



Forord

Denne rapporten er skrevet i forbindelse med SIS1101, fordypningsemet i investering, finansiering og økonomistyring ved Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse (IØT) ved Norges teknisk naturvitenskaplige universitet (NTNU) høsten 2001. Vi vil gjerne rette en takk til vår veileder, Stein-Erik Fleten for gode og kjappe tilbakemeldinger og tips om relevant litteratur, Anders Gjeldsvik, Arne Haugstad og Birgir Mo ved Sintef Energiforskning for verdifull utdyping og diskusjon av enkelte temaer samt energidata, Thore Jarlset i NVE for energidata og Per Bjarne Solibakke ved Høyskolen i Molde for upubliserte artikler.

S. e. & o.

Trondheim, 11. desember 2001,

Gunnar Aronsen, stud. tech.
aronsen@stud.iot.ntnu.no

Dag M. Dybdahl, stud. tech.
dagmeide@stud.iot.ntnu.no



Sammendrag

I denne oppgaven er det gjort en studie av de viktigste egenskapene til forward- og spotpriser i lys av moderne finansteori. Hvordan risikopremie og eierfordelen opptrer i kraftmarkedet behandles også. Resultater fra forskjellige empiriske studier av spot og forwardprisen er også presentert. Metodikk for konstruksjon av forskjellige kategorier terminprismodeller er overflatisk gjort rede for. Dessuten vurderes fire modeller som er utviklet for å beskrive spot- og terminpriser i det nordiske markedet. Vi forsøker også å gi en forklaring på hvorfor standardavviket er så høyt i kraftmarkedet i forhold til finansmarkedet. Vi fører et generelt arbitrasjeargument for hvorfor forwardpriser skal brukes til å maksimere markedsverdien til en produsent.

Vi forsøker å finne det særegne med driftsplanleggingen for en vannkraftprodusent, hva som skiller planleggingen til en vannkraftsprodusent fra en termisk kraftprodusent. Innvirkningen av fastkraftsforpliktelser drøftes også. En overflatisk presentasjon av en løsningsalgoritme for driftsplanlegging i vannkraftproduksjon er også gjennomført. Algoritmen er SDDP (stokastisk dual dynamisk programmering) som er utviklet av Pereira [1989].

Videre har vi behandlet to utbredte modeller for magasintilsig og elpris utviklet av Sintef Energiforskning. Modellene brukes som undermodeller i driftsplanleggingen. De viktigste statistiske egenskapene til modellene er vurdert. Vi konstaterer at evnen til å simulere eller representere korrekt varians ikke er tilstede i begge modellene. Følgene er vurdert for begge modellene, og vi foreslår hva som bør forbedres i nye modeller.

Helt til slutt kommer vi med ideer til forbedring av en prismodell ved bruker terminpriser i stedet for forventet spotpris. Vi begrunner og diskuterer hvilke faktorer som bør inngå og utelates. Vi foreslår at faktorene tilsig, sesongvariasjon og eventuelt en trendfaktor skal inngå i en ny modell.



FORORD	I
SAMMENDRAG	II
1. INNLEDNING	1
2. MODERNE FINANS I ELKRAFTMARKEDET	2
2.1. INNLEDNING	2
2.2. FINANSIELLE INSTRUMENTER I ELKRAFTMARKEDET	3
2.2.1. <i>Terminkontrakter</i>	3
2.2.2. <i>Opsjoner</i>	3
2.3. RISIKOPREMIE	3
2.4. MARKEDSPRISEN FOR RISIKO	4
2.5. EIERFORDEL	5
2.6. EMPIRISKE STUDIER AV SPOTPRISEN	5
2.6.1. <i>Middel-returprosess i forventningsverdi</i>	5
2.6.2. <i>Seriekorrelasjon</i>	6
2.6.3. <i>Hopp</i>	6
2.6.4. <i>Standardavviket til spotprisen</i>	6
2.7. EMPIRISKE STUDIER AV FORWARDPRISEN	7
2.7.1. <i>Empiriske funn knyttet til forventningsverdi</i>	7
2.7.2. <i>Empiriske funn knyttet til standardavviket</i>	8
2.8. METODIKK FOR Å MODELLERE FOR TERMINPRISER	8
2.9. MODELLER SOM FINNES	9
2.9.1. <i>Lucia og Schwartz [2000]</i>	9
2.9.2. <i>Koekebakker og Ollmar [2001]</i>	10
2.9.3. <i>Solibakke [2001]</i>	10
2.9.4. <i>Fleten [2000]</i>	11
2.10. HVA GIR VARIERENDE STANDARDAVVIK	12
2.10.1. <i>Påvirkninger i dagens marked</i>	12
2.10.2. <i>Mulige fremtidige påvirkninger</i>	14
2.10.3. <i>Innvirkning fra likviditeten i markedet</i>	15
2.10.4. <i>Leveringssted og -tid</i>	15
2.11. MAKSIMERING AV MARKEDSVERDIEN TIL EN PRODUSENTEN	16
2.11.1. <i>Bruk av forward for å maksimere markedsverdi</i>	16
3. DRIFTSPLANLEGGINGSPROBLEMET	16
3.1. INNLEDNING/GENERELT	16
3.2. HVA ØKER KOMPLEKSITETEN	17
3.3. FORMULERING AV OPTIMERINGSPROBLEMET	19
3.3.1. <i>Bruk av kostnadsfunksjon for å maksimere profitt</i>	19
3.3.2. <i>Matematisk formulering av driftsplanleggingsproblemet</i>	20
3.3.3. <i>Hva inngår i ICF og FCF</i>	21
3.4. FASTKRAFTFORPLIKTELSENS VIRKNING PÅ DRIFTSPLANLEGGINGEN	22
4. ALGORITMER FOR LØSNING AV DRIFTSPLANLEGGINGSPROBLEMET	23
4.1. INNLEDNING	23
4.2. NØDVENDIGE BETINGELSER FOR SDDP	24
4.3. FORMULERING AV SUBPROBLEM I SDDP-ALGORITMEN	24
4.3.1. <i>Løsningen av ett-stepsproblemet</i>	25
4.4. LØSNINGEN AV PLANLEGGINGSPROBLEMET MED SDDP	26



4.4.1.	Rekursivt skjema	26
4.4.2.	Algoritme	26
4.5.	BEREGNING AV NEDRE GRENSE	28
4.6.	BEREGNING AV ØVRE GRENSE	28
4.6.1.	Foroversimulering	29
4.7.	KONVERGENS	29
5.	TILSIGSMODELLEN	30
5.1.	BAKGRUNN	30
5.2.	MODELLFORUTSETNINGER	31
5.3.	KRITIKK AV MODELL	32
5.3.1.	Sesongavhengighet og datagrunnlag	32
5.3.2.	Korrelasjon	33
5.3.3.	Varians	34
5.3.4.	Fordelingens egenskaper	34
5.4.	OPPSUMMERING	35
6.	PRISMODELLEN	35
6.1.	BAKGRUNN	35
6.2.	MODELLFORUTSETNINGER	36
6.3.	KORT MODELLBESKRIVELSE	36
6.3.1.	Diskretisering	36
6.3.2.	Estimering av overgangssannsynligheter	36
6.3.3.	Ekstremscenarier	37
6.4.	KRITIKK AV MODELL	37
6.4.1.	Modellvalg	37
6.4.2.	Scenariene	37
6.4.3.	Ekstrempriiser	38
6.5.	OPPSUMMERING	38
7.	UTVIKLING AV NY PRISMODELL	38
7.1.	HVORFOR NY PRISMODELL	38
7.2.	FEIL VED BRUK FORVENTET SPOTPRIS	39
7.3.	FORUTSETNINGER FOR MODELLEN	40
7.4.	HVA BESTEMMER FORWARDPRISEN	40
7.5.	HVILKE FAKTORER BØR VÆRE MED I EN MODELL	41
7.5.1.	Faktorer som utelates	41
7.5.2.	Faktorer som ikke tilpasses direkte	42
7.5.3.	Faktorer som skal inngå i modellen	43
8.	OPPSUMMERING	44
9.	REFERANSE- OG LITTERATURLISTE	A
Figurliste:		
FIGUR 2.10.1-1	KURVER TILBUD OG ETTERSPORSEL.....	13
FIGUR 3.3.3-1	FORHOLD MELLOM ICF OG FCF	21
FIGUR 4.2-1	MAGASININDELING OG FCF.....	24
FIGUR 4.5.2-1	NEDRE GRENSE.....	28



1. Innledning

Å planlegge driften av vannkraftanlegg er en omfattende oppgave. Etter dereguleringen i Norge etter 1990 er markedsmekanismen tatt i bruk og den nordiske elkraftbørsen NordPool opprettet. Å operere i et konkurranseutsatt marked er alltid mer ubehagelig enn i en monopolsituasjon og stiller store krav til vannkraftprodusenten når det gjelder produksjonsplanlegging, risikostyring og handel med elkraft. Tilsigsusikkerheten er som før, men prisen er kommet inn som usikkerhetsmoment.

I denne oppgaven forsøker vi å presentere hvilke parametere og faktorer som påvirker driftsbeslutningen, samt gi innblikk i noen av modellene og løsningsalgoritmene som finnes, deriblant SDDP (stokastisk dual dynamisk programmering). Mer spesifikt presenterer og vurderer vi to stokastiske modeller av magasintilsg og kraftpris. Vi skal også prøve å komme med innledende tanker og forslag rundt å forbedre prismodellen, med mål å forsøke å integrere informasjonen som finnes i finansproduktene forwards/futures på elektrisitet i den nye prismodellen.

Pilopovic [1998] påpeker at nye og ikke minst gode modeller for energimarkedet, spesielt for elkraftmarkedet, må utvikles i nært samarbeid med personer som kjenner markedene og systemene godt – bedriftsledere, tradere, kvantitative analytikere og ingeniører. Dermed kan modellutviklerne få innspill fra alle sider og aspekter av saken. En ren akademiker kan bøte på dette med å studere materiale og tilegne seg kunnskap om markedene eller rett og slett å trekke inn andre fagkrefter i utviklingsprosessen. Først da vil han kunne gjøre fornuftige forenklinger, men likevel beholde enkelte aspekter som trenger mer finmasket modellering. Som studenter har vi ikke muligheten til å trekke inn kompetanse fra andre fagpersoner i samme grad som noen som arbeider i et slikt miljø. Alternativet som gjensto var å derfor å tilegne seg denne kunnskapen på egenhånd.

Oppgaven kan derfor betraktes som et forstudium til Gunnar Aronsens hovedoppgave berammet til våren 2002 med mål å utvikle forbedrete modeller nettopp for tilsg og pris. Dag M. Dybdahl bruker oppgaven også til et forstudium i



forbindelse med sin hovedoppgave ”Verdisetting av et tidevannskraftverk”, også våren 2002. Dermed vil nok oppgaven for enkelte lesere fremstå noe fragmentarisk.

2. Moderne finans i elkraftmarkedet

2.1. Innledning

Hensikten med dette kapitlet er blant annet å belyse sentrale aspekter ved kraftmarkedet. Dette blir et viktig grunnlag for det videre arbeidet på hovedoppgaven. Teorien og øvrige aspekter som beskrives gjøres med tanke på dette, samt det å knytte moderne finansteori til problemstillingene i kraftmarkedet. Det siste er gjort fordi mye av den moderne finansteorien er utviklet spesielt for andre markeder.

For elkraftbransjen har det opp gjennom tidene kommet ymse modeller for elprisen, det være seg spot- eller terminprisen. Felles for alle er at ingen av dem har slått virkelig gjennom, som eksempelvis Black/Scholes-modellen fra 1973 har gjort for opsjonsprisingen.

De fleste betydelige metoder/definisjoner i utledningen av derivatpriser i dag er myntet på finansmarkedet. Det er derfor ikke uten videre gitt at disse metodene/definisjonene kan brukes i elmarkedet. Nedenfor vurderes hvordan blant annet eierfordelen og risikopremie kan oppfattes i elmarkedet kontra finansmarkedet.

Videre er forskjellige metoder for å konstruere terminpriser i elkraftmarkedet overflattisk presentert og modeller fra forskjellige studier er også overflattisk beskrevet. En rekke empiriske studier av matematiske og statistiske egenskaper for spot- og forwardpriser er gjennomført med utgangspunkt i elmarkedet. Resultatene fra disse studiene, som er publisert i både bøker og vitenskaplige tidsskrifter.

Variansen som er i elmarkedet skiller seg vesentlig fra den observert i finansmarkedet, og grunnen er forsøkt forklart. Det er også generelt argumentert for hvorfor forwardprisen bør brukes i verdissetingen av en vannkraftprodusent.



2.2. Finansielle instrumenter i elkraftmarkedet

Finansielle instrumenter brukes til å sikre seg mot prisforandringer og risiko. Det finnes to hovedtyper finansielle instrumenter – terminkontrakter og opsjoner. Felles er at de har et underliggende, det være seg elektrisk kraft, brensel eller en indeks. Det underliggende kan også være en annen terminkontrakt eller opsjon. I det nordiske markedet er systemprisen det underliggende. Videre snakker man heller om en leveringsperiode snarere enn et leveringstidspunkt, siden elkraft ikke er en bulkvare og må brukes i det øyeblikket den lages.

2.2.1. Terminkontrakter

Forwards og futures som begge er kontrakter om fremtidig levering til en på forhånd avtalt pris. Forskjellen er at ved forwards skjer oppgjøret på leveringstidspunktet, men for futures følger oppgjøret daglig. Forwards og futures har begge verdien null i det øyeblikket de inngås, en verdi oppstår når prisen på det underliggende er forskjellig fra avtalt pris, den endelige verdien avgjøres på leveringstidspunktet. I det nordiske markedet er NordPool alltid kontraktpartner både for selgere og kjøpere av en terminkontrakt.

2.2.2. Opsjoner

Opsjoner er retten, men ikke plikten til å gjennomføre en handel. Opsjoner deles gjerne inn i kjøpsopsjoner (call) og salgsoptionsjoner (put) der det er mulig å ta kjøper- (long) eller selgerposisjon (short). Sitter en person eksempelvis i selgerposisjon i en kjøpsopsjon betyr det at motparten har retten, men ikke plikten, til å kjøpe en vare av personen. På grunn av denne valgmuligheten har en opsjon en pris. I det nordiske elkraftmarkedet utskrives hovedsakelig europeiske opsjoner med en forwardkontrakt som det underliggende, asiatiske opsjoner finnes også.

2.3. Risikopremie

Store svingninger i produksjonsinntektene blir oppfattet som negativt. Derfor har mange selskaper egne ansatte med ansvar for å minimere risikoen ved hjelp av portefølje- og risikoforvaltning. Selskapene er altså villige til å bruke ressurser på å minimere risikoen. Finansielle produkter som nettopp kan hjelpe til med å minimere



risikoen kan dermed ha en pris. Som analogi kan vi tenke oss at et forsikringsselskap overtar risiko mot en årlig premie. I elkraftsammenheng tenker vi oss denne risikopremien i nær sammenheng med eierfordelen. Se mer om eierfordel i kapittel 2.5.

2.4. Markedsprisen for risiko

Risikopremien er forskjellen mellom forventet spotpris i et tidspunkt og en forward med levering i samme tidspunkt, om det forutsettes salg i et likvid og modent marked. Dersom vi bruker definisjonene som gjelder for aksjemarkedet, kan vi utlede forwardprisen med utgangspunkt i denne risikopremien:

S_t = Spotprisen ved tidspunkt t .

μ = Avkastningen på aksjen med konternuerlig forrentning.

t = Observasjonstidspunkt.

T = Innløsningstidspunkt forwardkontrakt.

r = Risikofri rente ved konternuerlig forrentning.

σ = Standardavviket på prisen til aksjen.

$F_{t,T} = S_t \cdot e^{r(T-t)}$: Forwardprisen observert ved tidspunkt t og (1)
med innløsningstidspunkt T .

$E_t[S_T] = S_t \cdot e^{\mu(T-t)}$: Forventet spotpris ved tidspunkt T . (2)

Gitt likning (1) kan forwardprisen uttrykkes slik:

$F_{t,T} = E_t[S_T] \cdot e^{(r-\mu)(T-t)}$ (3)

Med r og μ konstante er da forwardprisen proporsjonal med forventet spotpris.

Definerer :

$\lambda = \frac{(\mu - r)}{\sigma}$: Markedskostnaden for risiko [Pilipović 1998, s 88]. (4)

Eller uttrykt på en annen måte: $\lambda \cdot \sigma = \mu - r$ Markedets risikopremie.

Setter (4) inn i (3):

$F_{t,T} = E_t[S_T] \cdot e^{-\lambda \sigma (T-t)}$: Forwardpris uttrykt ved hjelp av risikopremien. (5)

Forwardpris er derfor pr. definisjon denrisikojusterte forventede spotprisen.

Risikopremien i markedet kan være både positiv og negativ, hvilket leder til at den forventete spotprisen vil kunne være både høyere og lavere enn forwardprisen. Empiriske undersøkelser av blant annet Koekebakker og Ollmar [2001] og Lucia og



Schwartz [2000] viser at denne premien er stort sett har vært positiv de siste fem år. Det betyr at spotprisen stort sett har vært høyere enn forwardprisen for elkraft med levering på samme tidspunkt.

2.5. Eierfordel

Eierfordelen (convenience yield) kan betraktes som fordelen ved å ha en vare minus kostnaden ved å lagre varen, finansielle kostnader tas ikke med i dette regnestykket. Selv om strøm ikke kan lagres betyr ikke dette noe for eksistensen av eierfordelen, kun hvordan den tolkes. I kraftmarkedet blir eierfordelen fordelen av å ha tilgang til kraft med avtalt pris og/eller volum. En slik fordel har åpenbart verdi for en rekke forbrukere som ønsker å sikre seg mot usikkerhet. For hvordan eierfordelens størrelse bestemmes og brukes til å pris kraftderivater, se Fleten [2000].

2.6. Empiriske studier av spotprisen

2.6.1. Middel-returprosess i forventningsverdi

Finansbransjen arbeider gjerne med lognormale prismodeller som er meget lett å bruke og er fleksible å implementere, dessuten blir prisen alltid positiv. Disse modellene kan vi også bruke for energimarkedet, men det viser seg at prisfordelingen blir langt riktigere hvis vi innfører middel-returegenskapen (mean reversion). Flere forfattere, blant dem Clewlow & Stickland [2000, s 18], påpeker middel-retur er et kjennetegn ved energispotpriser. Middel-retur innebærer at spotprisen beveger seg rundt en langsiktig likevektspris. Dette virker også fornuftig siden vi vet at dersom prisen blir lav, vil endel aktører med høy marginalkost trekke seg ut av markedet, tilbudet går ned og prisen opp. Blir prisen derimot høy, er det attraktivt å sette inn kraftverk med høy marginalpris, tilbudet går opp og prisen ned.

Et aspekt ved middel-retur er halveringstiden. Den aller enkleste form for middel-returegenskapen er

$$dx = \alpha(x_m - x)dt$$



med x som den naturlige logaritmen til spotprisen, x_m langsiktig middelpriis og α middel-retur-raten. α sier altså noe om hvor fort den variable returnerer til det langsiktige middelpriisen. For $\alpha=1$ er halveringstiden 8 måneder, $\alpha=10$ 25 dager, $\alpha=100$ 2,5 dager og $\alpha=1000$ 6 timer.

2.6.2. Seriekorrelasjon

Annerledes enn i mange markeder observerer vi at spotprisen er tidsavhengig, mye på grunn av sesongvariasjon. Sammenligner vi spotprisen over mange år, kan vi observere at den er høy om vinteren og lav om sommeren. Dette forklares ganske enkelt med at hvordan oppvarmingsbehovet er. At tilsiget i negativt korrelert med elkraftbehovet forsterker denne effekten.

Solibakke [2001a] viser at det finnes seriekorrelasjon i spotprisen med opptil 14 dagers tidsforsinkelse. En slik seriekorrelasjon innebærer at forventet spotpris er betinget av hva spotprisen var innenfor denne tidsperioden. Seriekorrelasjon er spesielt fremtredende for tidsforsinkelsen 1, 7 og 14 dager. I motsetning til i finansmarkedet hvor en slik seriekorrelasjon kan skyldes asynkronhandel, er årsaken her regulære forbruksmønstre og informasjonen om dette absorbert av alle deltakerne i elmarkedet.

2.6.3. Hopp

Plutselige diskontinuerlige forandringer i spotprisen kan fra tid til annen observeres. Disse forandringene kan være kraftige prishopp opp eller ned og varer ikke lenge. Omsider returnerer de til den langsiktige middelpriisen. Årsaken til et slikt hopp i USA var bortfall av flere produksjonsheter samtidig med redusert kapasitet i overføringsnettene. Prisen endret seg da fra 50 \$/MWh til 7000 \$/MWh innen kort tid [Deng 1999].

2.6.4. Standardavviket til spotprisen

Standardavviket til spotprisen innehar mange av de samme egenskapene som finnes hos forventningsverdien. Den følger en middel-returprosess, og er også utsatt for hopp. Seriekorrelasjon i standardavviket er funnet signifikante opptil 15 dager både



for hopp og ordinære observasjoner. Statistiske tester er også gjort og disse forkaster hypotesen om konstant standardavvik [Solibakke 2001a], en antar dermed at standardavviket er tidsavhengig (heteroskedastisk).

Observert standardavvik er størst om sommeren og lavest om vinter og er dermed negativt korrelert med prisen. Årsaken er at prisen er høyest om vinteren og lavest om sommeren. Dette resulterer i at absolutte endringer i pris er størst om vinteren, men relativ endring er mindre dersom de som skjer i en periode med lave priser. Etterspørselskurven er også rimelig inelastisk når prisen er lav og bidrar dermed til å gi høyere standardavvik i perioder med lav pris fordi forbruket ikke endres vesentlig ved prisvariasjoner.

2.7. Empiriske studier av forwardprisen

Empiriske funn i Solibakkes [2001b og 2001d] studier er presentert her, noen resultater fra andre studier er tatt opp kapittel 2.9. Solibakkes studier er basert på prisene for ettårige forwardkontrakter med daglig handel. Hovedfokus i studien av forwardmarkedet er å undersøke seriekorrelasjonen og forventningsverdien samt hvorvidt standardavviket er betinget tidsavhengig og har klaseeffekter.

2.7.1. *Empiriske funn knyttet til forventningsverdi*

Funn viser at forventningsverdien har signifikant negativ drift. Inntil to tidssteg bakover er den også seriekorrelert, og indikerer forutsigbarhet i elmarkedet. Korrelasjonskoeffisienten for første steg er positiv, noe som tyder på at ny informasjon absorberes tregt i markedet. Størrelsen på andre korrelasjonskoeffisient er lik den første, men negativ, og leder til at forventningsverdien følger en middelreturprosess på samme måte som spotprisen. Denne seriekorrelasjonen tyder på at markedsaktørene bruker en to-dagers strategi for å unytte tregheten i absorpsjonen av ny informasjon. Funn støtter også hypotesen om at avkastningen ikke er normalfordelt, men at denne har en tykkhalet fordeling (leptokurtose).



2.7.2. Empiriske funn knyttet til standardavviket

Den empiriske oppførselen til standardavviket viser flere interessante egenskaper. Viktigst er at standardavviket er seriekorrelert og dermed betinget avhengig av de initielle verdiene. Her, som for spotprisen, har vi klaseeffekter i standardavviket. Prishoppet forstyrrer prisprosessen slik at middel-retureffekten blir midlertidig redusert. Store prisendringer i tidssteg $t-1$ påvirker også størrelsen på standardavviket kraftig i tidssteg t . Hvor lenge effekten av prishopp og ordinære svingninger påvirker standardavviket er estimert til omkring 9 handledager. Om prishoppet er opp eller ned har ikke noen betydning for hvor lenge standardavviket påvirkes.

Følgene av disse funnene er at en opsjon på en derivat ikke kan prises ved å bruke Black/Scholes uten modifikasjon. For en opsjon med løpetid fra $t \rightarrow T$ må σ byttes ut med $\int_t^T \sigma(s) \cdot ds$ over opsjonens levetid i Black/Scholes-formelen. Mer viktig er kanskje at opsjonene ikke kan prises fordi vi nå har to kilder til usikkerhet og dermed ikke kan lage en duplikasjonsportefølje for å prise opsjonen.

2.8. Metodikk for å modellere for terminpriser

I følge Clewlow og Strickland [2000] kan terminpriser lages på tre forskjellige måter.

- økonometrisk tilnærming,
- arbitrasjepricing,
- spotprismodellering.

Ved en økonometrisk tilnærming er utgangspunktet en rekke faktorer som antas å påvirke prisen. Vanlige faktorer er brenselpris, overføringskapasitet, total etterspørsel og etterspørsel ned på regionsnivå med timesoppløsning. Utdata fra en slik modell vil være en simulert forventet spotpris med timesoppløsning. Dette er ikke forwardpriser, som er definert til markedets pris på en vare levert på gitt tidspunkt i fremtiden.

Bruk av arbitrasjepricing gjelder først og fremst termiske kraftverk. Forholdet mellom brenselpris og kostnad for produksjon følger:



$$Kostnad_{str\ddot{o}m} = Varmefaktor * Pris_{brensel}$$

Varmefaktor sier noen om hvor mye brensel som trenges i kraftverket for å generere en kWh strøm. Gitt dette forholdet kan grunnlaget for en forwardkurve dannes ved bruk av forwardkurven til brensel. En endelig forwardkurve lages ved å ta hensyn til kapitalkostnader, transportutgifter og andre utgifter. Verdi på varmfaktoren vil trolig være nær konstant i tidsrom opptil 3 år. Etter dette vil usikkerhet i form av ny teknologi kunne påvirke den. Øvrige kostnader vil også endre seg og verdien av å bruke en slik forwardkurve vil være begrenset utover ovenfor nevnte tidsrom.

Den siste metoden utleder forwardprisene ut fra antagelsen om at om at stokastiske faktorer driver spotprisen og at variable som langtidspis, eierfordel, og renter også har en betydning. Metoden innebærer å definere de stokastiske faktorene som driver spotprisen. Forwardprisen som antas å avhenge av de samme stokastiske variable og øvrige nevnte variable, kan da utledes ved bruk av diverse matematiske teknikker. Metoden er vanlig innen finansmarkedet og eksempler kan finnes i Hull [1999].

2.9. Modeller som finnes

2.9.1. *Lucia og Schwartz [2000]*

Lucia og Schwartz tar utgangspunkt spot- og terminprisen i det nordiske markedet når de skal evaluere fire diskrete en-faktormodeller for elkraftderivater der faktoren er spotprisen. For to av modellene brukes den ”rene” spotprisen og for to den naturlige logaritmen til spotprisen. Fordi elektrisk kraft ikke kan lagres kan ikke arbitrasjeargumenter i tid og rom brukes og elprisen bli avhengig av momentan og lokal etterspørsel og tilbud. Forfatterne gjennomfører en rekke statistiske tester og finner momentene for å bestemme modellparametrene. Selve modellene tar utgangspunkt i en stokastisk prosess med en deterministisk del og en stokastisk del. Den stokastiske delen er en standard brownsk bevegelse med en stasjonær middelreturegenskap.



To forskjellige deterministiske komponenter i hver sin modell fanger opp de forutsigbare elprisvariasjonene. Forfatterne finner ut at spesielt sesongvariasjonene er sentrale for å forklare hvorfor derivatprisstrukturen ser ut som den gjør. De empiriske sammenligningene viser at datagrunnlaget ennå er for spinkelt for å kunne underbygge denne påstanden fullstendig. Dessuten viser det seg at et sinusformet ledd beskriver de deterministiske, sesongbetonte prosessene best.

2.9.2. Koekebakker og Ollmar [2001]

Artikkelen tar seg fore å empirisk undersøke elforwardpriser og presentere en multifaktormodell avledet fra Miltesen og Schwartz fra 1998. Problemet med eksisterende modeller for spotprisen som brukes til å avlede forwardprisen, er avviket mellom observerte og teoretiske verdier. Forfatterne ønsker å finne en fremgangsmåte å predikere forwardkurver. De tar utgangspunkt i tre faktorer – forskyvings- (shifting), vippe- (tilting) og bøyefaktor (bending). Forskyvingsfaktoren parallellforskyver kurven i en retning, vippefaktoren forårsaker at kort- og langstidskontraktene beveger seg i motsatte retninger, bøyefaktoren gjør at halene oppfører seg motsatt av midtfeltet. Disse faktorene forklarer så mye som 95-98% av variasjonene.

Usikkerheten modelleres med en K-dimensjonal brownsk bevegelse og modellene arbeider med ekvivalent matingalmål og deterministisk volatilitet. Den ene bruker volatilitet proporsjonal med forwardprisnivået mens den andre uavhengig volatilitet. Prinsipalkomponentanalyse tas inn for å identifisere faktorstrukturen, som kumulativt forklarer 70% og 78% av variasjonen med henholdsvis én og to faktorer, men så mange som ti for å 95%. Dette er et høyt antall sammenliknet med andre markeder.

2.9.3. Solibakke [2001]

Solibakke [2001c] tar for seg modell med stokastisk standardavvik for diskret tid. Modellen tilpasses det nordiske forwardmarkedet. Som navnet indikerer er det en egen modell for standardavviket, og denne verdien er inngangsverdier i en middelverdimodell som tilpasses samtidig. Modellen er en økonometrisk tilnærming til konstruksjon av forwardkurven. Parametere i både middelverdien og standardavvikmodellen er derfor kun tilpasset ved bruk av forwardprisene. Datasettet



som er brukt til å tilpasse modellen, er 790 observasjoner av daglige prisendringer av ettårs forwardpriser fra 1997-2001 fra Nordpool.

Modellen er særlig godt egnet til å gi forklaring på effekter fra asynkronhandelen. I et marked fremkommer asynkrone effekter når dagsprisen blir satt til den prisen siste handel hadde. Denne handelen kan en dag gjøres kl 12⁰⁰ og for neste dag er siste handel kl 15⁴⁵. Tidsrommet mellom prisobservasjonene er derfor ulikt. Asynkronhandel kan på grunn av dette introdusere skjevhet i forhold til den sanne fordelingen til prisendringene.

Den stokastiske standardavvikmodellen unngår dette problemet ved at standardavviket er generert uavhengig av middelverdiprosessen i motsetning til GARCH-modeller hvor standardavviket har en avhengighet av middelverdiprosessen [Solibakke 2001a].

Resultatene viser at en modell for stokastisk standardavvik uten tidskorrelasjon ikke kan modellere det nordiske forwardmarkedet, og en slik modell forkastes på grunnlag av statistiske tester. En modell med seriekorrelasjon for ett tidssteg er også tilpasset og viser seg å kunne modellere den nordiske markedet. Modeller med seriekorrelasjon i mer enn ett tidssteg er også testet, men forkastes fordi ingen er bedre enn modellen med seriekorrelasjon i ett tidssteg.

Konklusjonen er at en stokastisk standardavviksmodell håndterer asynkronhandel og lavt omsetningsvolum i markedet, og modellerer derfor det nordiske forwardmarkedet tilfredstillende. Dokumentasjonen på dette er dessverre ikke tilgjengelig i artikkelen, da vi ikke har nyeste versjon.

2.9.4. *Fleten [2000]*

Fleten ønsker i sin doktoravhandling å komme med et bidrag til porteføljevaltning i blant annet energibransjen. Han utvikler en to-faktormodell for elkraftprisen og legger tidshorizonten til lenger enn en uke for lettere å fange opp de store linjene og variasjonene. Faktorene er spotprisen og eierfordelen (eierfordel forklart mer



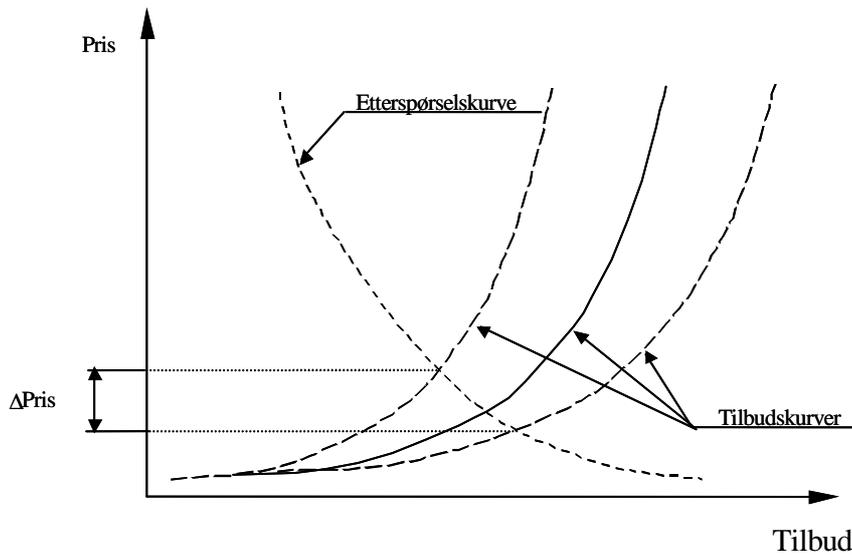
inngående i kapittel 2.5) der spotprisens deterministiske del er avhengig av eierfordelen, og eierfordelen fremviser middel-returegenskapen og årlige sesongvariasjoner. De to stokastiske prosessdelene er wienerprosesser og er korrelerte. For å løse opp de stokastiske fundamentale partielle differensallikningene brukes arbitrasjeargumenter, mest fordi eierfordelen tillater en slik argumentasjonsrekke. Fleten avleder også terminprisen under et risikonøytralt mål for å kunne innlemme informasjonen innbakt i derivatprisen.

Videre antar forfatteren at ingen av aktørene utnytter verken markedsrett eller asymmetrisk informasjon. Dessuten er den risikofrie renten konstant. Modellen testes med et omfattende datasett med 90 tilstandvariable, men resultatet har ikke blitt like overbevisende som man hadde håpet på. Dette kommer mest sannsynlig av at prisen antas statistisk uavhengig av tilsiget.

2.10. Hva gir varierende standardavvik

2.10.1. Påvirkninger i dagens marked

For de nordiske kraftmarkedet er det årlige standardavviket i snitt 189% for 1990-tallet [Lucia & Schwartz 2000, s8]. Pilipovic [1998] viser et stort standardavvik også for det nordamerikanske kraftmarkedet. Til sammenlikning er standardavviket i aksjemarkedet omkring 20% pr år. Standardavviket er også tidsavhengig og dette er vist i en rekke studier. Årsaken til at prisen har et så stort standardavvik kan forklares med hvor kryssingspunktet mellom tilbud- og etterspørselskurven faller. Dette kan illustreres med figuren under.



Figur 2.10.1-1 Kurver tilbud og etterspørsel

Tilbudsfunksjonen blir satt sammen av de økende marginalkostnadene for forskjellige kraftverkstyper. Grovt sagt kan man si at kurven bygges opp med følgende rekkefølge i kraftverkstype: elvekraft, kjernekraft, kullkraft, oljekraft, gasskraft, ekstraordinære tiltak som stenging av industrianlegg [Faanes 2000]. ”Marginalkostnaden” for vannkraften varierer med vannverdien, dermed kan ikke vannkraften tilordnes en fast plass i dette hierarkiet. Som indikert i figuren vil en liten endring i tilbudet, det vil si en forsyvning av tilbudskurven, gi store variasjoner i prisen. Aller størst blir dette når krysningen skjer langt ned på etterspørselskurven, fordi elastisiteten til etterspørselskurven er minst her [Solibakke 2001c].

Vannkraften er lett å regulere og har forholdsvis små start/stoppkostnader sammenlignet med annen type kraftproduksjon. Flexibiliteten gjør at produsenten kan tilby kraft når etterspørselen er høyere enn tilbudt mengde fra grunnlastkraftverkene. Når etterspørselen overgår dette nivået, stiger strømprisen, og andre termiske kraftverk startes opp om prisen er høy nok. Når prisen er midt i mellom to ”trinn” på marginalkostnadskurven, lønner det seg ikke å starte kraftverket på det høyere trinnet, samtidig som kraftverket på det lavere trinnet ikke kan yte mer, og vannkraften kan ”skumme” markedet.



Vannkraftprodusenten vil dermed tilby sin overskuddskraft når prisen er høy og knipe igjen når prisen er lav. I Norge er denne sammenhengen ikke like åpenbar, men eksisterende grunnet import fra øvrige nordiske land med termisk kraftproduksjon. Her er det hovedsakelig den lite elastiske etterspørselskurven ved lav pris og variasjon i tilbudet som bidrar mest.

Tilsiget i Norden kan årlig variere med 20 TWh over og under normalen [Nordpool 2001]. På grunn av høy vannkraftandel (99,5%) i Norge bidrar dette til at tilbudt elmengde i et tørrår ikke dekker etterspørselen uten import. I Norge er problemet at størst tilsig kommer sent på våren og sommeren når etterspørselen er på sitt laveste, mens når etterspørselen er størst på vinteren når er tilsiget lite. Vannkraftprodusenter med dårlig reguleringsgrad¹ har ikke noe valg om våren, og må la vannet passere stasjonen for å unngå flom. Marginalkostnaden for produksjon er meget lav og vannverdien lik null for fullt magasin. En vannkraftprodusent vil alltid tjene penger på produksjon fordi alternativet er å la vannet gå tapt. Om våren vil kraftproduksjonen være høy og markedet oversvømmes av billig elkraft. Alle disse forholdene bidrar til de store prissvingningene vi man observere i spotprisen.

2.10.2. Mulige fremtidige påvirkninger

Ved innføringen av en CO₂-avgift vil denne ”*mellom to trinn*” effekten bli forsterket, og det skyldes at marginalkostnaden for kraftverk med fossilt brensel vil øke. Gapet mellom marginalkostnaden for grunnlastkraftverk og andre fossilt fyrte kraftverk vil da bli større. Tilbudskurven kan blir brattere i det ”vanlige” området, det betyr at etterspørselen må øke betydelig for å starte opp kraftverkene på neste marginalkostnadsnivå. Vannkraftprodusentene kan forvente seg et bredere prisbelte å operere innenfor, men også større varians. Dessuten inntreffer dette i det området etterspørselskurven er mest inelastisk.

Følgene er at driftsplanleggere i fremtiden trolig må forholde seg til en større variasjon i pris, og samtidig en større usikkerhet.

¹ Reguleringsgrad er midlere magasintilsig i forhold til magasinkapasiteten



2.10.3. Innvirkning fra likviditeten i markedet

Hvor likvid et marked er, henger ofte nøye sammen med omsetningsvolumet. Mange energimarkeder er ennå ikke så modne som finansmarkedene. For år 2000 hadde Oslo Børs en omsetning på 609,1 mrd. NOK, København Børs 836 mrd DKK Stockholmsbørsen 4455,9 mrd SEK, mens Nordpool omsatte elkraft for 11,1 mrd NOK og 43,3 mrd NOK finansielle produkter. [Tall fra børsenes hjemmesider] Vi ser at omsetningsvolumet for Nordpool er betydelig lavere enn de rene finansielle markedene.

Antallet aktører i aksjemarkedet er stort og variert, og det omsettes derfor både store og små aksjeposter. I kraftmarkedet er antall aktører få og volumet på hver handel større. Følgene av dette er at det er få handler i forhold til omsatt volum sammenliknet med aksjemarkedet. Betydningen av hver handel og virkningen på standardavviket er derfor større fordi prisendring ved en handel er større.

Dessuten har aktørene i elkraftmarkedet ikke kunnet bygge opp samme grad av kompetanse, slik at det er lenger mellom spesialistene [Pilipovic 1998]. Manglende kompetanse fører til at informasjon som tilflyter markedet tolkes og brukes forskjellig av aktørene. Dette fører til lettere til at det oppstår feilprisinger og arbitrasjemuligheter.

2.10.4. Leveringssted og -tid

Elektrisitetmarkedet er påvirket av overføringsnettet. Flaskehalsar og andre begrensninger gjør at en ekstra kWh et sted ikke nødvendigvis påvirker prisen i en annen del av landet. Prisen blir altså bundet til leveringssted og -tidspunkt. For det nordiske markedet har Nordpool innført prisregioner med bakgrunn i disse begrensningene. Dette fører også til skjevheter som aldri ville kunne oppstå i et finansmarked der for eksempel én euro har samme verdi overalt. Manglende overføringskapasitet kan i praksis gi monopolsituasjon om den er betydelig, men i det nordiske kraftmarkedet er ikke dette tilfellet.



2.11. Maksimering av markedsverdien til en produsenten

En viktig inngangsverdi for riktige driftsbeslutninger er kraftprisen. Derfor er det essensielt å ha gode modeller for kraftpriser. En type er de ingeniørdrevne, tekniske modellene med detaljerte undermodeller for blant annet tilsigs-, overførings-, temperatur- og produksjonsforhold. Et eksempel er Samkjøringsmodellen fra Sintef Energiforskning. En annen type baserer seg på opsjonsteori og markedets prising. Her bruker man gjerne arbitrasjeargumenter med bakgrunn i tilbud og etterspørsel, etter spekulasjon, samt spekulanter fra begge sider, for å bestemme prisene. Nå kan man for alvor begynne å sette verdi på produksjonen, og omsider har man muligheter for å maksimere verdien til produsenten.

2.11.1. *Bruk av forward for å maksimere markedsverdi*

For å vise at forwardprisen er riktig å bruke for å maksimere markedsverdien til et firma og ikke anvende forventet spotpris, kan man argumentere med arbitrasje. Antar at forwardprisen er 100 og forventet spotpris 110. Aktører som tar utgangspunkt i forventet spotpris for den fremtidige leveringen, ville nettopp være villig til å betale inntil 110. For å kunne utnytte arbitrasjemulighetene kunne man da kjøpe en forwardkontrakt til 100, samtidig som man inngår en avtale om levering til en pris mellom 100 og 110 med en av disse aktørene. På leveringstidspunktet innkasserer man differansen uten risiko. Firmaet som forutsetter at verdien av et eller annet produkt er gitt av forventet spotpris, taper da penger, og markedsverdien til firmaet blir ikke maksimert. I kapittel 7 beskrives hvordan dette påvirker markedsverdien til en vannkraftprodusent.

3. Driftsplanleggingsproblemet

3.1. Innledning/generelt

For en kraftprodusent innebærer driftsplanlegging at de forventede netto driftsinntekter maksimeres, under forutsetning av restriksjonene overholdes. Videre er det vanlig å la følgende elementer inngå i planleggingsoppgaven:

- identifisere tilbud og etterspørsel, dvs. hva blir prisen,
- fordele produksjonen av (aktiv) kraft mellom de forskjellige enhetene,



- fordele reaktiv produksjon,
- planlegge revisjoner og vedlikehold,
- minimere konsekvenser av avbrudd og feil.

Selv om alle punktene er viktige, vil vi kun ta for oss de to første i denne oppgaven. Dersom produsenten kun har termisk kraftproduksjon er driftsplanleggingen enkel. Grunnen er at produsenten kjenner marginalkostnaden for produksjon som en funksjon av brenselprisen. Prisen er en eksogent gitt variabel og dermed er alternativkostnaden for produksjon kjent.

Verdien av lagret brensel vil alltid være lik spotprisen, og produksjonsbeslutningen er basert på denne prisen. En slik produsent vil ikke være tjent med å bygge opp brenselager for å spekulere i at prisen går opp. Akkurat det samme kan han oppnå ved å bruke forwardkontrakter som er definert til å gi samme gevinst som lagerhold. For denne type produsenter har ikke muligheten å vente noen verdi, og problemet reduseres til et problem med usikkerhet kun i pris. Beslutningen blir hvorvidt man skal produsere, gitt spotprisen. Valg tatt i dag innvirker ikke på fremtidige beslutninger.

3.2. Hva øker kompleksiteten

For en kraftprodusent som har både termisk produksjon og vannkraft, eller bare vannkraft, blir ikke løsningen like triviell. Årsaken er at alternativkostnaden for vannet ikke er gitt eksogent slik som brenselprisen for et termisk kraftverk. Videre vil tappebeslutninger i dag påvirke muligheten til produksjon i fremtiden fordi tilsiget er usikkert. Å vente med produksjonen kan betraktes som en realopsjon for produsenten. Denne forskjellen gjør at produsenter som har vannkraftverk i sin portefølje har et mer komplekst driftsplanleggingsproblem.

Å innføre en venteopsjon gjør at vannkraftprodusentens planleggingshorisont nødvendigvis må bli lengre enn for den termiske produsenten. Grunnen er at en noen magasiner har et maksimalt magasinivolum større enn midlere tilsig for ett år, også kalt



flerårsmagasiner. Som kjent fra realopsjonsteorien blir verdien av en venteopsjon større jo lenger tidshorizonten og usikkerheten er, og dermed bør bruke lange tidshorisonter for å maksimere verdien av å vente.

Ved å utvide tidshorizonten må vi ta hensyn til:

- prisen er meget usikker og for å kunne planlegge driften må det foreligge en eller annen prisprognose for planleggingstidsrommet. Årsaken til den store prisusikkerheten er forklart i kapittel 2.10,
- alternativkostnaden for vannet (vannverdi) i ethvert tidspunkt i planleggingsperioden må bestemmes for å verdisette venteopsjonen,
- siden tilsiget ikke er kjent, må vi etablere en tilsigsmodell.

De tre punktene ovenfor er knyttet til usikkerheten som gir opsjonsverdien. I tillegg kommer en rekke andre fysiske og reguleringsmessige restriksjoner som påvirker optimeringen i vannkraftprodusentens planleggingsproblem.

De viktigste av disse restriksjonene er:

- minimal og maksimal vannføring,
- minimal og maksimal vannstand i magasinet,
- sannsynligheten for flom og tørrkjøring skal minimeres,
- variabel vannhøyde i magasinene medfører at effektproduksjon som funksjon av tappet volum ikke er konvekt. Dette problemet gjelder særlig hvor høydeforskjellen mellom magasin og turbin er liten. Ved et magasin som ligger høyt over turbinene eksempelvis 800 meter, vil en endring på 20 meter i magasinshøyden utgjøre lite av den totale fallhøyden,
- kaskadeeffekt, det vil si at vannet som tappes i et kraftverk renner ned i magasinet til et annet kraftverk, og som i sin tur renner ned i et nytt magasin og så videre.

Alle punktene unntatt variabel vannhøyde, vil inngå som restriksjoner i en optimering. Enkelte av restriksjonene vil i noen optimeringsalgoritmer lede til ikke-lineære



restriksjoner og må da utelukkes. Problemet med variabel vannhøyde kan løses med approksimasjon der man lager en representativ middelhøyde i magasinet, eller ved at målfunksjon lages stykkevis lineær.

Sammenlignet med en termisk kraftprodusent må en vannkraftprodusent i tillegg ta hensyn til alle disse ovennevnte punktene, unntatt usikkerhet i pris (som selvfølgelig inngår for enhver produsent). Usikkert tilsig bidrar til at driftplanleggingsproblemet får usikkerhet i to dimensjoner, nemlig pris og tilsig. Dette, kombinert med den lange tidshorizonten, bidrar mest til kompleksiteten i problemet. Mangelen på alternativkostnad for vannet bidrar også. Hvordan noen av disse problemene kan løses forklares i kapittel 4.

3.3. Formulering av optimeringsproblemet

3.3.1. *Bruk av kostnadsfunksjon for å maksimere profitt*

Vannkraftprodusentens planleggingsproblem formuleres slik at de krav som er gitt av tekniske og reguleringsmessige ivaretas. En vanlig formulering av problemet er at kostnadene minimeres med hensyn på beslutningsvariablene, hvilket er ekvivalent med å maksimere profitten. Dette forutsetter at egen produksjon ikke påvirker prisen og at produsert kvantum alltid kan selges. Nedenfor er denne sammenhengen vist matematisk for et generelt problem:

$$\text{Max}_{u_t} \sum_{t=1}^T [p_t \cdot u_t - c_t \cdot u_t] \text{ Maksimeringsfunksjonen for profitt.}$$

$$t = 1, \dots, T$$

$$\delta_t = p_t \cdot u_t - c_t \cdot u_t$$

$$P(p = p_t | u_t) = P(p = p_t) \Rightarrow \delta_t = f(c_t, u_t) \quad \forall t$$

Dette fordi produksjonsvolum u_t kun påvirker kostnadene og dermed er størrelsen på δ_t gitt av c_t og u_t .

$$\text{Max}_{u_t} \sum_{t=1}^T \delta_t = \text{Max}_{u_t} \sum_{t=1}^T [p_t \cdot u_t - c_t \cdot u_t] \Leftrightarrow \text{Min}_{u_t} \sum_{t=1}^T f(c_t, u_t)$$

p_t : Eksogent gitt pris

u_t : Produksjonsmengde

c_t : Matrise for kostnader.



3.3.2. Matematisk formulering av driftsplanleggingsproblemet

Nedenfor er minimeringsproblemet til en vannkraftprodusent formulert.

$$\text{Min} \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \left[\overbrace{c_t(u_t(i))}^{\text{ICF}} + \overbrace{\alpha_{t+1}(v_{t+1}^l(i), \xi_t^l(i))}^{\text{FCF}} \right]$$

$$\begin{aligned} v_{t+1}^l(i) &= v_t(i) - u_t(i) - s_t(i) + \xi_t^l(i) & \forall i, l, t &: \text{Vannbalanse kraftverk/magasin } i \\ v_t(i) &\leq \bar{v}(i) & \forall i, t &: \text{Maksimalt innhold i magasin } i \\ u_t(i) &\leq \bar{u}(i) & \forall i, t &: \text{Maksimal produksjon i kraftverk } i \\ u_t(i) + s_t(i) &\leq \bar{V}(i) & \forall i, t &: \text{Maksimal vannføring etter kraftverk } i \\ u_t(i) + s_t(i) &\geq \underline{V}(i) & \forall i, t &: \text{Minimal vannføring etter kraftverk } i \end{aligned}$$

Hvor :

- $i = 1, \dots, I$ Indeks for vannkraftverk ($I =$ antallet kraftverk/magasin).
- $l = 1, \dots, L$ Indeks for tilsigsscenarier.
- $t = 1, \dots, T$ Tidsindeks
- $v_{t+1}^l(i)$ Lagret volum i kraftverk i ved slutten av tidsrom t (beslutningsvariabel).
- $v_t(i)$ Lagret volum i kraftverk i ved begynnelsen av tidsrom t (kjent).
- $\xi_t^l(i)$ Tilsig til kraftverk i i tidsrom t i scenario l (stokastisk).
- $u_t(i)$ Vann brukt til produksjon i kraftverk i i tidsrom t (beslutningsvariabel).
- $s_t(i)$ Overløp i kraftverk i i tidsrom t (beslutningsvariabel).
- $\bar{u}(i)$ Maksimal produksjon i kraftverk i .
- $\bar{v}(i)$ Maksimalt tillatt magasinifylling for magasin i .
- $\bar{V}(i)$ Maksimal vannføring etter kraftverk i .
- $\underline{V}(i)$ Minimal vannføring etter kraftverk i .
- $ICF =$ Funksjon for umiddelbare kostnader.
- $FCF =$ Funksjon for framtidige kostnader.

I tillegg til disse restriksjonene kan det være krav om en nedre grense på magasinifyllingen, og denne kan skrives slik.

$$u_t(i) = 0 \text{ hvis } v_{t+1}^l(i) \leq \underline{v}(i) \Rightarrow u_t(i)[v_{t+1}^l(i) - \underline{v}(i)] \geq 0$$

$\underline{v}(i)$ Minimalt tillatte magasinifylling for magasin i

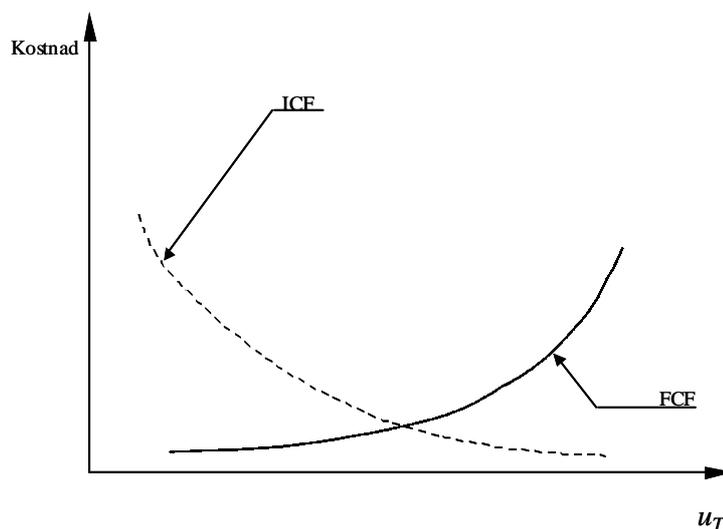


Sammenhengen er ikke lineær fordi $u_t(i)$ og $v_{t+1}(i)$ er beslutningsvariable og må dermed utelates for å beholde problemet lineært.

3.3.3. Hva inngår i ICF og FCF

Kostnader knyttet til ICF for en ren vannkraftprodusent, er kjøp av kraft fra spotmarkedet som igjen avhenger hvordan egen produksjon av vannkraft styres i tidssteg t . ICF er dermed en funksjon som er avtakende i u_t fordi økt egenproduksjon gir lavere kostnader i tidssteg t . I de tilfeller hvor produsenten også har termiske kraftverk vil produksjonskostnadene i tidssteg t inngå i ICF.

Funksjonen FCF representerer alle kostnader som påløper etter tidssteg t , det vil si fra og med $t+1$ til og med T som er slutten på planleggingshorisonten. FCF vil være økende i u_t fordi det å bruke mye vann i dag fører til at vi har mindre vann i magasinet i morgen, hvilket innebærer at v_{t+1} (magasinfyllingsgraden) minker. Dersom produsenten har termisk kraftproduksjon i dette tidsrommet, vil kostnaden for den inngå her. Sammenhengen mellom ICF og FCF ved forskjellige nivåer av produksjonsvolum u_t er vist i figuren.



Figur 3.3.3-1 Forhold mellom ICF og FCF



3.4. Fastkraftforpliktelsens virkning på driftsplanleggingen

Stort sett har alle produsenter avtale om å levere en fast mengde kraft til gitt pris i planleggingstidsrommet. En rasjonell produsent vil alltid minimere sine kostnader forbundet med en slik kontrakt. Av dette følger at produsenten kjøper kraft i spotmarkedet for å tilfredstille fastkraftkontrakter når vannverdien er høyere enn spotprisen, og produserer selv dersom vannverdien er lavere enn spotpris. Forutsetningen er at han alltid kan kjøpe nok kraft i spotmarkedet for å tilfredsstille sine fastkraftforpliktelser. Under denne antakelsen kan denne enkle matematiske formuleringen av minimeringsproblemet settes opp:

c_t : Enhetskostnader for overføring og kjøp av strøm i spotmarkedet i tidspunkt t .

ρ : Konverteringsfaktor fra tappevolum til energi i kraftverket.

u_t : Tappet volum fra kraftverket i tidsrom t for å tilfredstille fastkraftkontrakter.

D_t : Fastkraftsforpliktelse for tidsrom t .

π_t : Vannverdi i pr volumenhet i kraftverket i tidsrom t .

e_t : Mengde energi kjøpt i spotmarkedet i tidsrom t .

$$\text{Min}_{u_t; e_t} \sum_{t \in T} ICF_t = \text{Min}_{u_t; e_t} \sum_{t \in T} c_t e_t \quad (1)$$

s.t.

$$\rho \cdot u_t + e_t \geq D_t \Rightarrow \left. \begin{cases} \pi_t \geq c_t \Rightarrow e_t = D_t & \text{(Kjøper kraft i spotmarkedet)} \\ \pi_t \leq c_t \Rightarrow \rho \cdot u_t = D_t & \text{(Produserer kraft selv)} \\ \pi_t = c_t \Rightarrow \rho \cdot u_t + e_t = D_t & \text{(Kan kjøpe kraft i spot eller produsere selv)} \end{cases} \right\} \Rightarrow \quad (2)$$

Merk at totalt tappet volum alltid kan deles slik: $u_t^{\text{total}} = u_t^{\text{salg}} + u_t^{\text{kontrakt}}$

Når $u_t = u_t^{\text{kontrakt}}$ vil restriksjon (2) alltid binde. Årsaken er at u_t velges lik null når vannverdien er høyere en spotpris. Med vannverdi lavere spotpris velges e_t lik null.

Når vannverdi er lik spotpris kan all kraft kjøpes i spot eller produseres selv. I alle tilfellene blir $\rho \cdot u_t + e_t = D_t$, og dermed kan det substitueres for e_t i likning (1).

$$(2) \Rightarrow \sum_{j \in J} \rho \cdot u_{j,t} + e_t = D_t \Rightarrow e_t = D_t - \sum_{i \in T} \rho \cdot u_i \quad (3)$$

Setter inn fra uttrykket for e_t fra (3) i målfunksjon.

$$\text{Min}_{u_t; e_t} \sum_{t \in T} c_t \cdot (D_t - \sum_{i \in T} \rho \cdot u_i) \Leftrightarrow \text{Min}_{u_t; e_t} \sum_{t \in T} -c_t \cdot \rho \cdot u_i \quad \text{fordi } (c_t \cdot D_t) = \text{konstant}$$

Inndelingen av total produksjon har ingen betydning, fordi verdien av u_t^{salg} vil alltid være lik null når u_t^{kontrakt} er null, og når $u_t^{\text{kontrakt}} > 0$ vil u_t^{salg} være større eller lik null.



Oppdelingen gir derfor ikke noen restriksjon på u_i^{total} og løsningen av problemet påvirkes ikke. Vi ser da at fastkraftforpliktelsene blir et konstantledd i minimeringsfunksjonen, og påvirker således ikke løsningen av driftsplanleggingsproblemet. Merk at IFC_t , som er den umiddelbare kostnadsfunksjonen, kun er definert for leddet som dekker kjøp av kraft. I reelle problemer vil også andre utgifter inngå, uten at det har betydning for gyldigheten av konklusjonen her.

4. Algoritmer for løsning av driftsplanleggingsproblemet

4.1. Innledning

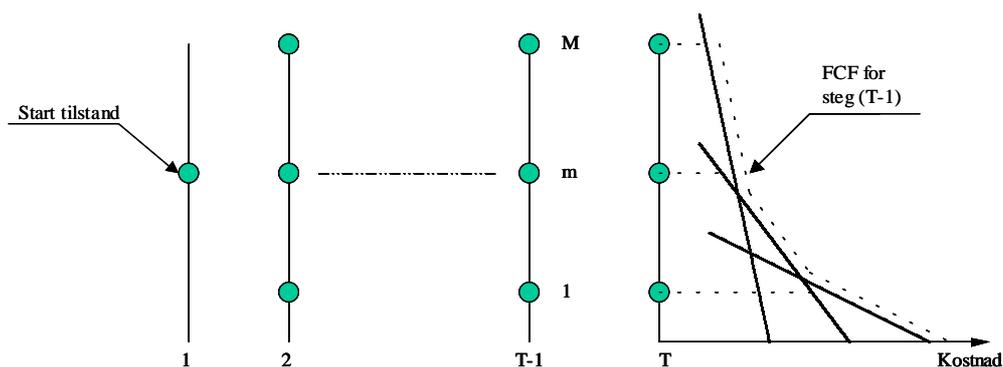
Driftsplanleggingsproblemet for en vannkraftprodusent er svært krevende å løse blant annet fordi antallet beregninger er meget stort. Vanlig metodikk har vært bruk av stokastisk dynamisk programmering (SDP). Begrensningene i denne metoden fører til at alle magasin innenfor ett område måtte modelleres aggregert i ett magasin. Dette gav en dårlig approksimert løsning og førte til utviklingen av nye metoder.

En ny metode som stadig blir mer utbredt, er stokastisk dual dynamisk programmering (SDDP) [Pereira 1989], og denne vil bli beskrevet nedenfor. Andre nyere, og dermed mindre kjente metoder, men som ikke blir beskrevet, er Abridged Nested Decomposition (AND) og Reduced Sampling Method (ReSa). ReSa er en kombinasjon av SDDP og AND. For mer informasjon om de to sist nevnte metoder se Hindsberger og Philpott [2001].

For å løse en produsents planleggingsproblem må sannsynlighetsfordelingen for pris og tilsig i planleggingstidsrommet være kjent. Det finnes flere modeller som kan beskrive pris og tilsig, noen av dem er vurdert i kapittel 2.9, 5 og 6. I beskrivelsen av SDDP-algoritmen [Pereira 1989] forutsettes kun usikkerhet i tilsig. Årsaken til dette er at beskrivelsen av algoritmen med både usikkerhet i pris og tilsig samt seriekorrelasjon er meget komplisert, og å sette seg inn i denne algoritmen faller utenfor oppgavens tidsramme.

4.2. Nødvendige betingelser for SDDP

En nødvendig betingelse for å bruke SDDP er at funksjonen for framtidige kostnader (FCF) kan bli representert som en stykkevis lineær funksjon. En måte å gjøre dette på i vannkraftprodusentens planleggingsproblem er å dele magasinutfyllingsgraden i M tilstander. Hvordan dette gjøres, er illustrert i figuren under.



Figur 3.3.3-1 Magasininndeling og FCF

Inndelingen av magasinvolumet gjøres slik at for $m=1, \dots, M$ tilsvarende fyllingsgrader fra 0 % når $m=1$ til 100% som tilsvarende $m=M$. I figuren er $M=3$ og FCF består derfor av en stykkevis lineær funksjon med elementer fra tre lineære funksjoner i dette tilfellet.

4.3. Formulering av subproblem i SDDP-algoritmen

Med denne representasjonen av magasinene kan vi definere ett-stepsproblemet for kraftprodusenten med usikkert tilsig der tilsiget i tidssteg t er korrelert med tilsiget i periode $t-1$. Problemet kan løses for en produsent med n magasiner, men er her kun definert for ett magasin for å illustrere prinsippet. Metodikken som brukes til å løse problemet er ordinære LP-algoritmer som for eksempel Simplex.



Sett $FCF = \alpha_{T+1}^l(v_{T+1}^l, \xi_T^l) = 0 \quad \forall l$

for $t = T, T-1, \dots, 1$

for hvert magasinivolum $v_t = v_t^1, \dots, v_t^l, \dots, v_t^M$

for hvert tidligere tilsigsscenario $\xi_{t-1} = \xi_{t-1}^1, \dots, \xi_{t-1}^k, \dots, \xi_{t-1}^K$

og for hvert tilsig i tidsrom t betinget på tidligere tilsig ξ_{t-1}^k

$\{\xi_t = \xi_t^1, \dots, \xi_t^l, \dots, \xi_t^L\}$ med sannsynlighet for overgang fra

$k \rightarrow l$ lik p_{kl} hvor $L = K$.

Løs ett-stepsproblemet for med startverdier gitt for v_t^m og ξ_t^l slik at kostnadene for umiddelbare kostnader (ICF) og framtidige kostnader minimeres (FCF).

$$\alpha_t^l(v_t^m, \xi_{t-1}^k) = \text{Min} \underbrace{c_t(u_t)}_{ICF} + \underbrace{\alpha_{t+1}^l(v_{t+1}^l, \xi_t^l)}_{FCF}$$

s.t.

$$v_{t+1}^l = v_t^m - u_t - s_t + \xi_t^l \quad | \pi_{ht}^l \quad \forall m, l, t$$

$$v_{t+1}^l \leq \bar{v} \quad \forall t$$

$$u_t \leq \bar{u} \quad \forall t$$

Beregn så:

$$\alpha_t(v_t^m, \xi_{t-1}^k) = \sum_{l=1}^L p_{kl} \cdot \alpha_t^l(v_t^m, \xi_{t-1}^k) \text{ Optimal verdi av subproblemet.}$$

4.3.1. Løsningen av ett-stepsproblemet

Ett-stepsproblemet til kraftprodusenten løses som et subproblem i SDDP. Årsaken er at vi ønsker finne dualverdien til vannbalansen som er π_{ht}^l , og den optimale verdien av subproblemet $\alpha_t(v_t^m, \xi_{t-1}^k)$. Dualverdien kalles ofte vannverdi og kan tolkes som marginalkostnaden for vannet i tidssteg t .

Verdiene finnes ved å løse ett-stepsproblemet under følgende betingelser:

- start i tidssteg T ,
- anta at magasinfyllingen i tidssteg T er lik initial fyllingsgrad, det vil si lik den i tidssteg $t=1$. Her kan det også gjøres andre antagelser, som at magasinet skal ha en eller annen valgt fyllingsgrad.
- fordi vi er i tidssteg T antar vi at $\alpha_{T+1}^l(v_{T+1}^l, \xi_T^l) = FCF_{T+1} = 0$, uten denne antakelsen kan vi ikke løse problemet. Verdien kan også settes forskjellig fra



null, og Sintef for eksempel bruker FCF-verdier funnet i 10 års analyser som FCF_{T+t} -verdier i 3 års analyser.

Problemet løses for alle tidspunkt i planleggingsperioden med en ordinær LP-algoritme. Fra løsningen av subproblemet brukes verdien av $\alpha_i(v_i^m, \xi_{i-1}^k)$ i det rekursive skjemaet som er en del av SDDP-algoritmen. Dualverdien til vannbalansen π_{hh}^i brukes til å lage kuttene i den lineære approksimasjonen av den framtidige kostnadsfunksjonen (FCF) i det samme skjemaet. Hvordan dette gjøres er vist i neste avsnitt.

4.4. Løsningen av planleggingsproblemet med SDDP

4.4.1. Rekursivt skjema

Problemet løses med at algoritmen gjennomløpes fra $t=1$ med en kunstig målfunksjon. Når algoritmen kommer til $t=T$, vil et rekursivt skjema bli startet, hvor subproblemet som er nevnt tidligere løses for hvert tidsskritt.

4.4.2. Algoritme

Sett $N = M$ og definer $\{\varphi_{T+1}^n, \gamma_{T+1}^n, \delta_{T+1}^n\} = 0 \forall n$

for $t = T, T-1, \dots, 1$

og for $v_i = v_i^1, \dots, v_i^m, \dots, v_i^M$

og for $\xi_i = \xi_i^1, \dots, \xi_i^k, \dots, \xi_i^k$

Løs planleggingsproblemet for $[v_i^m, \xi_i^k]$

$$\alpha_i^k(v_i^m) = \text{Min } c_i(u_i) + \alpha_{i+1}^k$$

s.t.

$$v_{i+1}^k = v_i^m - u_i - s_i + \xi_i^k$$

$$v_{i+1}^k \leq \bar{v}$$

$$u_i \leq \bar{u}$$



$$\alpha_{i+1} \geq \varphi_{i+1}^n \cdot v_{i+1} + \gamma_{i+1}^n \cdot \xi_i^k + \delta_{i+1}^n \quad \text{for } n = 1, \dots, N \text{ Kuttlikninger}$$

videre

Beregn koeffisientene og konstantleddets m' te lineære segment av funksjonen for framtidig kostnad i forrige steg (dvs start i T+1).

$$\varphi_i^n = \sum_{l=1}^L p_{kl} \cdot \frac{\partial \alpha_i^l}{\partial v_i} = \sum_{l=1}^L p_{kl} \cdot \pi_{ll}^l$$

$$\gamma_i^n = \sum_{l=1}^L p_{kl} \cdot \frac{\partial \alpha_i^l}{\partial \xi_i^l} \cdot \frac{\partial \xi_i^l}{\partial \xi_{i-1}^k} = \sum_{l=1}^L p_{kl} \cdot \pi_{ll}^l \cdot \left[\frac{\sigma_i \cdot \phi_1}{\sigma_{i-1}} \right]$$

$$\delta_i^n = \sum_{l=1}^L p_{kl} \cdot [\alpha_i^l(v_i^m) - \gamma_i^n \cdot \xi_i^l] - \varphi_i^n \cdot v_i^m$$

videre

videre

Håndtering av seriekorrelasjon

Innvirkningen av seriekorrelasjonen i tilsiget er at leddet γ tilkommer kuttlikningen.

Denne regnes ut på samme måte som φ bortsett fra at den multipliseres opp med en faktor. Verdien av denne faktoren er finnes ved å derivere ξ_i med hensyn på ξ_{i-1} . Hvordan verdien av faktoren finnes basert på tilsigsmodellen er vist nedenfor og gjelder for den tilsigsmodellen som er vurdert i kapitel 5:

Tilsigsmodell

$$z_i = \phi_1 \cdot z_{i-1} + \varepsilon_i \quad \text{Med normaliserte variable}$$

⇕

$$\frac{\xi_i^l - u_i}{\sigma_i} = \phi_1 \cdot \frac{\xi_{i-1}^k - u_{i-1}}{\sigma_{i-1}} + \varepsilon_i \quad (\text{hvor det samples fra fordeling til } \varepsilon_i)$$

⇓

$$\xi_i^l(\xi_{i-1}^k) = \sigma_i \cdot \phi_1 \cdot \frac{\xi_{i-1}^k - u_{i-1}}{\sigma_{i-1}} + \sigma_i \cdot \varepsilon + u_i \Rightarrow \frac{\partial \xi_i^l}{\partial \xi_{i-1}^k} = \frac{\sigma_i \cdot \phi_1}{\sigma_{i-1}}$$

⇓

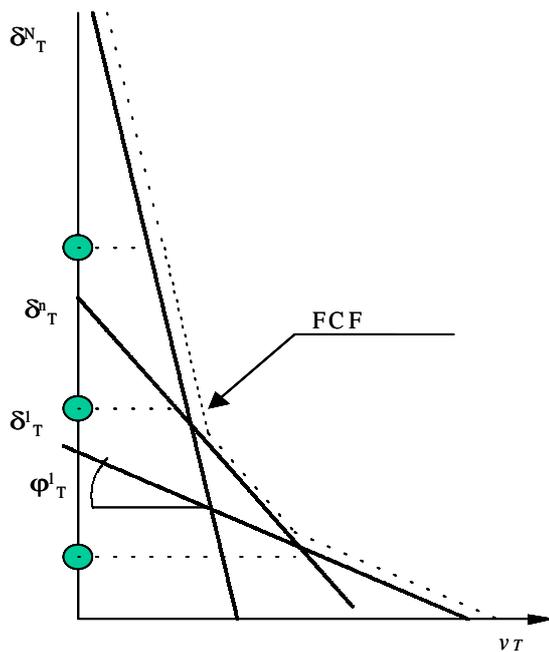
$$\frac{\partial \alpha_i^l}{\partial \xi_i^l} \cdot \frac{\partial \xi_i^l}{\partial \xi_{i-1}^k} = \frac{\partial \alpha_i^l}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial \xi_i^l}{\partial \xi_{i-1}^k} = \pi_{ll}^l \cdot \left[\frac{\sigma_i \cdot \phi_1}{\sigma_{i-1}} \right]$$

$$\frac{\partial \alpha_i^l}{\partial \xi_i^l} = \frac{\partial \alpha_i^l}{\partial v_i} \quad \text{fordi de kommer fra samme restriksjon i subproblemet}$$

og dermed må ha samme dualverdi.

4.5. Beregning av nedre grense

Om vi holder oss i planet og antar at vi ikke har seriekorrelasjon i tilsiget kan vi av denne figuren se en nedre grense for kostnadene. Grunnen er at kostnadsfunksjonens lineære elementer (stiplet linje) alltid er basert på den maksimale verdien i alle mulige tidstander.



Figur 4.4.2-1 Nedre grense

4.6. Beregning av øvre grense

For å finne øvre grense brukes Monte-Carlosimulering. Grunnen er at eneste $FCF = \alpha_{t+i}$ som resulterer i en optimal løsning, er den optimale funksjonen selv. Dette innebærer at koeffisientene som beskriver den lineære approksimasjonen av FCF i det rekursive skjemaet også må gi en optimal løsning i simuleringen. Verdiene som brukes i tilsigsscenariene, kan være de samme som brukes i det rekursive skjemaet. Men det som i brukes i praksis, er historiske tilsigsserier, som pr definisjon må komme fra den korrekte fordelingen. Tilsigsserien som i dag er tilgjengelig er fra 1930-2001. Ved simuleringen "klippes" noen serier ut av tilsiget, for eksempel fra 1940-1945 eller 1952-1957 dersom planleggingsperioden er fem år. Antallet mulige kombinasjoner er derfor begrenset med denne framgangsmåten, og det ideelle vil være en rekke



syntetisk genererte serier slik at Monte-Carlosimuleringen ble best mulig [Gjelsvik 2001].

4.6.1. Foroversimulering

Definerer et sett av tilsigsscenarier $\xi_t = \{\xi_t^1, \dots, \xi_t^m, \dots, \xi_t^M\}$ for alle steg $t = 1, \dots, T$

for hvert tilsigsscenario $\xi_t = \xi_t^1, \dots, \xi_t^m, \dots, \xi_t^M$

ved start bruk magasinivolum i steg 1 lik : $v_t^m = v_1$ (dvs start fra samme magasinnivå) for $t = 1, \dots, T$

Løs planleggingsproblemet for $[v_t^m, \xi_t^m]$

$$\text{Min } c_t(u_t^m) + \alpha_{t+1}$$

s.t.

$$v_{t+1}^m = v_t^m - u_t^m - s_t + \xi_t^m$$

$$v_{t+1}^m \leq \bar{v}$$

$$u_t^m \leq \bar{u}$$

$$\alpha_{t+1} \geq \varphi_{t+1}^n \cdot v_{t+1}^m + \gamma_{t+1}^n \cdot \xi_t^m + \delta_{t+1}^n \quad \text{for } n = 1, \dots, N$$

videre

Regn så ut summen av all umiddelbare kostnader for hvert scenario.

Disse må pr definisjon også må være summen av alle kostnader i perioden, fordi fremtidige kostnader må på et tidspunkt inngå i disse.

$$z^m = \sum_{t=1}^T c_t(u_t^m)$$

videre

4.7. Konvergens

Forventete driftskostnader kan regnes ut som middelveiden av totale kostnader over alle simulerte scenarier.



$$\hat{z} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M z^m$$

Fordi det er brukt en Monte-Carlosimulering er det en usikkerhet forbundet med den "sanne" verdien av \bar{z} . Et 95% konfidensintervall er da gitt slik:

$$\bar{z} \in [\hat{z} - 1.96 \cdot \hat{\sigma}, \hat{z} + 1.96 \cdot \hat{\sigma}]$$

Hvor estimatet av $\hat{\sigma}$ finnes slik:

$$\hat{\sigma} = \left[\frac{1}{M-1} \cdot \sum_{m=1}^M (z^m - \bar{z})^2 \right]^{1/2}$$

Når nedre grense ligger innenfor konfidensintervallet regner man algoritmen som konvertert. Kommer ikke verdien denne innenfor konfidensintervallet, må magasininnstillingen gjøres finere, å øke M . Naturlige kandidater til nye volum er da $\{v_i^m, m = 1, \dots, M\}$ funnet i Monte-Carlosimuleringen.

5. Tilsigsmodellen

5.1. Bakgrunn

Denne tilsigsmodellen er en undermodell i flere programmer som brukes til driftsplanlegging laget av Sintef Energiforskning. Tilsigsmodellen inngår blant annet i Samkjøringsmodellen og Vansimtap.

Tilgangen på simulerte tilsigserier er nødvendig for å kunne løse driftsplanleggingsproblemet til en vannkraftprodusent på en tilfredsstillende måte. Formålet med modellen er å generere tilsigsutfall med kjent sannsynlighet for utfallet. Tilsigsutfallene og sannsynligheten for utfallene brukes sammen med en rekke andre parametre i optimeringsalgoritmer for å løse driftsplanleggingsproblemet for vannkraftprodusentene.

Uansett valg av optimeringsalgoritme vil vannverdien være sentralt i optimeringen. Vannverdier kan betraktes som marginalverdi av magasinvannet ved et gitt tidspunkt og er således alternativkostnaden for tappet vann. Verdien kan også betraktes som en



”brenselpris” for bruk av vannet. I et gasskraftverk er brenselprisen gitt eksogent og vanligvis uavhengig av forbruket. For et vannkraftverk er vannverdiene i et gitt tidsrom avhengig av tilsiget og tappebeslutninger. Vannverdiens avhengighet av kraftproduksjonen i blir beskrevet som ”å bite seg i halen mekanismen” [Haugstad, Botten & Johannesen 1992]. Fordi tilsiget er usikkert brukes derfor tilsigssimulering for å løse vannkraftprodusentens planleggingsproblem. Hvor bra tilsigsmodellen simulerer, er derfor vesentlig, særlig når vi vet at tidshorizonten for middels lang planlegging er 3-5 år og for langtidsplanlegging opptil 10 år.

Vannverdien kan finnes ved bruke av flere forskjellige metoder. Den nyeste metoden er SDDP (stokastisk dual dynamisk programmering) og hvordan vannverdier finnes og brukes i SDDP-metoden, er forklart i kapittel 4.

5.2. Modellforutsetninger

Hvilke betraktninger, krav og forutsetninger som ligger til grunn for en modell, bestemmer også modellens gyldighet og anvendelsesområde. For denne tilsigsmodellen vet vi at en rekke av kravene som stilles til statistiske modeller ikke er fullstendig oppfylt. [Gjeldsvik 1993 s. 4]

Denne modellen er en lineær multivariabel autoregressiv modell (VAR) som tilpasses observerte data.

Modellbeskrivelse

$$\mathbf{z}_t = \phi_1 \cdot \mathbf{z}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

\mathbf{z}_t : Simulert tilsig.

ϕ_1 : Korrelasjonmatrise, beskriver korrelasjon mellom tilsig i uke (t-1) og t.

$\boldsymbol{\varepsilon}_t$: Støyledd $\sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

$\boldsymbol{\Sigma}$: Kovarians for støyleddet.

Ved simulering av tilsiget \mathbf{z}_t , trekkes det fra fordelingen til $\boldsymbol{\varepsilon}_t$. Denne er diskret fordelt med k elementer og fordelingen er konstruert ved bruk av prinsipalkomponentanalyse. [Gjeldsvik 93] Om det simuleres fra en tilsigsserie, er $\boldsymbol{\varepsilon}_t$



en skalar, eller en vektor om det simuleres multivariat. Via ϕ_t , som er en korrelasjonsfaktor/vektor, vil trukket utfall for uke $t-1$ også påvirke uke t .

Forutsetningene for denne modellen er listet opp nedenfor:

- sesongavhengigheten fjernes ved å bruke variabelen $z_t = (x - x_{mid}) \sigma^{-1}$ hvor $z_t \sim N(0,1)$ for alle tidsserier. Prosessen antas dermed å være svakt stasjonær,
- korrelasjon mellom observasjoner forutsettes å gjelde kun én tidsperiode. Dette gir en førsteordens modell med $corr(z_t, z_\tau | \tau = (t-2), (t-3), \dots, (t-p)) = 0$ for z_t ,
- ϵ_t antas å bestå av kun støy, da leddene med glidende middelvei er sløffet,
- residualen beregnes under MLE-beregningen som bestemmer ϕ_t - og Σ -matrisene og skal være ukorrelerede dvs. $corr(\epsilon_t, \epsilon_\tau | t \neq \tau) = 0$,
- i utledningen av fordelingen for residualene forutsettes det at kravet om linearitet som gjelder for prinsipalkomponenter holder [Johnson & Wichern (1998) kap. 8],
- må gi et antall diskrete utfall med total sannsynlighet lik 1,
- datamaterialet som brukes antas å være representativt.

5.3. Kritikk av modell

5.3.1. Sesongavhengighet og datagrunnlag

Forutsetningen for at modellen er stasjonær etter at variablene er normalisert, er ikke helt korrekt. Årsaken til dette er at tilsiget er sesongavhengig, og følgelig vil en slik tidsrekke ikke være stasjonær. Dette er ikke testet statistisk fordi en slik sesongavhengighet er allment kjent.

Flere forhold påvirker tilsiget og kompliserer modelleringen ytterligere. I perioder med stort tilsig som følge av snøsmelting, vil tilsiget reduseres perioden etter (snøen er jo allerede smeltet bort!). Dette vil ikke bli ivarettatt av denne modellen. Effekten av slike dynamiske hendelser påvirker i liten grad simuleringen av tilsiget. Årsaken er at



store magasin i stor grad glatter ut slike hendelser, og at hendelsen skjer i et kort tidsrom [Gjeldsvik 2001].

Alle parametrene som er tilpasset i modellen er basert på tilsigsserier fra 1930-1990. I denne perioden finnes det enkelte år som har ekstremt mye regn. I miljøet som jobber med Samkjøringsmodellen, finnes det en oppfatning om at det store tilsiget i disse årene har en uforholdsmessig stor innvirkning på modellen [Gjeldsvik 2001]. Hvorvidt dette er tilfellet, er vanskelig å kontrollere. Antakelsen virker dog rimelig, fordi både parametrene og utvalget som det trekkes fra i simuleringen, er basert på dette datasettet.

5.3.2. Korrelasjon

For å få en enkel og hensiktsmessig modell til optimeringen, måtte modellutviklerne avveie statistisk korrekthet og enkelhet. En forutsetning er at støyleddet $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ og $\text{corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_\tau | t \neq \tau) = 0$. Denne forutsetningen viser seg ikke oppfylt [Gjeldsvik 1992, s 9]. Dette innebærer at ε_t strengt tatt ikke er hvit støy, men har en viss seriekorrelasjon med tilsiget. Simulering skjer ved å trekke ε_t . Avhengigheten i støyleddet vil påvirke resultatet. Hvor store feil dette gir, kan evalueres ved å tilpasse en annen- eller høyere ordens AR-modell, og deretter sammenligne residualene fra denne med dagens modell.

Det finnes ingen syntetisk estimert fordeling for ε_t , slik at denne må konstrueres. Problemet med å lage en multivariabel fordeling er at de ulike residualene er korrelert. Korrelasjonen oppstår når en eller flere tilsigsmåliger kan være en del av tilsiget til et magasin. Målepunktene for tilsigsseriene ligger da i et begrenset geografisk område. Dette fører nødvendigvis til en viss korrelasjon.

Hensynet til korrelasjon er løst ved bruk av prinsipalkomponenter [Gjeldsvik 1992, s 22]. Ved bruk av denne metoden får vi like mange uavhengige prinsipalkomponenter som er $\sim N(0, \sigma^2)$ som vi har tilsigsserier. Bruken av prinsipalkomponenter for å



redusere datamengden gjør at en eller flere prinsipalkomponenter strykes, fortrinnsvis de som bidrar med minst varians.

5.3.3. Varians

I tilfeller der residualene er ukorrelerte, det vil si hvis tilsigsserie j har liten kovarians med øvrige tilsigsserier i datagrunnlaget, kan vi risikere å bli stående med $\varepsilon_t^{(j)}=0$ i alle diskrete utfall som det trekkes fra. Årsaken er man kan risikere at denne får en egen prinsipalkomponent, og denne kan bli strøket om variansen er liten. I de fleste tilfeller vil dette ikke ha større betydning. Men i tilfeller med flere ukorrelerte serier med stor varians kan dette ha betydning fordi vi da får mange prinsipalkomponenter som bare avhenger av én tilsigsserie. Variansen vil også påvirkes av utvalget av prinsipalkomponentene, noe som er gitt ved definisjonen av disse. Ved å fjerne en eller flere prinsipalkomponenter, fjerner vi varians fra alle simulerte tilsig, og dermed blir variansen underestimert.

Dette vil lede til at hele tilsigsserien i simuleringsperioden for $\tilde{x}^{(j)}$ er gitt av startverdien. Fordi tidskorrelasjon er $-1 \leq \phi_t \leq 1$, vil en slik serie være minkende eller økende med tiden. Konsekvensen for et magasin som har sitt tilsig fra denne serien, er at det blir under- eller overestimert. Ved svært høye eller lave startverdier vil et slikt utslag gi grovt feilestimat av magasinivolumet i slutten av simuleringsperioden.

5.3.4. Fordelingens egenskaper

Fordelingen av prinsipalkomponentene til ε_t blir dannet ved bruk av diskret tilnærming. I konstruksjonen av fordelingen til de utvalgte prinsipalkomponenter blir det brukt første, andre, tredje og fjerde ordens momenter. Følgelig er forventning, varians, skjevhet og haletykkelse ivaretatt i disse fordelingene så godt som mulig [Gjelsvik 1992, s 12]. Antall diskrete utfall s er gitt av hvor mange prinsipalkomponenter som velges å bruke og antall diskrete utfall i fordelingen til disse. Om vi velger antallet prinsipalkomponenter $k=3$ og antall diskret utfall $n=2$, vil vi få $s=n^k=2^3=8$ utfall å trekke fra. Vanligvis er $k \geq 3$, slik at antall diskrete utfall vanligvis er over 8,



forutsatt at hver prinsipalkomponent har to diskrete utfall. Alle utfallene har lik sannsynlighet og summerer seg opp til én.

Ved å simulere fra et diskret utfall, vil også det simulerte tilsiget bli ujevnt, og vi får en tilsigskurve med mange ripler, forutsatt at antall utfall er relativt lite. Dette vises ved å sammenligne observerte tilsigkurver med simulerte. [Gjelsvik 1992, fig 4.3b] Bruken av en diskret tilnærming påvirker også haleoppførselen til det simulerte tilsiget, og følgelig vil simulering av ekstremtilfeller være vanskelig.

Tilnærming av fordelingen til hver prinsipalkomponent gjør at hensynet til diskrete utfall er ivaretatt. Samtidig fører kravet om diskrete utfall til at vi ikke kan simulere hver komponent univariat for de n prinsipalkomponentene. Disse kunne man satt sammen til en matrise med dimensjonen $n \times 1$ av simulerte verdier. Om denne matrisen multipliseres med kovariansmatrisen Σ med dimensjon $n \times n$, får vi en simulert matrise med dimensjon $n \times 1$ med riktig kovariansstruktur. Dette er en vanlig simuleringsmåte for multivariate fordelinger.

5.4. Oppsummering

En del av forholdene vi påpeker er allerede nevnt i rapporten om tilsigsmodellen [Gjelsvik 1992]. Av det vi har bemerket, har forhold som berører varians og haleoppførsel til den simulerte fordelingen størst betydning. Årsaken er at modellen skal kunne simulere ekstremverdier, og med simulering fra en fordeling med feil varians og haleoppførsel, vil slik verdier vanskelig forekomme i simulerte data. Dette er i dag et av problemene tilsigsmodellen har. Dersom man ønsker å utvikle en ny modell eller forbedre den eksisterende, bør derfor disse forholdene i særlig grad vektlegges.

6. Prismodellen

6.1. Bakgrunn

Denne prismodellen anvendes blant annet i Vansimtap, Plansddp og ProdRisk. Den senere tid er modellformuleringen byttet til en første ordens diskret markovmodell. I



følge Mo [2000] oppfører denne modellen seg bedre enn den gamle autoregressive da de statistiske egenskapene er mer korrekt. Hovedpoenget med å lage en ny modell var å ha en felles modell for de nevnte programmene, samt å forbedre egenskapene ved ekstrempriser.

6.2. Modellforutsetninger

Det viktigste kravet til denne prismodellen er at den kan beskrive prisene på en hensiktsmessig måte. Da er det viktig å ha mest mulig korrekte statistiske egenskaper. Ellers må modellen gi mest mulig realistiske og gode simuleringsresultater. Modellen må dessuten kunne brukes i alle de ovennevnte modulene i Samkjøringsmodellen. Her er viktig å velge riktig struktur på modellen. Løsningsmetoden for modulene er basert på stokastisk dynamisk programmering. Dette krever at det dannes diskrete prispunkter.

6.3. Kort modellbeskrivelse

6.3.1. Diskretisering

Inngangsverdiene til modellen er et antall prisscenarier, vanligvis er dette 60-70, men enkelte opererer med helt opp mot 240 scenarier. For den første tidsperioden plasseres disse i stigende rekkefølge, og vi diskretiserer med et minimum antall, N_{\min} , prisscenarier tilordnet hvert punkt. Med 60-70 scenarier er det fornuftlig å operere med fem ordinære prispunkter pluss to ekstremprispunkter for å få minst N_{\min} antall scenarier bak hvert prispunkt. [Mo 2000] Dette gjøres for hvert diskrete tidspunkt i hele tidshorisonten.

6.3.2. Estimering av overgangssannsynligheter

Etter å ha gruppert scenariene i diskretiseringen beregnes overgangssannsynligheten mellom prispunktene ved å telle opp antall scenarier som fører fra ett prispunkt i periode $t-1$ til ett prispunkt i periode t og dele på antall scenarier i det opprinnelige prispunktet. For å oppfylle de statistiske egenskapene må vi modifisere overgangssannsynlighetene. Dette betyr at forventet pris i uke $t+1$ i prispunkt i i prismodellen, skal være lik gjennomsnittet for uke $t+1$ av de prisscenarier som tilhører prispunkt i i uke t . Dessuten, gitt den korrekte sannsynlighetsfordelingen til



kraftprisen i ett tidsskritt, skal forventet pris for alle fremtidige tidsskritt i prismodellen være lik forventningsverdien til prisscenariene. Disse to restriksjonene motvirker hverandre til en viss grad.

6.3.3. *Ekstremscenarier*

For å forbedre egenskapene ved ekstremt høye og lave priser tilordner vi den høyeste og den laveste scenarieprisen et nytt prispunkt. Tallmessig bare dupliserer vi øverste og nederste linje i overgangssannsynlighetsmatrisen. Overgangssannsynligheten til disse ekstremprisene er null fordi vi kun ønsker å finne en strategi fra dem. Dessuten påvirker de ikke, og skal heller ikke påvirke, ”kjernepunktene”.

6.4. **Kritikk av modell**

6.4.1. *Modellvalg*

Vansimtap og Plansddp krever diskrete prispunkter som inngangsverdier. Derfor må modellen ha den strukturen den har. En mer generell prismodell kunne ha vært langt friere på dette området.

6.4.2. *Scenariene*

Prisscenariene stammer stort sett fra Samkjøringsmodellen og er basert på historiske data og data om kraftsystemene. Man etablerer en tilbudskurve og en etterspørsel og finner et estimat for prisen. Samkjøringsmodellen brukes her som en scenariogenerator. Bruker man alle innstillingsmulighetene kan man klare å fremprovosere et stort antall scenarier med meget forskjellige forutsetninger og som er åpne for alle eventualiteter. I Samkjøringsmodellen må prisen være symmetrisk om det siste året. Dette fører til en systematisk feil mot slutten av analyseperioden, men er nødvendig for å i det hele tatt kunne anvende dynamisk programmering. Problemet kan man unngå ved å alltid simulere noen år lenger enn man trenger. Man kunne tenke seg andre modeller for å generere scenarier. Norsk Hydro har en egen scenariogenereringsmodell. Viz, en modell som utelukkende er basert på informasjonen på markedet finnes også. Den er dermed ikke direkte knyttet opp til selve fysikken i kraftsystemet.



6.4.3. Ekstrempriser

Når modelleringen i for dårlig grad ivaretar den effekten ekstremprisene har, vil det tappes for fort ved lav pris og for langsomt ved høy pris. Dette fører til økonomiske tap for brukeren.

6.5. Oppsummering

Etter vår oppfatning utfører modellen sin oppgave hensiktsmessig. Med ekstremprispunktene får vi bedre resultater som fører til mer virkelighetsnære tappebeslutninger. På et par punkter er det likevel rom for forbedring. I estimatet av overgangssannsynlighetene ville man kunne legge inn en restriksjon om korrekt varians i observert pris. Korrekt varians kan finnes fra markedsobservasjoner fordi denne variansen stammer fra den korrekte sannsynlighetsfordelingen for prisen. Blant annet ville da de statistiske egenskapene bli forbedret. Det største problemet er egentlig at scenariene stammer fra Samkjøringsmodellen.

7. Utvikling av ny prismodell

7.1. Hvorfor ny prismodell

Prisscenarier som brukes til å tilpasse prismodellen hentes vanligvis fra Samkjøringsmodellen [Mo, 2000 kap 3]. Ved lav/høy initiell magasinfylling eller med stigende/fallende tendens i siste prognoseår kan vi rett og slett få gale resultater siden iterasjonsmetoden krever at markedet og produksjonsapparatet i starten og slutten av det siste året er identisk. Strengt tatt er dette effekter med bakgrunn i scenariene og i den dynamiske programmeringsalgoritmen, men det får konsekvenser for hvordan prismodellen konstrueres. Prisscenariene kan også hentes fra andre modeller, noen av disse er beskrevet i kapittel 2.9.

Det faktum at prisscenariene fra Samkjøringsmodellen kan være feil, er i seg selv en god grunn til å lage en ny modell til å generere scenarier. Likevel veier det tyngst at modellen genererer forventet spotpris og at dette gir arbitrasjemuligheter som nevnt i kapittel 2.11.1. Bruken av forventet spotpris for å bestemme vannkraftsproduzentens planleggingsproblem vil derfor ikke maksimere kraftverkets markedsverdi.



Løsningen av produsentens planleggingsproblem gir forskjellige strategier for produksjon av kraft, det vil si disponeringen av magasinvannet. Tappebeslutningene beregnes i dag ved at forventete variable kostnader forbundet med å gå fra en tilfeldig tilstand til en definert slutttilstand minimeres, det vil si maksimere profitten (se kapittel 3.3.1). Denne kostnaden beregnes ved bruk av forventet spotpris, og blir derfor feil. Hvilke konsekvenser en slik feil har er beskrevet i neste avsnitt.

7.2. Feil ved bruk forventet spotpris

Bruken av forventet spotpris leder til at vannverdien blir overestimert om det forutsettes positiv risikopremie, som den har vært de siste fem årene (se kapittel 2.4). Fordi alle driftsbeslutninger i optimeringen skjer ved bruk vannverdier blir ikke løsningen av driftsplanleggingsproblemet optimalt.

Årsaken er at vannet oppfattes mer verdifullt enn hva det egentlig er, og termisk kraft kan da bli startet opp fordi vannverdien er høyere enn marginalkostnaden for dette. Denne høye vannverdien kan også lede til at produsenten kjøper kraft i spotmarkedet for å oppfylle egne forwardkontrakter når han burde produsert selv. Verdien av restmagasinet blir også overvurdert.

Følgene av dette blir at produsenten sparer vannet lenger enn han burde. Ved slutten av planleggingsperioden sitter han da med mer vann i magasinet en hva som er optimalt. Produsenten mister derfor inntekter i planleggingsperioden og kan risikere å måtte selge til en lavere pris i neste planleggingsperiode. Produsenten er derfor utsatt for en høyere usystematisk risiko når forventet spotpris brukes i planleggingen.

En liknende argumentasjon kan også føres for negativ risikopremie, men da vil produsenten bruke for mye vann. Dette fører til at han kanskje må kjøpe mer kraft i spotmarkedet i neste periode fordi han ikke har tilstrekkelig i magasinet til å møte sine fastkraftforpliktelser. Han blir igjen utsatt for større usystematisk risiko.



7.3. Forutsetninger for modellen

De viktigste kravene til en ny modell er knyttet opp til forholdet mellom forventet spot- og forwardpris. Forholdet mellom dem må være konsistent og reflekterer risikopremien i markedet. En ny prismodell må også være bygget på de forhold som bestemmer forwardprisen.

Tidshorizonten påvirker modellen og dens oppbygning. Modellen skal kunne generere scenarier inntil 1-3 år. Scenariene skal være ordinære, det vil si vi ønsker ikke å få frem mulige prisscenarier som følger av ekstraordinære hendelser.

7.4. Hva bestemmer forwardprisen

En rekke faktorer påvirker forwardprisen og vil være forskjellige i det nordiske og amerikanske markedet, men være knyttet til særegenhetene i hvert marked. I Norden er innslaget av vannkraft betydelig, særlig i Norge hvor nesten hele produksjonen er basert på dette (99,5% etter NordPool).

For det nordiske markedet kan faktoren deles i to hovedgrupper, hvorav den ene er prisdriverne:

- årlig økning av den totale etterspørselen (ca 2,7 % [NOU 1998 11]),
- sesongvariasjon i etterspørselen som følge av været, samt variasjon som skyldes ferie og planlagte produksjonsstopp hos storforbrukerne,
- overføringskapasiteter mellom forskjellige geografiske områder, kan føre til flaskehals,er,
- den generelle situasjonen i økonomien,
- kontraktfestet eksport av kraft.

I den andre gruppen har vi elementer som påvirker tilbudssiden:

- totalt tilsig i form av regn og snøsmelting.
- planlagt vedlikehold av produksjonsenheter.
- fremtidig usikkerhet i olje-, uran-, kull- og gasspriser og dermed implisitt råvaretilgangen (under vanlige forhold er tilgang ikke et tema).



- politiske vedtak som påvirker marginalkostnaden for visse typer kraftproduksjon, for eksempel CO₂-avgiften,
- beslutninger om fremtidige kapasitetsutvidelser for kraftproduksjon og overføringsnett. Herunder kommer også virkningen av ny teknologi implisitt i beslutningen om ny kapasitet,
- kontraktfestet import av kraft.

7.5. Hvilke faktorer bør være med i en modell

Valget av faktorer er gitt av hvilke resultater modellen skal tilføre oss. Ideelt sett burde modellen ta hensyn til alle faktorene som er nevnt. Dette lar seg vanskelig gjøre fordi en rekke av dem ikke er kvantitative og kan dermed ikke inngå i en matematisk modell. Andre faktorer representerer hendelser, som forkommer så sjelden at de ikke vil være av interesse i en modell som skal generere ordinære scenarier for forwardprisen.

7.5.1. Faktorer som utelates

At modellen skal generere scenarier som ligger 1-3 år frem i tid, fører til at faktorer knyttet til kapasitetsutvidelse av produksjon og overføringsnett utelates. Det samme gjelder for politiske faktorer som i tillegg vil vært svært vanskelig å modellere.

Forhold som berører den generelle økonomiske situasjonen, har med den grunnleggende markedsrisikoen å gjøre. For å måle dette kan man bruke en indikator, for eksempel renten. Men for å oppnå en enklere modell lar vi den åpenbare korrelasjonen mellom etterspørsel og konjunktur ivareta dette hensynet. Dermed er denne viten allerede inkludert i de historiske forwardprisene som kan brukes for å tilpasse modellen.

Antall produksjonsanlegg for elkraft i det nordiske markedet er høyt, og består av mange mindre enheter. Selv de større kraftverkene er delt i flere enheter, kjernekraftverk i blokker, og vannkraftverk har flere turbiner. Denne diversifiseringen gjør at både uforutsette og planlagte stopp ikke påvirker prisen i særlig grad.



Vedlikeholdet på disse skjer også regelmessig og informasjon om dette ligger derfor i historiske forwardpriser. En faktor for disse forhold er derfor unødig å ta med i en modell.

7.5.2. Faktorer som ikke tilpasses direkte

Import og eksport av kraft vil endre likevekten i det nordiske eller norske kraftmarkedet og dermed prisen. Mengden av import og eksport er også avhengig av prisene på brensel som brukes i de termiske kraftverkene i Sverige, Danmark og Finland.

Uranprisen antas å utgjøre kun en liten del av marginalkostnaden for et kjernekraftverk. Dermed vil uranprisen kun innvirke på forwardprisen ved dramatiske prisendringer. For denne type kraftverk vil mengde planlagt produsert kraft påvirke prisdannelsen i forwardmarkedet og ikke uranprisen.

Man vil kunne sikre seg mot variasjon i brenselprisen ved å inngå en forwardkontrakt. Forwardprisen på gass, olje, kull og biobrensel vil derfor påvirke forwardprisen for elkraft i større grad. I kapittel 2.8 er det også beskrevet en metode for å konstruere en forwardkurve for elkraft ved bruk av sammenheng mellom forwardprisen på brensel og forwardpris for elkraft.

Er forwardprisen på brensel høy, vil de termiske produsentene ønske å kjøpe forwardkontrakter i kraftmarkedet for å dekke sine fastkraftforpliktelser. Er prisen lav vil de tilby forwardkontrakter i kraftmarkedet. Særlig gjelder dette for kull til danske kraftverk [Statkraft 2001]. Oljedrevne kraftverk brukes mer til å ta topper i forbruket og påvirker derfor spotprisen for elkraft mer enn forwardprisen.

I en modell kan man derfor velge å ta inn forwardprisene brensel inn som faktor eller ikke. Vi velger det siste av hensyn til kompleksiteten i modellen. Konsekvensen blir at denne informasjonen finnes maskert i residualene i den modellen vi velger å tilpasse.



Residualene blir da sannsynligvis ikke $\sim N(0, \sigma^2)$. Ved tilpasse et støyledd til likningen kan da residualene tilpasses slik at de er $\sim N(0, \sigma^2)$.

Denne informasjonen er da representert gjennom et støyledd med en gitt fordeling. Dette kan gjøres fordi forwardprisene på brensel er basert på spotpriser som følger en stokastisk prosess. Begrenset kapasitet på overføringslinjer og -kabler vil også bidra til at import- og eksportvirkninger på forwardprisen er vanskelig å observere i historiske data. Bruken av et støyledd virker derfor mer hensiktsmessig enn å ta forwardprisen på brensel inn som en egen faktor. Skulle modellens simuleringsevne vise seg å bli dårlig, kan det vurderes ta hensyn til brenselpriser gjennom en egen faktor.

7.5.3. *Faktorer som skal inngå i modellen*

Faktorene som gjenstår skal tilpasses modellen. Disse er følgende:

- sesongavhengighet,
- tilsig i form av regn og snøsmelting,
- økning i årlig etterspørsel.

Den årlig økningen av etterspørselen etter elkraft har de siste årene vært i størrelsesorden 2,7 % [NOU 1998 11]. Samtidig har mengden nyinstallert effekt vært nær null. Ved å bruke datagrunnlaget ujustert, vil denne trenden bli innlemmet i modellparametrene. Alternativt kan datagrunnlaget justeres slik at trenden fjernes, og modellen tilpasset de justerte dataene. Fordelen med en slik tilnærming er at man kan lage en tidsavhengig justeringsfaktor som er uavhengig av prismodellen for forwarder.

Faktorene som gjenstår er da sesongavhengighet og totalt tilsig. Begge disse må være med i modellen. Sesongavhengigheten er et mål på markedes forventning til været i perioden som forwardene i elmarkedet prises for, og vil i Norge være betydelig. Av all kraftproduksjon i Norge skjer over 99,5 % [NordPool 2001] med bruk av vannkraftverk. Tilsiget til magasinene er derfor en av de mest signifikante faktorene når forwardprisen skal bestemmes, og må derfor være med.



8. Oppsummering

I denne rapporten har vi presentert driftplanleggingsproblemet med særlig vekt på vannkraftprodusentens driftplanleggingsproblem og hvordan det kan løses i dag. Vi har koblet inn moderne finansteori og forklart endel særegenheter i det nordiske elkraftmarkedet. Dessuten har vi presentert noen av de nyeste artiklene, både empiriske undersøkelser og teoretiske bidrag med utgangspunkt i det nordiske markedet. To utbredte modeller for pris og tilsig evaluerer vi mer spesifikt. Utbredelsen skyldes at modellene brukes i Samkjøringsmodellen. Til slutt presenterer vi tanker rundt å modifisere prismodellen, med særlig vekt på å bruke terminpriser. Avsluttende ønsker vi å bemerke at rapporten må betraktes som en forprosjekt/litteraturstudie til våre hovedoppgaver



9. Referanse- og litteraturliste

- Angelus, A. (2001), "Electricity Price Forecasting in Deregulated Markets" *The Electricity Journal*, April 2001, vol. 14, no. 3 pp 32-41
- Bjerklund, P. & Rasmussen, H. & Stensland, G. (2000), *Valuation and Risk Management in the Norwegian Electricity Market*, NHH, Bergen
- Botnen, O. J. & Johannesen, A. & Haugstad, A. Kroken, S. & Frøystein, O. (?), *Modling og Hydropower Scheduling in a National/International Context*, Norwegian Electric Power Research Institute/State Power Board, Trondheim/Oslo
- Brooks, C. & Rew, Alistar G. Ritson, S. (2001), "A Trading Strategy Based on the Lead-lag Relationship between the Spot Index and Futures Contract for the FTSE 100" *International Journal of Forecasting*, 2001, vol. 17, no 1, pp 31-34
- Clewlow, L & Strickland C. (2000), *Energy Derivatives: Pricing and Risk Management*, Lacima Publications, London
- Deng, S.-J. (1999), *Financial Methods in Competitive Electricity Markets*, Dr. avhandling, University of California, Berkeley, USA
- Deng, S.-J. & Johnson, B. & Sogomonian (2001), "Exotic Electricity Options and the Valuation of Electricity Generation and Transmission Assets" *Decision Support Systems*, Vol. 30, pp 383-392
- Faanes, H. H. (2000), *SIE 1035 Energiplanlegging Optimalisering av energisystemer*, Kompendium, NTNU Institutt for elkraftteknikk, Trondheim
- Fleten, S.-E. (2000), *Portfolio management emphasizing electricity market applications A stochastic programming approach*, Dr.ing avhandling, NTNU, Trondheim
- Fleten, S.-E. & Tomasgard, A. & Wallace, S. W. (2001), "Produksjonsplanlegging og risikostyring i et deregulert kraftmarked med finansielle instrumenter" *Magma Tidsskrift for økonomi og ledelse*, 2001, nr. 5 s 22-33
- Gjelsvik, A, møte Sintef Energiforskning 3/10-2001.
- Gjelsvik, A. & Haugstad, A. & Belsnes M. (1997), *Stokastisk dual dynamisk programmering og Samkjøringsmodellen*, Sintef Energiforskning TR A4501, Trondheim
- Gjelsvik, A. (1992), *Stokastisk tilsigsmodell for driftsplanlegging*, Sintef Energiforskning TR A4008, Trondheim
- Gjelsvik, A. & Wallace, S. (1996), *Methods for Stochastic Medium-term Scheduling in Hydro-dominated Power Systems*, Sintef Energiforskning TR A4438, Trondheim
-



Gjeldsvik, A. & Belsnes, M. B. & Håland M. (1997), *A Case of Hydro Scheduling with a Stochastic Price Model*, Hydropower 97 Rotterdam

Haugstad, A. & Rismark, O., *Price Forecasting in an Open Electricity Market Based on System Simulation*, Sintef Energiforskning, Norwegian Power Brokers, Trondheim

Haugstad, A. & Botten, O. J. & Johannesen, A (1992), *Norge som energinasjon. Samkjøringsmodellen: Verktøy for regional/nasjonal ressursdisponering*, Sintef Energiforskning TR A4561, Trondheim

Haugstad, A. & Gjeldsvik, A. & Mo, B. & Johansen, A. & Wangensteen, I. & Rismark, O. (1997), *Langtids forretningsdrift – Forprosjekt: Forbedret modellering av det nordiske kraftmarked*, Rapport utarbeidet for EnFO, Sintef Energiforskning, Trondheim

Hindsberger, M. & Philpott, A. B. (2001) *Medium-term Hydro-thermal Scheduling with Stochastic Inflows*, Working paper, 9th International Conference on Stochastic Programming, Berlin, Aug 25-31 2001

Hull, John C. (1999), *Options, Futures and Other Derivative Securities*, 4. utg, Prentice Hall, Englewood Cliffs, USA

Johnsen, T. A. (2001), "Demand, Generation and Price in the Norwegian Market for Electric Power" *Energy Economics*, Vol 23, pp 227-251

Johnson, R. A. & Wichern, D. W. (1998), *Applied Multivariate Statistical Analysis*, fjerde utgave, Prentice Hall, New Jersey

Joy, C. , "Pricing, Modelling and Managing Physical Power Derivates" *Energy Modelling & the Management of Uncertainty*

Koekebakker, S. & Ollmar, F. (2001), *Forward Curve Dynamics in the Nordic Electricity Market*, HIA/NHH, Kristiansand/Bergen

Kian, A. & Keyhani, A. (2001), "Stochastic Price Modeling of Electricity in Deregulated Energy Markets" *Proceedings of the Hawaii International Conference on System Sciences, 34th Annual Hawaii International Conference on System Sciences*, Jan 3-6 2001, Hawaii, USA

Killingtveit, Å. (2000), *Tilslagsprognoser – lang sikt*, NITO fagkurs for kraftverksdrift og krafthandel, 8-9. feb 2000

Knittel, C. R. & Roberts, M. (2000), *Financial Models of Deregulated Electricity Prices I: Discrete Time Models*, Work in Progress, Department of Finance and Economics, Boston University & University of California Energy Department

Kåresen, K. F. & Husby, E.(2000), *A Joint State-Space Model for Electricity Spot and Futures Prices*, rapport 965, Norsk Regnesentral desember 2000



Lucia, J. J. & Schwartz, E. S. (2000), *Electricity Prices and Power Derivatives. Evidence from the Nordic Power Exchange*, First draft, Dpto. Economía Financiera y Matemática Universidad de Valencia & The Anderson School at UCLA, Los Angeles

Mo, B. & Gjelsvik, A. & Grundt, A. (2001), "Integrated Risk Management of Hydro Power Scheduling and Contract Management" *IEEE Transactions on Power Systems*, May 2001, vol. 16, no. 2, pp 216-221

Mo, B. & Green, T. & Warland, G. & Haugstad, A. (2000), *Dokumentasjon av ny prismodell til bruk i Vansimtap, Planssddp og Beta*, Sintef Energiforskning Trondheim

Nordpool (2001), *The Nordic Power Market Electricity Power Exchange across National Borders*, 25. Aug 2001, Oslo

NOU 1998:11, *Energi- og kraftbalansen mot 2020* Olje og energidepartementet, Strøm-Erichsen, A.-G. (leder), Oslo juli 1998

Pai, L. & Field, P. (1995), *Managing Energy Price Risk*, Risk Publications, Enron Capital & Trade Resources, London, UK

Pereira, M. V. F. (1989) "Optimal Stochastic Operations Scheduling of Large Hydroelectric Systems" *Electrical Power & Energy Systems* vol. 11, no. 3, July 1989, pp 161-169

Pereira, M. V. F. & Compodónico, N. & Kelman, R., *Stochastic Optimization of Complex Hydrothermal Systems in a Competitive Framework* PSRI

Pilipović, D. (1998), *Energy Risk, Valuing and Managing Energy Derivatives*, McGraw-Hill, New York, USA

Sollibakke, P. B. (2001a), *Efficiently Estimated Mean and Volatility Characteristics for the Nordic Spot Electric Power Market*, Institutt for bedriftsadministrasjon og økonomi, Høgskolen i Molde

Sollibakke, P. B. (2001b), *A Stochastic Volatility Model Specification with Diagnostics for the Nordic Forward Electric Power Market*, Institutt for bedriftsadministrasjon og økonomi, Høgskolen i Molde

Sollibakke, P. B. (2001c), *Estimation of Discrete Time Stochastic Volatility Models with Diagnostics for the Nordic Forward Electric Power Market*, Institutt for bedriftsadministrasjon og økonomi, Høgskolen i Molde

Sollibakke, P. B. (2001d), *Efficiently Mean and Volatility Characteristics with Diagnostics for the Nordic Forward Electric Power Market*, Institutt for bedriftsadministrasjon og økonomi, Høgskolen i Molde



Treat, J. E. (2000) (Red.), *Energy Futures: Trading Opportunities*, 3. utg, PennWell, Oklohoma, USA

Wangensteen, I. (2000), *Power System Operation and Planning. The Deregulated Nordic Case*, Sintef Energy Research 2001, Trondheim

København Børs' hjemmeside: <http://www.kfb.dk/uk/index.asp>

Oslo Børs' hjemmeside: <http://www.ose.no>

Nordpools hjemmeside <http://www.nordpool.com>

Stockholmsbørsens hjemmeside: <http://www.stockholmsborsen.se>

Helsinki børs' hjemmeside: <http://www.hex.fi/>

Statkrafts hjemmeside: <http://www.statkraft.no>