert til andre ordens markedsinformasjon, og som dermed beskriver dynamikken til forwardkurven bedre.
- Lage en skyggeportefølje og teste modellen mot kommersielle verktøy utviklet for produksjonsplanlegging av vannkraft.

## 11 Referanseliste

- Black, F. & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
- Brockwell, P. J & Davis, R. A. (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting* (2. utgave). New York: Springer-Verlag New York, Inc.
- Clewlow, L. & Strickland, C. (2000). *Energy Derivatives. Pricing and Risk Management*. London: Lacima Publications.
- Davison, M., Rasmussen, H. & Thompson, M. (2004). Valuation and Optimal Control of Electric Power Plants in Competitive Markets. *Operations Research*, 53(4), 546-562.
- Dixit A. K. & Pindyck, R. S. (1994). *Investment Under Uncertainty*. Princeton: Princeton University Press.
- Eydeland, A. & Wolyniec, K. (2003). *Energy and Power Risk Management. New Developments in Modeling, Pricing and Hedging*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.
- Fleten, S. E. & Wallace, S. W. (2003). Stochastic programming models in energy. | A. Ruszczyński & A. Shapiro (Red.), *Stochastic programming*, 637-677
- Fleten, S. E., Wallace, S. W., Ziemba T. (2002). Hedging electricity portfolios via stochastic programming. Decision making under uncertainty: Energy and power, 71-93.
- Fosso, O. B. (2005). *Produksjonsplanlegging i vannkraftbaserte systemer*. Notat, institutt for elkraftteknikk, NTNU.
- Gjelsvik A. (1992). *Stokastisk tilsigsmodell for driftsplanlegging*. Energiforsyningens Forskningsinstitutt AS.
- Glassermann (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag New York, Inc.
- Haug, E. G. (2005). Practical Valuation of Power Derivatives. Working paper, NTNU.
- Heitsch, H. & Römisch, W. (2003). Scenario reduction algorithms in stochastic programming. *Computational Optimization and Applications* 24, 187–206.
- Heitsch, H. & Römisch, W. (2005) Scenario tree modelling for multistage stochastic programs. *Humboldt-University Berlin, Institute of Mathematics*.
- Lucia, J. J. og Schwartz, E. (2001) Electricity Prices and Power Derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange. *Review of Derivatives Research*, 5, 5-50.
- McDonald, R. L. (2003). *Derivatives Markets*. Boston: Addison Wesley.

Nilsson, O. & Sjelvgren, D. (1997). Hydro Unit Start-up costs and Their Impact on the Short Term Scheduling Strategies of Swedish Power Producers. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12(1), 38-43.

Ross, S.M. (2003). *Introduction to Probability Models* (8. utgave). London: Academic Press.

Schwartz, E. S. (1997). The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. *The Journal of Finance*, 52(3), 923-973.

Trigeorgis, L. (1996). *Real Options. Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*. Cambridge: The MIT Press.

Tseng, C.L. & Barz, G. (2002) Short Term Generation Asset Valuation: A Real Option Approach. *Operations Research*, 50(2), 297-310.

## **Elektroniske ressurser**

Nord Pool. (2006). Data fra FTP-server.

Olje- og energidepartementet. (2005). *Fakta 2005 om energi- og vassdragsvirksomheten*.

Sintef (2006) [http://www.sintef.no/content/page1\\_\\_\\_\\_3557.aspx](http://www.sintef.no/content/page1____3557.aspx)

## **Samtale**

Gjelsvik, A. (2006). Samtale April, 2006

## Vedlegg 1: Algoritmer for Scenarioreduksjon og generering av scenariotrær.

Alle utledninger, teoremer og algoritmer er basert på artikler av Heitsch & Römis (2003 & 2006).

- $\xi, \{\xi_t\}_{t=1}^T$ ,  
 $\tilde{\xi}, \{\tilde{\xi}_t\}_{t=1}^T$  - n-dimensjonal stokastisk prosess med parametersett definert for  $\{1, \dots, T\}$ .
- $\xi^i, \xi^j$  - Scenarier (simulerte baner av  $\xi, \tilde{\xi}$ )
- $p_i, q_j$  - Scenariosannsynligheter, dvs  $p_i \geq 0, q_j \geq 0, \sum_i p_i = \sum_j q_j = 1$
- $P, Q$  - Sannsynlighetsfordelingene til prosessene  $\xi$  og  $\tilde{\xi}$ .
- $S$  - Antall scenarier i det opprinnelige settet med scenarier.
- $J$  - Det indekserte settet av de fjernede scenariene.
- $|J|$  - Kardinaliteten til det indekserte settet  $J$ , dvs antallet fjernede scenarier.
- $s = S - |J|$  - Antall gjenværende scenarier.
- $\varepsilon$  - Det tillatte avviket for reduksjonen.
- $c_i(\xi^i, \xi^j)$  - Avstand mellom scenario  $\{\xi^i\}_{\tau=1}^t$  og  $\{\xi^j\}_{\tau=1}^t$ .

Anta at sannsynlighetsfordelingen  $P$  for den n-dimensjonale stokastiske prosessen  $\xi, \{\xi_t\}_{t=1}^T$  er tilnærmet gitt av et endelig antall scenarier  $\xi^i, \{\xi_t^i\}_{t=1}^T, i = 1, \dots, S$ , og de tilhørende sannsynlighetene  $p_i, \sum_{i=1}^S p_i = 1$ . Velg en sannsynlighetsmetrikk slik at de optimale verdiene for det stokastiske programmene blir stabile med hensyn på avviket fra den underliggende sannsynlighetsfordelingen målt i den angitte metrikken. Her måles sannsynlighetsmetrikken i Kantorovich-avstander. For diskrete sannsynlighetsfordelinger med et endelig antall scenarier er Kantorovich-avstanden  $D_K$  den optimale verdien av et lineært transporteringsproblem. La  $Q$  være fordelingen til en annen n-dimensjonal stokastisk prosess  $\tilde{\xi}$  med scenarier  $\xi^j \in \mathbb{R}^{nT}$  og sannsynligheter  $q_j, j = 1, \dots, \tilde{S}$ . Da er

$$D_K(P, Q) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^{\tilde{S}} \eta_{ij} c_T(\xi^i, \tilde{\xi}^j) : \eta_{ij} \geq 0, \sum_{i=1}^S \eta_{ij} = q_j, \sum_{j=1}^{\tilde{S}} \eta_{ij} = p_i, \forall i, \forall j \right\},$$

hvor  $c_t(\xi^i, \tilde{\xi}^j) := \sum_{\tau=1}^t |\xi_\tau^i - \tilde{\xi}_\tau^j|$ ,  $t = 1, \dots, T$  og  $|\cdot|$  angir en standard for  $\mathbb{R}^n$ , dvs  $c_T$  er et mål på avstanden mellom scenarier for hele tidshorisonten  $\{1, \dots, T\}$ .

Dersom  $Q$  er den reduserte sannsynlighetsfordelingen til  $\xi$ , vil den minimale  $D_K$  - avstanden til  $P$  være,

$$D_K(P, Q) = \sum_{i \in J} p_i \min_{j \notin J} c_T(\xi^i, \xi^j), \quad (1)$$

og sannsynlighetene til de gjenværende scenariene  $\xi^j$ ,  $j \notin J$  for  $Q$  vil være gitt av regelen

$$q_j := p_j + \sum_{i \in J(j)} p_i, \quad (2)$$

hvor  $J(j) := \{i \in J : j = j(i)\}$ ,  $j(i) \in \arg \min_{j \notin J} c_T(\xi^i, \xi^j)$ ,  $\forall i \in J$

Betydningen av *den optimale omfordelingsregelen* (2) er at den nye sannsynligheten for et bevart scenario er lik summen av dens foregående sannsynlighet og alle sannsynlighetene til de fjernede scenariene som var nærmest med hensyn på  $c_T$ . Alle fjernede scenarier har sannsynlighet lik null. Det optimale valget for et indeksert sett  $J$  for scenarioreduksjon med kardinalitet  $|J|$  er gitt av løningen til *det optimale reduksjonsproblemet*,

$$\min \left\{ \sum_{i \in J} p_i \min_{j \notin J} c_T(\xi^i, \xi^j) : J \subset \{1, \dots, S\}, |J| = S - s \right\}, \quad (3)$$

hvor  $s = S - |J| > 0$  er antall bevarte scenarier.

Fra ligning (1) og (3) kan den *maksimale reduseringsstrategien (mrs)* avledes for å bestemme en redusert sannsynlighetsfordeling  $Q$  av  $\xi$ , slik at settet med fjernede scenarier har maksimal kardinalitet, og at  $D_K(P, Q) < \varepsilon$  blir overholdt. Da vil  $Q$  være tilnærmet den opprinnelige fordelingen med nøyaktighet  $\varepsilon > 0$ .

Bestem et indeksert sett  $J$  med maksimal kardinalitet  $|J|$  slik at

$$\sum_{i \in J} p_i \min_{j \notin J} c_T(\xi^i, \xi^j) \leq \varepsilon.$$

Omfordelingsregelen (2) gir sannsynlighetene  $q_j, j \notin J$ , til de bevarte scenariene.

### **Algoritme 1 – Foroverreduksjon**

**Steg 0:** Beregn avstandene mellom par av scenarier:

$$c_{ku}^{[1]} := c_T(\xi^k, \xi^u), k, u = 1, \dots, S.$$

**Steg 1:** Beregn:

$$z_u^{[1]} := \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq u}}^S p_k c_{ku}^{[1]}, u = 1, \dots, S.$$

$$\text{Velg } u_1 \in \arg \min_{u \in \{1, \dots, S\}} z_u^{[1]}.$$

$$\text{Sett } J^{[1]} := \{1, \dots, S\} \setminus \{u_1\}.$$

**Steg i:** Beregn:

$$c_{ku}^{[i]} := \min \{c_{ku}^{[i-1]}, c_{ku-1}^{i-1}\}, k, u \in J^{[i-1]}$$

og

$$z_u^{[i]} := \sum_{k \in J^{[i-1]} \setminus \{u\}} p_k c_{ku}^{[i]}, u \in J^{[i-1]}.$$

$$\text{Velg } u_i \in \arg \min_{u \in J^{[i-1]}} z_u^{[i]}.$$

$$\text{Sett } J^{[i]} := J^{[i-1]} \setminus \{u_i\}.$$

**Steg s+1:**  $J := J^{[S-s]}$  er det indekserte settet av fjernede scenarioer. Beregn de optimale sannsynlighetene for de bevarte scenariene med (2).

### Algoritme 2 – Generering av scenariotre

La tillatte avvik  $\varepsilon_t > 0, t = 1, \dots, T$  være gitt.

**Steg k = 1:** Anvend (**mrs**) og algoritme 1 til å beregne det indekserte settet  $J_T \subset \{1, \dots, S\} = I_{T+1}$  slik at

$$\sum_{i \in J_T} p_i \min_{j \in J_T} c_T(\xi^i, \xi^j) \leq \varepsilon_T$$

Sett  $I_T := I_{T+1} \setminus J_T$  og  $\xi_{app}^i := \xi^i, i \in I_T$ . Beregn de optimale sannsynlighetene  $\pi_T^i, i \in I_T$  for de bevarte scenariene med (2)

**k= t+1** Reduksjon:

Anvend (**mrs**) og algoritme 1 for å bestemme det indekserte settet  $J_t \subset I_{t+1}$  slik at

$$\sum_{i \in J_t} p_i \min_{j \in I_{t+1} \setminus J_t} c_t(\xi^i, \xi^j) \leq \varepsilon_t.$$

Sett  $I_t := I_{t+1} \setminus J_t$ .



### Scenario bunting

For hver  $j \in J_t$  velg en index  $i^* \in \arg \min_{i \in I_t} c_t(\xi^i, \xi^j)$ , legg  $\pi_{t+1}^j$  til  $\pi_{t+1}^{i^*}$  og

bunt scenario  $j$  med  $i^*$ , dvs

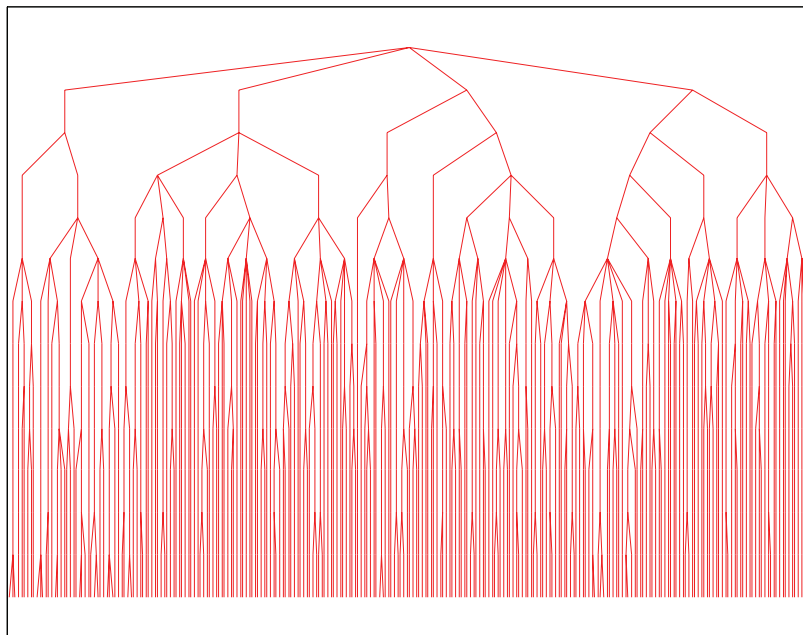
$$\xi_{t,app}^j := \xi_t^{i^*} \text{ for } \tau = 2, \dots, t,$$

$$\xi_{t,app}^j := \xi_t^j \text{ for } \tau = t+1, \dots, T.$$

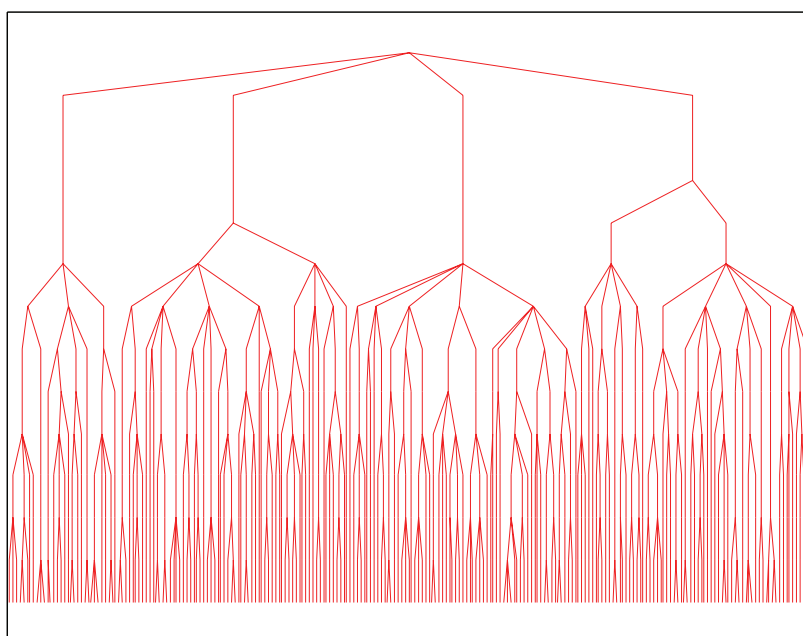
$$\text{Sett } \xi_{t,app}^i := \xi_{t+1,app}^i, \pi_{t+1}^i, i \in I_t.$$

**Steg k = T** Sett  $\xi_{1,app}^i := \xi_1^*$ . Det resulterende treet består av scenariene  $\{\xi_{t,app}^i\}_{t=1}^T$  for  $i \in I_T$ .

## **Vedlegg 9: Scenariotrær**



**Figur V9.1: Scenariotre generert med reduksjonsnivå= 0,25.**



**Figur V9.2: Scenariotre generert med reduksjonsnivå= 0,40.**

## Vedlegg 10: Programstruktur

