

Forord

Denne prosjektoppgaven er utarbeidet av to studenter fra Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse høstsemesteret år 2001. Rapporten er utarbeidet i tilknytning til faget SIS1101 Investering, finansiering og økonomistyring, fordypningsemne. Prosjektoppgaven utgjør 5 vekttall per student, og den er en innledning på diplomoppgaven som skal skrives vårsemesteret år 2002.

Selve oppgaveformuleringen ble til etterhvert som prosjektet ble utarbeidet. Siden prosjektoppgaven handler om kraftderivater, som er et relativt nytt tema, er det et begrenset omfang med empiriske studier og publiserte bøker.

Det rettes en stor takk til veileder Stein-Erik Fleten for god veiledning og støtte. Vi ønsker også å takke Kenneth Andreassen, Rickard Nilsson og Christina König som er ansatte på Nord Pool for informasjon ved utarbeidelse av denne oppgaven. I tillegg ønsker vi å takke professor Dominicus van der Wijst for hjelp til forståelse av metode.

Trondheim, 11. desember 2001

Siw Linnea Jansen

Caroline Østby

Sammendrag

Den nordiske elektrisitetsbørsen Nord Pool har fire forretningsområder bestående av et fysisk og et finansielt marked, clearingservice, samt en informasjon/statistikk-enhet. I det fysiske markedet på Nord Pool fastsettes det for hver time i det kommende døgn en systempris. Dette er referanseprisen for det finansielle markedet der det ikke er noen fysisk levering, men intensjonen er enten spekulasjon eller risikostyring ved å handle derivater som opsjoner, future-, forward- og Cfd-kontrakter. I tillegg til Nord Pool finnes det et bilateralt marked der derivathandel er volumessig flere ganger større enn på børsen.

Prisene på strøm og dets derivater har en særegen form, grunnet at strøm har spesielle karakteristika som f.eks at varen ikke kan lagres. Følgelig kan tradisjonelle verdier som vektlegger varearbitrasje, “cost of carry”, eller “convenience yield” være feilaktige til å kartlegge verdien av strøm. Spotprisene varierer i et gitt mønster både sesong-, uke- og døgnmessig. Det er en sterk trend til ekstrempriser som følge av bl. a sprang i etterspørsel, og volatiliteten for spotpriser er følgende meget høy.

Spotprisene viser en trend til tilbakegang til et gitt likevektsnivå, kalt “mean reversion”. Forwardkurven angir en risikonøytral forventning til spot og representerer dermed dette tilbakegangsnivået. Ohrnstein-Uhlenbeck- prosessen tar hensyn til mean reversion i systemprisene, og bør derfor erstatte “Geometric Brownian Motion” (GBM) som prosessmodell for spotprisen. “Black 76”- metoden som brukes på Nord Pool for å prise opsjoner tar utgangspunkt i GBM, men i denne oppgaven er opsjonspriser regnet ut ved å bruke en numerisk metode basert på mean reversion.

Opsjonspringsmodellen som er bygget har tatt utgangspunkt i en enfaktormodell fra Clewlow og Strickland (1999) som diskretiserer en gitt kontinuerlig forwardkurve i form av et trinomisk tre. I treet er det estimert fremtidige spotpriser ut fra en gitt analysedato, og disse er så justert med en endringsparameter slik at treet har blitt konsistent med forwardkurven. Med utgangspunkt i treet er det brukt to metoder for å regne ut forwardpriser for en leveringsperiode. I den ene metoden er det brukt betinget sannsynlighet, og i den andre ulik skrittlengde for å estimere disse forwardprisene. Videre er opsjonspriser kalkulert for disse forwardkontraktene. Sammenlikning med markedsverdier viser at modellen gir resultater i noenlunde samsvar med markedet på analysedatoen.

Innholdsfortegnelse

1	INNLEDNING	1
2	KRAFTMARKEDET	2
2.1	NORD POOL.....	2
2.1.1	<i>Nord Pools oppgaver</i>	2
2.1.2	<i>Historisk utvikling</i>	2
2.1.3	<i>Clearing</i>	3
2.1.4	<i>Valuta</i>	4
2.2	DET FYSISKE MARKEDET PÅ NORD POOL	4
2.2.1	<i>Anmelding av kjøp og salg</i>	4
2.2.2	<i>Prisdannelse</i>	5
2.2.3	<i>Områder</i>	5
2.3	DET FINANSIELLE MARKEDET	6
2.3.1	<i>Historikk</i>	6
2.3.2	<i>Derivater handlet i det finansielle markedet</i>	7
2.3.2.1	<i>Futures</i>	7
2.3.2.2	<i>Forwards</i>	7
2.3.2.3	<i>Contracts for Difference (CfD)</i>	8
2.3.2.4	<i>Opsjoner</i>	9
2.4	OTC-MARKEDET	9
3	EMPIRISKE EGENSKAPER TIL STRØMPRISENE	11
3.1	STRØM KAN IKKE LAGRES	11
3.2	VARIASJON I SYSTEMPRISENE	11
3.3	EKSTREMPRISENER.....	13
3.4	VOLATILITET	14
3.5	MEAN REVERSION	14
3.6	ESTIMERING AV FREMTIDIGE STRØMPRISENER	15
3.6.1	<i>Tekniske modeller</i>	15
3.6.2	<i>Forwardkurven representerer risikonøytral forventning</i>	15
3.6.3	<i>Markedsrisiko</i>	16
4	PRISPROSESSER OG PRISING AV DERIVATER	17
4.1	PROSESSEN TIL SPOTPRISENE	17
4.1.1	<i>Geometric Brownian Motion</i>	17
4.1.2	<i>Ohrnstein-Uhlenbeck</i>	18
4.2	TERMINER OG PRISING AV TERMINER PÅ KRAFT	18
4.3	OPSJONER OG PRISING AV OPSJONER	19
4.3.1	<i>Black-Scholes</i>	20
4.3.1.1	<i>Generelle antakelser for Black-Scholes</i>	20
4.3.1.2	<i>Input- parametere til Black-Scholes</i>	21
4.3.2	<i>Numeriske teknikker for prising av opsjoner</i>	21
5	METODE	24
5.1	INNLEDNING.....	24
5.1.1	<i>Valg av derivat</i>	24
5.1.2	<i>Type modell</i>	24
5.1.3	<i>Form på treet</i>	25
5.1.4	<i>Proseduren for å bygge et trinomisk tre</i>	26
5.2	TEORI, GRUNNLAG FOR MODELL	26
5.2.1	<i>Implisert forwardkurve</i>	26
5.2.2	<i>Volatilitet</i>	28
5.3	DEL A: PROSEDYRE FOR BYGGING AV TRINOMISKE TRÆR	29
5.3.1	<i>Underliggende formeler for trebyggingprosessen</i>	29
5.3.2	<i>Utrekning av prisen i initielt tre</i>	30
5.3.3	<i>Utrekning av sannsynligheter basert på initielt tre</i>	31
5.3.4	<i>Utrekning av tilstandspriser</i>	32
5.3.5	<i>Estimering av endringsparameteren a_i</i>	33
5.3.6	<i>Estimering av parametre</i>	33
5.3.6.1	<i>Estimering av volatiliteten, σ, og hastigheten til mean reversion, α</i>	33

5.3.6.2	Risikofri rente r	36
5.3.6.3	Tidsintervallet Δt	36
5.4	DEL B-1: PROSEDYRER FOR UTREGNING AV FORWARDPRISER	36
5.4.1	Sti-metode.....	38
5.4.2	Ulik Δt -metode.....	40
5.5	DEL B-2: PROSEDYRE FOR UTREGNING AV OPSJONSPRISEN	42
5.6	RESULTAT	42
5.6.1	Markedspriser vs priser fra stiafhengig metode	46
5.6.2	Markedspriser vs priser fra ulik Δt -metode.....	47
5.6.3	Sammenligning av metodene til å finne forwardpriser.....	47
5.7	FEILKILDER OG KRITIKK AV METODE	47
5.7.1	Feilkilder	47
5.7.1.1	Volatiliteten, σ , og faktoren for mean reversion, α	47
5.7.1.2	Prisene på Nord Pool 03.10.01	49
5.7.1.3	Feil i formler.....	49
5.7.1.4	Feil i utført metode	49
5.7.1.5	Tid mellom levering og utløpstid for opsjon	49
5.7.1.6	Feil i den risikonøytrale renten r	50
5.7.1.7	Valg av den initielle forwardprisen	50
5.7.2	Kritikk av metode.....	50
5.7.2.1	Kritikk av den valgte metode.....	50
5.7.2.2	Alternative metoder for å prise derivater	51
6	KONKLUSJON.....	52
7	LITTERATURLISTE.....	53
8	VEDLEGG A: UTLEDNING AV IMPLISERT SPOTPRISPROSESS	56
9	VEDLEGG B: UTLEDNING AV FORWARDKURVEN PÅ TIDSPUNKT T	58
10	VEDLEGG C: BRUK AV ITOS LEMMA	59
11	VEDLEGG D: UTLEDNING AV ENDRINGSPARAMETEREN A_1	61
12	VEDLEGG E: FORKLARING AV REGNEARKENE.....	62
E.1	OPSJONSPRISER	62
E.2	VOLATILITET	63

Figurliste

Figur 1.1:	Oppgavens oppbygning.....	1
Figur 2.1:	Historisk utvikling (Nord Pool, 2001B).....	2
Figur 2.2:	Utviklingen på det fysiske og finansielle markedet på Nord Pool 1993-2001 (Nord Pool, 2001B).....	3
Figur 2.3:	Organisering av NEC (Nord Pool, 2001A).....	4
Figur 2.4:	Markedskryss (Nord Pool, 2001B).....	5
Figur 2.5:	Områder for priser på Nord Pool (Nord Pool, 2001B)	6
Figur 2.6:	Terminhandel i praksis (Nord Pool, 2001B).....	8
Figur 3.1:	Variasjon i systempris (Nord Pool, 2001B).....	12
Figur 3.2:	Døgnvariasjon i prisene (Nord Pool, 2001B).....	13
Figur 4.1:	Grunnposisjoner (Nord Pool, 2001B).....	19
Figur 4.2:	Eksempel på et trinomisk tre (Clewlow og Strickland, 2000B).....	22
Figur 5.1:	Stimetoden.....	39
Figur 5.2:	Ulik Δt -metoden.....	40
Figur 5.3:	Volatilitet for dager til levering.....	43
Figur 5.4:	Forventet spotpris generert i treet	44
Figur 5.5:	Forventet spotpris	45

Tabelliste

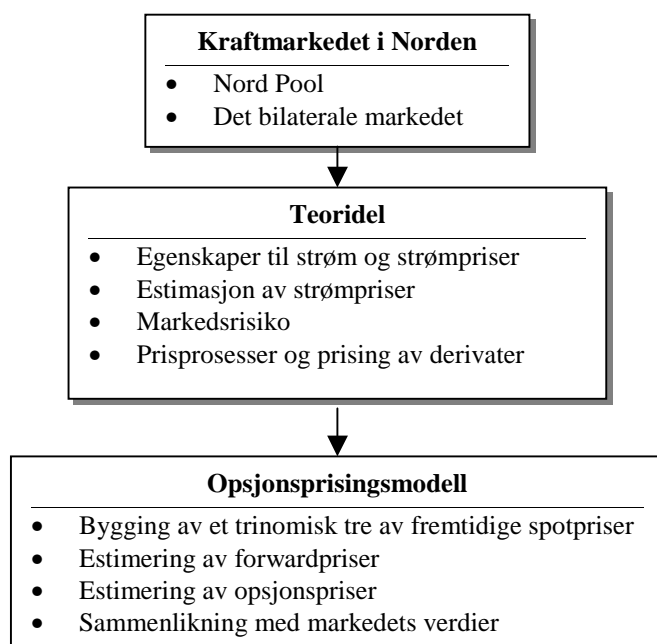
Tabell 2.1:	Anmelding av kjøp/ salg (Wangenstein, 2000).....	5
Tabell 2.2:	Type forwardkontrakter handlet på Nord Pool (Nord Pool, 2001C).....	8
Tabell 5.1:	Opsjonspriser fra modeller og marked (c =pris på call, p =pris på put)	46

1 Innledning

Strukturen i kraftmarkedet har endret seg de siste ti årene fra å være et sterkt regulert markedet styrt av staten, til å være et deregulert marked med stadig flere private aktører hvor det stilles større krav til lønnsomhet. Konkurransesituasjonen har tilspisset seg siden prisene ikke lenger er statlig kontrollerte, men derimot styrt av et åpent marked. Dette har ført til et økt behov for å kunne estimere fremtidige strømpriser, og det har vært en økning i utvikling og bruk av energibaserte finansielle derivater.

Denne prosjektoppgaven har som hovedhensikt å lære og prise kraftderivater. Dette vil bli gjort ved å bygge en opsjonsprisingsmodell for prising av opsjoner med forwardkontrakter som underliggende.

Oppgavens oppbygning er vist i figur 1.1. Rapporten vil innledningsvis gi en innføring i kraftmarkedet på Nord Pool og det bilaterale markedet forøvrig med tanke på organisering og handel av finansielle derivater. Karakteristika til elektrisitet vil bli evaluert med tanke på hvordan strømpriser kan bli estimert. Videre teori om prising av derivater bli forklart som et grunnlag for den opsjonsprisingsmodellen som vil bli utarbeidet. Opsjonsprisingsmodellen vil baseres på en numerisk metode i form av et trinomisk tre for å estimere forventningsverdien til fremtidige spotpriser. Sammenlikning med markedsverdier vil gi et svar på hvor representativ modellen er.



Figur 1.1: Oppgavens oppbygning

2 Kraftmarkedet

Kraftmarkedet i Norden er organisert via kraftbørsen Nord Pool og det bilaterale markedet, kalt OTC- ("Over The Counter") markedet. I dette kapittelet blir kraftmarkedet forklart i forhold til dets aktiviteter og hvordan det er bygget opp, i hovedsak i henhold til handelen på Nord Pool.

2.1 Nord Pool

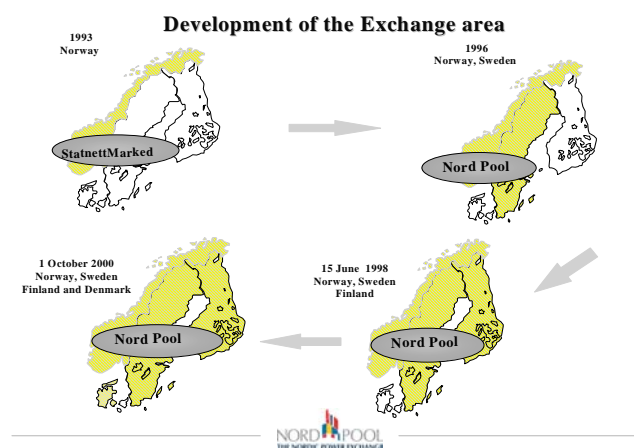
2.1.1 Nord Pools oppgaver

"Nord Pools målsetting er å sørge for at aktørene i kraftmarkedet har en nøytral og uavhengig elbørs, hvor handelen kan forgå på en effektiv og betryggende måte til lavest mulige kostnader." (Nord Pool, 2001)

Nord Pool er en internasjonal og nøytral elektrisitetsbørs. Den er den første i sitt slag i verden og det handles der på to forskjellige markeder; det fysiske og det finansielle. I tillegg til de to nevnte markedene har Nord Pool ytterligere to forretningsområder; Nordic Electricity Clearing (NEC) og Informasjon/ Statistikk – EMIS. Sistnevnte forretningsområde skal ikke behandles i denne rapporten.

2.1.2 Historisk utvikling

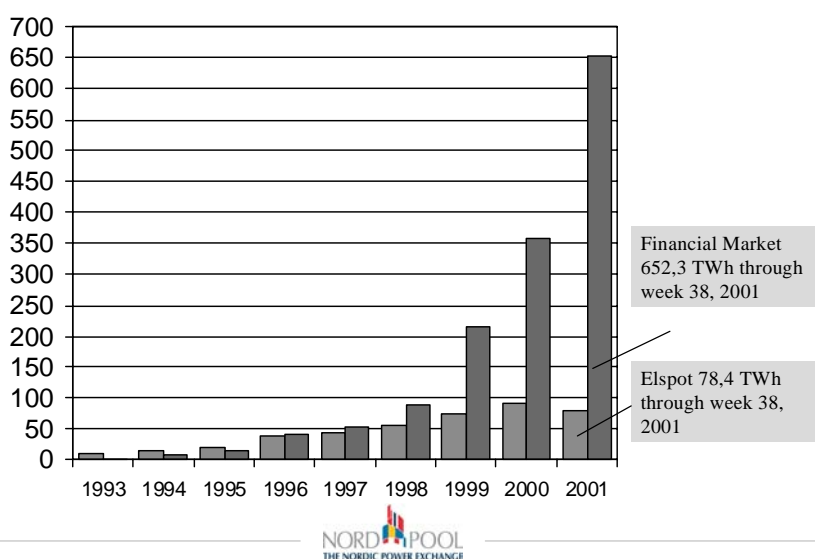
Den statlige enheten Samkjøringen koordinerte produksjonen av kraft i Norge fra 1971 til 1993 (Koekebakker og Ollmar, 2001). I januar 1991 trådte Energiloven i kraft, og den introduserte fri konkurranse med handel av kraft. På grunn av behovet for en nøytral part i slik handel, ble Statnett Marked etablert 1. januar 1993 etter en sammenslåing av Samkjøringen og Statnett SF (Koekebakker og Ollmar, 2001).



Figur 2.1: Historisk utvikling (Nord Pool, 2001B)

Markedet i Sverige åpnet for fri konkurranse på salg av kraft i 1996, og på dette tidspunktet fikk Statnett Marked AS sitt nåværende navn Nord Pool. Videre deregulerte Finland sin handel med elektrisk kraft i 1998. Danmark kom med i to omganger, Jylland/Fyn i 1999 og deretter resten av landet i 2000, vist i figur 2.1. I tillegg til disse partene finnes det også enkelte aktører fra Nederland, England, Tyskland, Frankrike og USA (Nord Pool, 2001B).

Nord Pool eies av det norske systemoperatøren Statnett SF (50%) og den tilsvarende Svenska Kraftnät (50%) i Sverige (Nord Pool, 2001D). Børsen hadde i år 2000 en omsetning på 177 milliarder kroner (Nord Pool, 2001B). Den totale omsetningen på børsen har økt jevnt siden den åpnet i 1993 fra 12,8 TWh kun i det fysiske markedet, til 730.7 TWh ut uke 38 i år 2000 for både det fysiske og finansielle markedet, jfr figur 2.2.

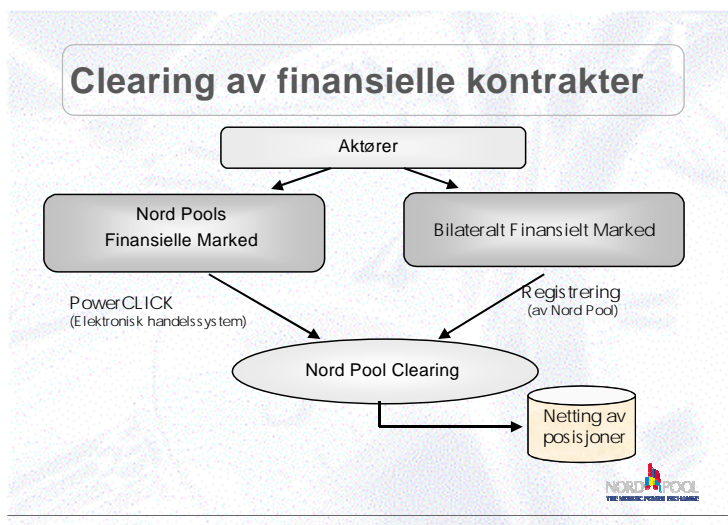


Figur 2.2: Utviklingen på det fysiske og finansielle markedet på Nord Pool 1993-2001 (Nord Pool, 2001B).

2.1.3 Clearing

Nord Pool tilbyr clearing gjennom Nordic Electricity Clearing House (NEC). NEC garanterer korrekt og punktlig clearing av alle handler på Nord Pool (både i det finansielle og i det fysiske markedet) og forøvrig bilaterale kontrakter som anmeldes til clearing. NEC tar på seg motpartsrisiko og reduserer dermed den finansielle risikoen for aktører som handler der. Som juridisk motpart garanterer NEC alltid for

korrekt oppgjør og levering. For å kunne garantere dette krever Nord Pool sikkerhet i form av garantistillelse fra godkjent finansinstitutt og plassering av kontanter på pantsatt bankkonto (Nord Pool, 2001A). Organiseringen av NEC er vist i figur 2.3.



Figur 2.3: Organisering av NEC (Nord Pool, 2001A)

2.1.4 Valuta

På Nord Pool kan aktører selv velge hvilken valuta de ønsker å få oppgjør og handle med. Valutaservice godtar norske kroner, svenske kroner, danske kroner, finske mark eller euro. Valutakurser innhentes fra internasjonale banker for å oppnå en mest mulig rettfærdig kurs (Nord Pool, 2001B).

2.2 Det fysiske markedet på Nord Pool

2.2.1 Anmelding av kjøp og salg

Aktører som handler på det fysiske markedet må ha en forhåndsinngått avtale med Nord Pool, og eksempler her kan være store aktører som Hydro, Statkraft SF, et kraftmeglerfirma, eller f.eks et lite kraftselskap. Siden spotmarkedet er sterkt volatil, brukes dette markedet først og fremst for å dekke toppen av forbruket og/ eller salget.

Den daglige rutinen på det fysiske markedet vises i tabell 2.1. Anmelderne sender før klokken 12.00 inn hvilke kvantum de ønsker å kjøpe eller selge til ulike markedspriser for den kommende dagen. Ut av disse totale kjøp- og salgbudene dannes et markeds kryss mellom tilbud og etterspørsel, som markerer den neste døgns kommende systempris for hver time.

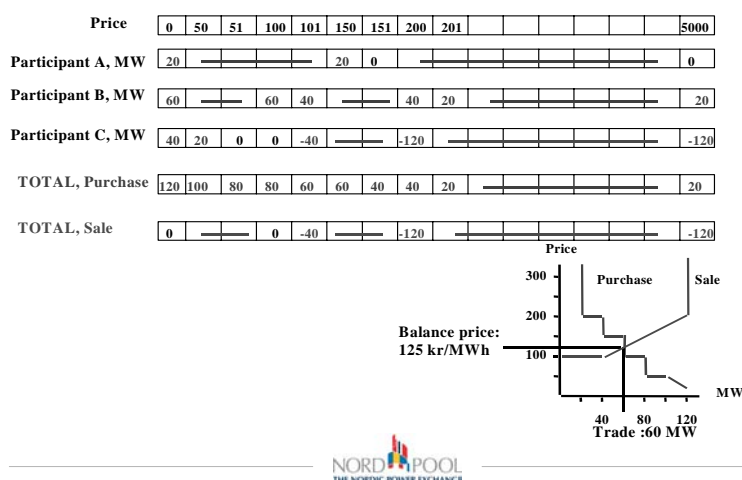
Tabell 2.1: Anmelding av kjøp/ salg (Wangensteen, 2000)

Tidspunkt	Beskrivelse
-12.00	Anmelding kjøp/salg skal mottas fra aktørene.
12.00-13.30	Spotprisen beregnes for hver time kommende døgn. Aktørene får tilbakemelding på egen handel.
13.30-14.00	Reklamasjon for aktørene.
14.00-	Informasjon, blant annet om spotpris, sendes til aktører og andre kunder.

2.2.2 Prisdannelse

For å beregne prisene for hver time må det lages kurver som sier noe om hvordan total etterspørsel og totalt tilbud er. Etterspørselskurven finnes ved å summere alt innmeldt ønsket kjøp til ulike priser, og en slik kurve dannes da for hver eneste time i det kommende døgn.

How purchase and sale graphs are put together



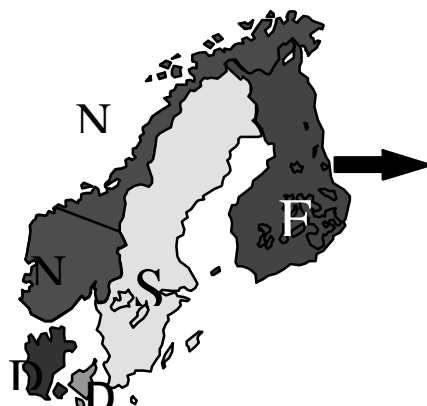
Figur 2.4: Markedskryss (Nord Pool, 2001B)

Kjøpskvantumet behandles som knekkpunkter og ved hjelp av lineær interpolasjon mellom disse dannes en lineær og sammenhengende kurve. Det samme må gjøres for tilbudet og en kurve for det innmeldte salget fremkommer. Skjæringspunktet mellom disse to kurvene fastsetter prisen, angitt i figur 2.4 som et markedskryss. Denne prisen er angitt per MWh og med to desimaler for norske kroner (NOK).

2.2.3 Områder

Alle aktører på børsen er knyttet til et bestemt område i Norden avhengig av geografisk beliggenhet, og f.eks deles Norge normalt opp i tre områder. Anmelderne

må melde sitt kjøp og salg til et bestemt område, avhengig hvor de har tilknytningspunkt i nettet. I hvert område dannes en unik spotpris, på bakgrunn av prosedyren nevnt i kapittel 2.2.2. For Norden som helhet vil det som nevnt beregnes en spotpris, en systempris, som er en referansepris for hele området.



Figur 2.5: Områder for priser på Nord Pool (Nord Pool, 2001B)

Årsaken til ulike priser i de forskjellige områder i Norden skyldes overføringsbegrensninger. Det kan ikke overføres like store mengder kraft som ønsket ved et fritt marked, grunnet begrensninger i kapasiteten i nettet. På grunn av overskudd av elektrisk kraft i et område og underskudd i et annet vil det oppstå flaskehalser, og prisen bli ulik. Spotprisen i overskuddsområdet vil bli lavere enn i underskuddsområdet, mens systemprisen vil ligge et sted mellom disse to (Wangensteen, 2000).

2.3 Det finansielle markedet

2.3.1 Historikk

I 1993 etablerte Nord Pool (den gang Statnett Marked AS) et marked for å handle forwardkontrakter. Dette markedet var basert på et auksjonssystem med fysisk levering av kontrakter. I perioden 1993-1994 ble det ukentlige auksjonssystemet erstattet med et kontinuerlig handelssystem (Nord Pool, 1998). Dette handelssystemet er i dag representert ved et elektronisk datasystem PowerCLICK, og handel over telefon.

På midten av 90-tallet ble markedskontraktene basert på fysisk levering også byttet ut med kraftkontrakter med finansielle oppgjør. Samtidig ble markedet endret fra å være et forwardmarked til også et futuremarked med daglige handelsoppgjør. I 1997 introduserte Nord Pool standardiserte forwardkontrakter, og i 1999 ble opsjoner

innført. Contracts for Difference (CfD) ble introdusert som ny kontrakt i år 2000 (Nord Pool, 1998).

2.3.2 Derivater handlet i det finansielle markedet

De forskjellige type derivater som i dag blir handlet på Nord Pools finansielle marked, er base load futures, base load forwards, opsjoner og CfD. Referanseprisen for det finansielle markedet er systemprisen for det totale nordiske kraftmarkedet, fastsatt i spotmarkedet.

Det er ingen fysisk levering i det finansielle markedet. Finansielle kontrakter blir derfor inngått uten tanke på tekniske begrensninger som flaskehals, nettilgang eller andre tekniske forhold. Oppgjøret blir utført av Nord Pools clearing service mot de individuelle markedsdeltakerne.

Alle derivater handlet på Nord Pool tjener i hovedsak to formål. Kontraktene brukes til risikostyring og prissikring for handleere. I tillegg finnes det spekulanter som tjener på at kraftmarkedet er sterkt volatilt, og disse bidrar også til høy likviditet og aktivitet i krafthandelen.

2.3.2.1 Futures

De futurekontraktene som blir handlet på Nord Pool er enten dagkontrakter, ukeskontrakter, blokkkontrakter opptil 4 uker, eller sesongkontrakter. Disse blokkkontraktene blir splittet opp i uker og ukeskontraktene til dagkontrakter når tiden for oppgjør nærmer seg.

Gevinster og tap gjøres opp daglig på en clearingkonto, og ved sluttoppjøret blir gevinst/tap avregnet mellom spotpris og siste pris på futurekontrakten før leveringsdatoen, se figur 2.6. Ved sluttoppjøret kan futurekontrakten enten innløses finansielt, eller den kan bli brukt som forsikring (hedging) mot det fysiske markedet (Nord Pool, 2001C). Maksimal tidshorisont til levering på futurekontrakter er 8-12 måneder.

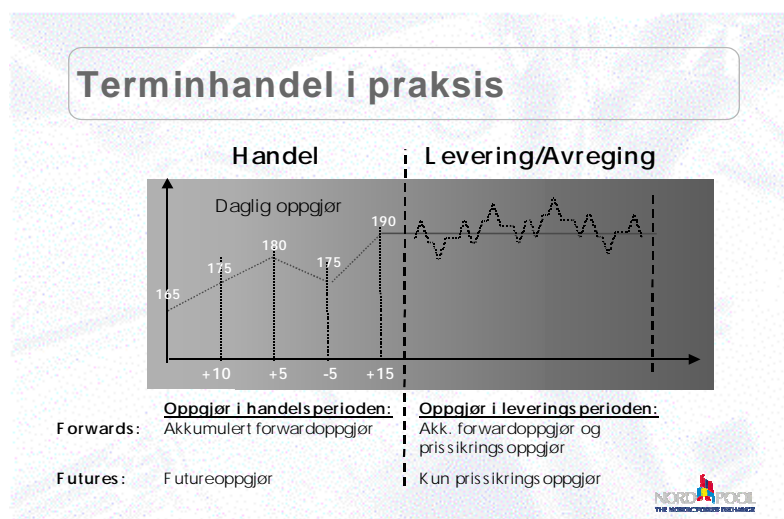
2.3.2.2 Forwards

Forwardkontraktene som handles på Nord Pool er standardiserte kontrakter inndelt i sesonger eller år, se tabell 2.2. Maksimal tidshorisont til levering for handel er fire år på forwards.

Tabell 2.2: Type forwardkontrakter handlet på Nord Pool (Nord Pool, 2001C).

Sesong	Tid
Vinter 1	1. Januar- 30. April
Sommer	1. Mai- 30. September
Vinter 2	1. Oktober- 31. Desember
År	1. Januar- 31. Desember

De årlige kontraktene blir delt inn i sesongkontrakter. I handelsperioden før leveringsdato er det ikke noe reelt daglig oppgjør, men disse blir i stedet akkumulert til sluttoppjøret. Forwardkontrakter krever derfor ikke at partene har clearingkontoer før leveringsdato, da reelt oppgjør begynner og fortsetter utover leveringsperioden. Hovedforskjellen mellom forwards og futures består derfor i oppgjørsmessige ulikheter i kontraktens handelsperiode, vist i figur 2.6.



Figur 2.6: Terminhandel i praksis (Nord Pool, 2001B)

2.3.2.3 Contracts for Difference (CfD)

CfD-kontrakter ble innført for at muliggjøre en perfekt sikring (hedge) i det finansielle markedet. Grunnet tekniske begrensninger i overføringsnettet er virkelig fysisk leveringspris bestemt ved geografisk beliggenhet/område, og ikke systemprisen fastsatt i spotmarkedet. Det er derfor sjelden mulig å gjøre en perfekt sikring (hedge) ved kun å bruke forward- eller futurekontrakter, da minimal risiko alltid vil være differensen mellom områdepris og systempris.

CfD er en type forwardkontrakt, og markedsprisen til en CfD-kontrakt reflekterer markedets antakelse om prisforskjellen mellom systempris og områdepris. CfD-kontraktene har positive priser når en spesifikk områdepris antas å bli høyere enn spotprisen fastsatt på Nord Pool, og vice versa. For å gjøre en perfekt sikring kan man kjøpe ønsket volum via forward, og deretter sikre prisforskjeller for samme periode og volum ved i tillegg å bruke en CfD-kontrakt (Nord Pool, 2001C).

2.3.2.4 Opsjoner

På Nord Pool handles kun standardiserte europeiske opsjoner med forwardkontrakter som underliggende medium. Disse opsjonene er standardiserte med hensyn til identitet, mengde, løpetid og innløsningspris. Oppgjørsgdato blir satt til hver tredje torsdag i måneden før levering starter, og kontraktstørrelsen på den underliggende terminkontrakten er 1 MW. Profitten på disse opsjonene blir fastgjort dagen etter opsjonen blir innløst, og denne avhenger av prisen på de underliggende forwardkontraktene, ”strike” prisen og premien som er betalt.

Elopsjoner er et viktig instrument for risikostyring og budsjettering. Opsjoner kan brukes til å sikre en kraftportefølje mot kursfall, eller for å øke avkastningen til en portefølje (Nord Pool, 1999A). Opsjonstrategier kan være nyttig hvis markedet er høyt volatil. Et eksempel her kan være en ”straddle” som består av å kombinere en put og en call opsjon. Se kapittel 4 for mer teori om opsjoner.

2.4 OTC-markedet

OTC-markedet kalles også det bilaterale markedet og her omsettes bilaterale kontrakter som er inngått direkte mellom to avtaleparter. Det betyr at i tillegg til Nord Pool som børs, finnes det et omfattende OTC-marked der det omsettes både fysiske og finansielle kraftkontrakter. Dette markedet er volumessig flere ganger større enn børsen.

Markedsaktørene i det bilaterale markedet kan være både produsenter, distributører, forhandlere og større sluttforbrukere. Dette markedet er meglerbasert og det betyr at de fleste kontraktene går via og sluttes ved hjelp av en megler. Et eksempel på et slikt firma er CBF Energimegling.

I OTC- markedet omsettes både kontrakter og opsjoner. Opsjonskontraktene som omsettes kan være både europeiske, amerikanske og asiatiske. Forskjellen fra den standardiserte europeiske opsjonen på Nord Pool og disse to sistnevnte, er på hvilket tidspunkt det må bestemmes om opsjonen skal benyttes eller ikke.

3 Empiriske egenskaper til strømprisene

I dette kapitlet vil de egenskaper til strøm undersøkes som gjør at strømpriser får en annen karakteristik enn generelle priser i aksjemarkedet. Eksisterende modeller av finansielle derivater som gjelder prisprosesser eller generering av fremtidige priser i aksjemarkedet, vil være misvisende ved direkte bruk på strømprisene grunnet deres karakteristik (Knittel og Roberts, 2001). De spesielle egenskapene til elektrisitet kan følgelig føre til en utfordring for risikostyring og valg av modell rundt handel med elektrisk kraft (Deng, Johnson og Sogomonian, 2001).

3.1 Strøm kan ikke lagres

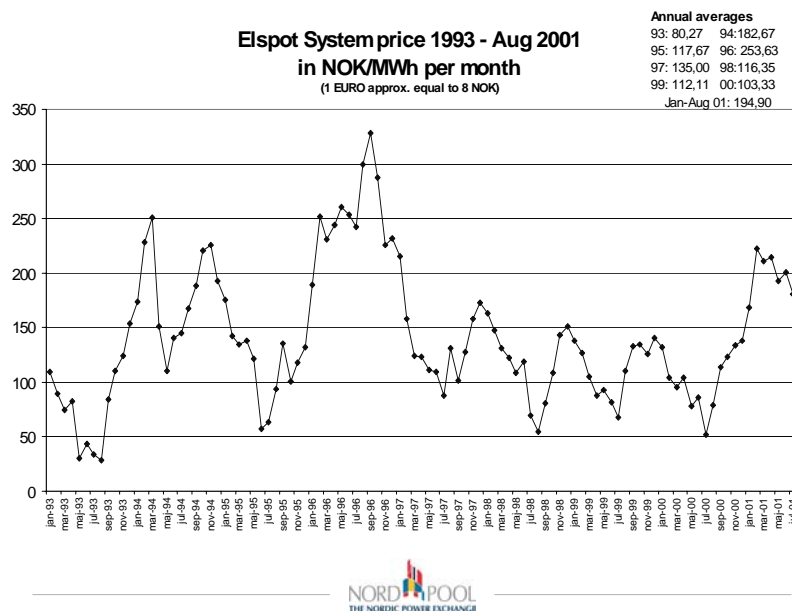
Elektrisitet kan ikke lagres og det må derfor brukes idet det produseres. Det er ikke mulig for en aktør å kjøpe opp denne varen, lagre den for så å selge den på et senere tidspunkt for en pris høyere enn det den var kjøpt for. Tradisjonelle modeller som vektlegger slik varearbitrasje og "cost of carry" er derfor feilaktig til å kartlegge verdien av strøm.

Siden strøm ikke kan lagres, vil det i utgangspunktet ikke være noen eierfordel ("convenience yield") knyttet til dette produktet. Eierfordel kan likevel diskuteres i denne sammenheng med tanke på drivstoffet til anleggene som produserer strømmen. Når det gjelder produksjon av vannkraft kan det f.eks være mer lønnsomt å vente med å tappe magasinene i stedet for å bruke det i dag, da strømprisen mulig kan øke. Vannverdiberegninger med tanke på tilsig, kapasitet i magasinene og magasininnhold kan derfor være interessant å undersøke med tanke på "verdien av lagring".

3.2 Variasjon i systemprisene

Elektrisitet levert på forskjellig tidspunkt kan ansees som forskjellige produkt, grunnet at strøm ikke kan lagres (Lucia og Schwartz, 2001). Prisen er avhengig av etterspørsel og tilbud på ulike tidspunkt, styrt av betingelsesfaktorer som f.eks aktivitetsnivå og værforhold i Norge. Dette gir variasjon i prisene. Figur 3.1 viser slike svingninger i spotprisen på årsbasis.

Et særtrekk ved variasjonen i prisene er at de endres systematisk både når det gjelder sesong, uke og døgn. Dette gir en viss forutsigbarhet hva angår prisen på ulike tidspunkt. Ved prising av derivater som er basert på forventningsverdier på spot på et fremtidig tidspunkt, bør denne forutsigbarheten tas i betraktning (Lucia og Schwartz, 2001).

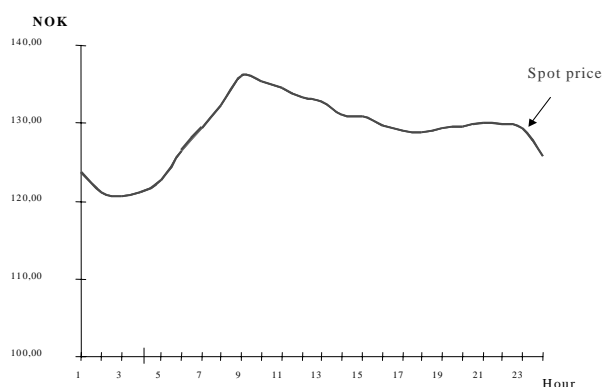


Figur 3.1: Variasjon i systempris (Nord Pool, 2001B)

Prisene i det nordiske systemet varierer med en viss kontinuitet, vist av figur 3.1. Med dette menes at prisene over året endres med en viss takt og parallelt med tidligere år. Det er for eksempel innad i hvert år lavere priser i mai og juni enn på vinterstid. Dette skyldes at det meste av tilsiget kommer om våren og tildels om sommeren. Siden det ikke er nok magasinkapasitet til å lagre alt vannet om sommeren, må mange produsere høyt på denne tiden av året. Dette presser prisene nedover på denne tiden av året, da også etterspørselen vanligvis er lav.

På vinterstid blir ikke vann frigjort på grunn av at nedbør kommer og blir liggende i form av snø. Den ønskede produksjonen vil følgelig synke. Det er også et større oppvarmingsbehov og behov for mer strøm til belysning om vinteren grunnet at dagene er kortere. På grunn av dette vil prisen bli høyere på denne tiden av året med økt etterspørsel og lavere tilbud. I perioden 1993-1997 var gjennomsnittet av systemprisen, maksimumspris og minimumspris høyere om vinteren enn om sommeren.

Det finnes også en viss forutsigbarhet for prisene innad i hver uke og hvert døgn. Det er et høyere forbruk av strøm i helgene i forhold til ukedagene. Variasjonen i hverdagen skyldes variasjon i forbruket. Figur 3.2 viser at om morgenen rundt 7-9 er prisene høye, grunnet et større behov for bl. a oppvarming enn om midt på natten. Utover dagen går prisen noe ned og mot ettermiddagen, da arbeidstid er over, øker prisene igjen på grunn av økt forbruk ved middagslaging og andre aktiviteter i hjemmet.



Figur 3.2: Døgnvariasjon i prisene (Nord Pool, 2001B)

3.3 Ekstrempriser

Ekstrempriser skjer relativt hyppig i det finansielle markedet. For en Gaussisk normalfordeling er kurtoisiskoeffisienten lik 3. Siden kurtosis koeffisienten var 3.5 mellom 1993 og 1999 for systemprisen (Lucia og Schwartz, 2001), betyr det at sannsynligheten for ekstrempriser er større enn for en normalfordeling med samme varians. Dette fører til at Gaussiske modeller har liten sannsynlighet for korrekt å representere prosessen til prisene, da det er liten sannsynlighet for at disse kan generere slike store prisendringer.

Ifølge Lucia og Schwartz (2001) er "skewness" (skjevhet i fordelingen) positiv, hvilket betyr at det er større sannsynlighet for høye ekstremverdier for prisen enn lave. Knittel og Roberts (2001) uttrykker i tillegg en invers "leverage effect", dvs at ved uforventet økning i etterspørselen øker volatiliteten mer enn ved uforventet fall i etterspørselen.

Spotprisene kan ha relativt store sprang. Tilbudskurven genererer sprang i priser som resultat av sprang i etterspørselen som følge av f.eks temperaturendringer (Lucia og Schwartz, 2001). Prisene faller raskt tilbake til normalt nivå, og dette gir såkalte ”spikes”. Slike spikes er hyppigere i termisk baserte system som f.eks i Wales i England enn i vannkraftbaserte system grunnet et effektdimensjonert system (Herguera, 2001). Ifølge Knittel og Roberts (2001) er sannsynligheten for slike hopp større når nettet nærmer seg full belastning, dvs i perioder med høy etterspørsel. Knittel og Roberts (2001) uttrykker også at sprang ikke kun er tilfeldig, grunnet at høy etterspørsel ofte kan forutsees.

3.4 Volatilitet

Høy volatilitet er en annen egenskap som kjennetegner spotprisene. Ifølge Fleten, Tomasgard og Wallace (2001) er kraftprisene meget volatile som følge av at den må brukes idet den produseres og fordi etterspørselen ikke er særlig priselastisk på kort sikt. Lucia og Schwartz (2001) hevder at annualisert volatilitet for spot kan være 189%. Volatilitet har tradisjonelt sett blitt definert som standardavviket til avkastningen på prisene. En modell for volatiliteten i kraftmarkedet er gitt i kapittel 4.1.

En prosess med konstant volatilitet kalles homoskedastisk, mens en prosess der volatiliteten endres med tiden kalles heteroskedastisk. Prisvolatiliteten er ikke konstant over tid, den er stokastisk og sesongbasert (Knittel og Roberts, 2001). Det betyr at det også er et snev av forutsigbarhet i volatiliteten til strømprisene.

Ifølge hypotesen til Samuelson øker volatiliteten til forwardpriser når forwardkontrakten nærmer seg innløsning (Clewlow og Strickland, 2000A). Dette skyldes at mer informasjon blir tilgjengelig når leveringsperioden til forwardkontrakten nærmer seg, og dette resulterer i mer handel som videre medfører større flyktighet (Clewlow og Strickland, 2000A).

3.5 Mean reversion

Ifølge Knittel og Roberts (2001) viser strømpriser en sterk trend til ”mean reversion” i motsetning til prisen på aksjer. Mean reversion betyr at med en gitt drifrate er det en sannsynlighet for at strømprisen vil ha tilbakegang til et gitt likevektsnivå ved innfall av ekstremverdier. Dersom det stokastiske leddet ”dytter” variabelen som analyseres

ut av likevekt, vil det deterministiske leddet gjøre at variabelen gradvis kommer tilbake til sitt forventede likevektsnivå (Pilpovic, 1998).

Desto større verdien på hastigheten til mean reversion er, desto større er sannsynligheten for at variabelen vil gå raskere tilbake til likevektsnivået. Denne prosessen er angitt i kapittel 5.1.2. Tilbakegangsnivået er varierende over tid i et systematisk mønster. En gitt forwardkurve vil uttrykke en risikofri forventning til spot på et fremtidig tidspunkt, og vil derfor være et uttrykk for tilbakegangsnivået ved en mean reversion prosess.

3.6 Estimering av fremtidige strømpriser

Teknisk eller fundamental analyse kan brukes for å estimere fremtidige strømpriser. Teknisk analyse går ut på å undersøke historiske priser og prognoser, og med utgangspunkt i dette foreslå fremtidige utfall av strømprisene. Fundamental analyse derimot er baseres på faktorer som vær, temperatur, magasininnhold, naturressurser, virkningsgrad, politiske faktorer, og fremtidsutsikter med tanke på alternative energikilder.

3.6.1 Tekniske modeller

Ved å ta i bruk tekniske modeller som f.eks Samkjøringsmodellen, utviklet av Sintef Energiforskning, kan det gjøres markedsanalyse. Typisk for denne modellen er at den tar i bruk produksjons- og overføringsmuligheter, brenselpriser, og tilsigsforhold for å estimere forventningsverdien til fremtidige spotpriser. Ulempen med tekniske modeller som Samkjøringsmodellen er at de ikke fanger opp markedets verdisetting av fremtidig kraftlevering (Fleten et al, 2001).

3.6.2 Forwardkurven representerer risikonøytral forventning

Markedsprisen på risiko eller risikopremie er forskjellen mellom den forventede prisen på en vare ved et tidspunkt, t , i fremtiden og prisen på en forwardkontrakt med denne varen som underliggende på tidspunkt, t . I kraftbransjen er risikopremie forskjellen i forventet spotpris og den markedsbestemte prisen på en kontrakt med elektrisitet som underliggende medium.

Ved estimering av fremtidige spotpriser må markedsprisen på risiko tas i betraktning ved at markedsaktørens forventning om framtidige systempriser blir lagt til grunn.

Det betyr at generelle prosedyrer som genererer fremtidige spotpriser bør tilpasses forwardkurven, da denne representerer en risikonøytral forventning til spot i fremtiden.

En gitt forwardkurve har en topp og en dal for hvert år, i samsvar med karakteristikken til systemprisen. Dette viser at forutsigbarhet er involvert ved dannelse av denne kurven, dvs ved evaluering av verdien på spot på et fremtidig tidspunkt.

3.6.3 Markedsrisiko

Wangesteen (2001) klassifiserer flere typer risiko i kraftmarkedet: politisk, juridisk, teknisk risiko og markedsrisiko. Det er først og fremst markedsrisiko som vil bli vektlagt i denne rapporten, da den influerer datagrunnlaget i modellen som vil bli bygget.

Markedsrisiko er knyttet til prisendringer som følge av tilbud og etterspørsel. Tilbudet er bl.a gitt av produksjonsanlegg, tilsig, overførings- og importmuligheter. Etterspørselen er gitt av bl. a industri, daglengde, elektriske installasjoner, temperatur eller værforhold og eksportmuligheter.

Det er flere typer markedsrisiko: prisrisiko, mengderisiko, motpartsrisiko og likviditetsrisiko. Mengderisikoen er knyttet til tilsig og temperaturavhengig forbruk. Motpartsrisikoen som skyldes usikkerhet hos leverandør eller betaler, kan elimineres ved å handle via NEC. Risiko for likviditet refererer til at det kan være vanskelig å få solgt eller kjøpt f.eks kontrakter i markedet.

4 Prisprosesser og prising av derivater

Derivater er finansielle instrumenter som har verdi avhengig av verdien på det underliggende medium. Eksempler på slike instrumenter er future- og forwardkontrakter, opsjoner og swaps, og disse kan bli handlet enten på en organisert børs eller i det bilaterale markedet (OTC-markedet). Handel med derivater gjør det mulig å forta spekulasjon, risikostyring og arbitrasje. I kraftmarkedet brukes slike derivater for å risikostyre en portefølje ved å minke risikoen knyttet til f.eks usikkerhet i tilsig og variasjon i strømprisene.

4.1 Prosessen til spotprisene

4.1.1 Geometric Brownian Motion

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad \text{likning 4.1}$$

Likning 4.1 er referert til som “Geometric Brownian Motion” (GBM), og dette gjengir en stokastisk prosess der prisene følger en såkalt ”random walk” (Schwartz og Smith, 2000). Denne likningen er den prisprosessmodellen som ligger til grunn for ”Black-Scholes”- formelen for prising av opsjoner. Black-Scholes vil bli nærmere utdypet i kapittel 4.4.

ΔS i likning 4.1 er økningen i spotprisen S i et lite tidsintervall Δt . ε er et tilfeldig tall fra en standardisert normalfordeling. μ er forventet avkastning per tidsenhet, og σ er volatiliteten til spotprisen. Venstre side av likning 4.1 angir avkastning i perioden Δt . Leddet $\mu \Delta t$ angir forventningsverdien til denne avkastningen, og leddet $\sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$ angir den stokastiske komponenten til avkastningen i spotmarkedet. Leddet $\varepsilon \sqrt{\Delta t}$ kan uttrykkes ved Δz , og z følger en Wienerprosess, som har driftrate lik null og variansrate lik 1.0. Endringene i Δz er uavhengig av hverandre.

Likning 4.1 følger en normalfordeling med gjennomsnitt $\mu \Delta t$ og standardavvik $\sigma \sqrt{\Delta t}$, dvs:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi [\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t}] \quad \text{likning 4.2}$$

4.1.2 Ohrnstein-Uhlenbeck

Ifølge Knittel og Roberts (2001) er den geometriske prosessen angitt i likning 4.1 lite egnet på strømpriser. Dette skyldes at forutsigbarheten i prisene ikke er inkludert i likningen. En modell Knittel og Roberts foreslår er Ohrnstein-Uhlenbeck prosessen. Dette er en kontinuerlig tidsmodell og denne er gitt av likning 4.3:

$$dp(t) = \kappa[\mu - p(t)] dt + \sigma db(t) \quad \text{likning 4.3}$$

$p(t)$ er prisen på strøm, κ , μ , σ er ukjente parametre og $b(t)$ er "Standard Brownian Motion" (Knittel og Roberts, 2001). Hensikten med denne modellen er at avvik av prisen fra likevektsnivå, $[\mu - p(t)]$, er korrigert med rate κ og tilfeldighet representert ved $\sigma db(t)$. Leddet $[\mu - p(t)]$ representerer dermed mean reversion for prisprosessen.

Schwartz og Smith (2000) innfører en korttids/langtids modell, dvs en tofaktormodell som tillater mean reversion på kort sikt og usikkerhet i likevektsnivået som prisene kommer tilbake til på lang sikt. Disse uttrykker at en slik tofaktormodell gir et mer representativt bilde på spotprisprosessen enn likning 4.1 og 4.3 alene.

4.2 Terminer og prising av terminer på kraft

En forward- eller futurekontrakt er en avtale om å kjøpe eller selge en vare i fremtiden til en gitt pris. Kontraktprisen vil være lik leveringsprisen når kontrakten inngås, men mest sannsynlig vil leveringsprisen avvike fra spotprisen på leveringstidspunktet.

Generelt sett i aksjemarkedet har forward- eller futureprisen, F_0 , i en risikofri verden vært gitt ved:

$$F_0 = S_0 e^{rT} \quad \text{likning 4.4}$$

dersom man ser bortifra inntekt og utbytte, der S_0 er spotprisen i dag, r er risikofri rente og T er perioden frem til innløsning. Siden elektrisitet ikke kan lagres vil det ikke være mulig å gjøre varearbitrasje, dvs ulikhet i likning 4.4.

Verdien f på en inngått forwardkontrakt i kraftmarkedet er gitt ved:

$$f = (S_T - K) e^{-rT} \quad \text{likning 4.5}$$

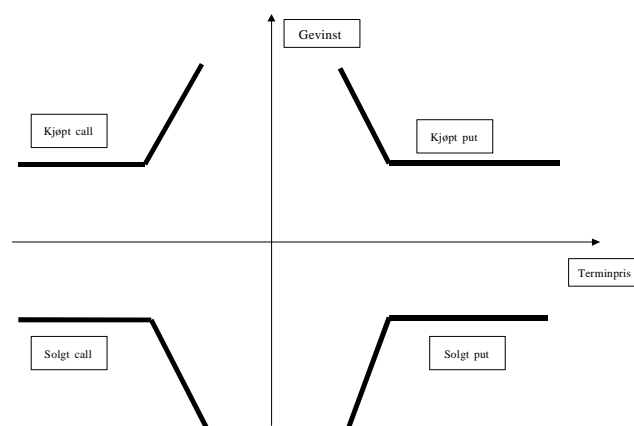
der K er leveringsprisen på forwardkontrakten og S_T er spotpris på tidspunkt T .

Forskjellen mellom en forward og en future kontrakter kan i hovedsak sees utifra markedsoppkjøret, og dette er beskrevet nærmere i kapitlet om Nord Pool. Siden oppkjøret mellom disse to kontraktene er forskjellige, vil rentenivået være av betydning. Dette gjenspeiles i selve prisen på forward og futurekontrakter.

Prisen på en forward- eller en futurekontrakt vil ligge under forventet spotpris på innløsningsstidspunktet dersom risikostyrerne holder en "short position" og spekulantene holder en "long position" (Hull, 2000). Dersom det omvendte er tilfellet, vil prisen på future kontrakten ligge over forventet spotpris, referert til som "contango". I kraftmarkedet skjer dette dersom spekulantene er villige til å selge kontrakter til f.eks kraftselskap som er interessert i å kjøpe disse. Grunnen til at forward- og futureprisen avviker fra forventet spotpris, er at spekulantene krever kompensasjon for den risikoen de tar, mens risikostyrerne ønsker å redusere sin risiko og må derfor betale for dette.

4.3 Opsjoner og prising av opsjoner

En opsjon er en rettighet, men ikke plikt til å kjøpe eller selge en vare til en fastsatt pris innen eller på et bestemt tidspunkt i framtiden. Opsjoner kan gjelde for f.eks terminer, aksjer, eller indekser. Opsjoner på å selge (put opsjoner) eller opsjoner på å kjøpe (call opsjoner) kan enten selges eller kjøpes (short/ long).



Figur 4.1: Grunnposisjoner (Nord Pool, 2001B)

Verdien på en europeisk call opsjon, c , og en europeisk put opsjon, p , på innløsningsstidspunktet er gitt ved:

$$c = \max(S_0 - Xe^{-rT}, 0) \quad \text{likning 4.6}$$

$$p = \max(Xe^{-rT} - S_0, 0) \quad \text{likning 4.7}$$

der S_0 f.eks kan være forwardprisen ved forfall og X er strike prisen, r er risikofri rente og T er tiden til innløsning.

Opsjoner er "in the money" hvis innløsning av opsjonen medfører et positivt kontantoppgjør for holderen av opsjonen, "at the money" hvis innløsning av opsjonen ikke fører til noen kontantstrøm, eller "out of the money" hvis holderen hadde mottatt en negativ kontantstrøm hvis opsjonen hadde blitt innløst.

4.3.1 Black-Scholes

Black-Scholes er en formel som brukes til å prise opsjoner. På Nord Pool brukes en versjon av denne formelen, kalt "Black76" for prising av europeiske opsjoner med en forwardkontrakt som underliggende. Formelen for Black76 er gitt ved (Nord Pool, 2001B):

$$Call_{B-76} = e^{-repo \Delta t} * (Pris * 100 * N(D_1) - Strike * 100 * N(D_2)) \quad \text{likning 4.8}$$

$$Put_{B-76} = e^{-repo \Delta t} * (-Pris * 100 * N(-D_1) + Strike * 100 * N(-D_2)) \quad \text{likning 4.9}$$

$$D_1 = \frac{\ln\left(\frac{pris}{strike}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) * \Delta t}{\sigma * \sqrt{\Delta t}} \quad \text{likning 4.10}$$

$$D_2 = D_1 - \sigma * \sqrt{\Delta t} \quad \text{likning 4.11}$$

der N er normalfordeling, $repo$ er rente.

4.3.1.1 Generelle antakelser for Black-Scholes

- Spotprisene følger prosessen beskrevet i likning 4.1 med μ og σ konstant.
- Short salg er tillatt, dvs at det er mulig å selge "noe" man ikke har.
- Ingen transaksjonskostnader eller skattebetingelser.

- Ingen dividende på derivatet.
- Ingen mulighet for å gjøre arbitrasje.
- Handelen foregår kontinuerlig.
- Den risikofrie renten er konstant og lik for alle forfall.

4.3.1.2 Input- parametere til Black-Scholes

Black-Scholes formelen brukes til å prise opsjoner, og variablene den inneholder dersom underliggende er en forwardkontrakt er:

- Forwardpris ved opsjonens forfall
- Strike pris, dvs fastsatt innløsningspris
- Tid til forfall
- Volatilitet
- Risikofri rente

Black-Scholes inneholder ikke forventningsverdien μ , og modellen baseres derfor på risikonøytral verdsetting.

4.3.2 Numeriske teknikker for prising av opsjoner

Dette kapittelet vil konsentrere seg om trær som verktøy for å verdsette derivater, og skal være et utgangspunkt for forståelsen av opsjonsprisindemodellen som vil bli utarbeidet i kapittel 5. Andre numeriske metoder som f.eks Monte Carlo-simulering vil ikke bli drøftet da dette ikke vil bli tatt i bruk senere i oppgaven.

Et trinomisk tre vil bli brukt, da dette gir en bedre tilnærming enn et binomisk tre til en kontinuerlig prisprosess. I tillegg vil det trinomiske treet være enklere å jobbe med da det er mer fleksibelt og passer bedre til markedspriser på forwards og standardiserte opsjoner. Se kapittel 5.1.3 for forklaring av trestørrelse.

Den stokastiske differentiallikningen for en risikonøytral GBM-modell er gitt i likning 4.12, der driften er byttet ut med risikofri rente minus convenience yield.

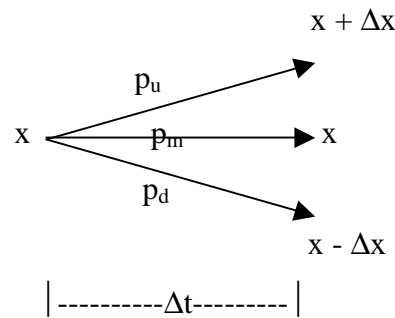
Likning 4.13 angir samme prosess der $x = \ln S$, dvs den naturlige logaritmen til spotprisen. Ved omforming av likning 4.12 til 4.13 settes $\nu = r - \delta - 0.5\sigma^2$, og $vd t$ angir forventningsverdien til dx (Clewlow og Strickland, 2000A).

$$dS = (r - \delta)Sdt + \sigma Sdz$$

likning 4.12

$$dx = vdt + \sigma dz \quad \text{likning 4.13}$$

Figur 4.2 angir en modell som viser at i et lite tidsintervall Δt , kan x stige med Δx , være den samme, eller synke Δx , med sannsynligheter p_u , p_m og p_d . Ifølge Clewlow and Strickland (2000A) er et godt valg for $\Delta x = \sigma\sqrt{3\Delta t}$.



Figur 4.2: Eksempel på et trinomisk tre (Clewlow og Strickland, 2000B).

For å finne sannsynlighetene i treet i figur 4.2 benyttes likningene:

$$E(\Delta x) = p_u(\Delta x) + p_m(0) + p_d(-\Delta x) = v\Delta t \quad \text{likning 4.14}$$

$$E(\Delta x^2) = p_u(\Delta x^2) + p_m(0) + p_d(\Delta x^2) = \sigma^2\Delta t + v^2\Delta t \quad \text{likning 4.15}$$

$$p_u + p_m + p_d = 1 \quad \text{likning 4.16}$$

der likning 4.15 fremkomme ved å kvadrere Δx . Disse sannsynlighetene er angitt i likning 4.17 til 4.19:

$$p_u = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2\Delta t + v^2\Delta t^2}{\Delta x^2} + \frac{v\Delta t}{\Delta x} \right) \quad \text{likning 4.17}$$

$$p_m = 1 - \frac{\sigma^2\Delta t + v^2\Delta t^2}{\Delta x^2} \quad \text{likning 4.18}$$

$$p_d = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2\Delta t + v^2\Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{v\Delta t}{\Delta x} \right) \quad \text{likning 4.19}$$

der i er horisontal parameter med Δt som tidsintervall, og j er vertikal parameter som beskriver mulige utfall av spotprisen, her representert ved x , for hvert gitte tidsintervall. S_{ij} representerer derfor et mulig spotprisutfall på et gitt tidspunkt, der S_{ij} er gitt ved $S_0 * e^{j\Delta x}$ (Clewlow og Strickland, 2000A).

Verdien C_{ij} på en *europaisk* opsjon i en node (i,j) er gitt ved:

$$C_{ij} = e^{-r\Delta t} (p_u C_{i+1,j+1} + p_m C_{i+1,j} + p_d C_{i+1,j-1}) \quad \text{likning 4.20}$$

der verdien på *call* opsjonen ved forfall er gitt ved:

$$C_{Nj} = \text{maks} [0, S_{Nj} - K] \quad \text{likning 4.21}$$

der N er antallet av Δt som gir tiden frem til forfall, og K er strike pris (Clewlow og Strickland, 2000A).

5 Metode

5.1 Innledning

Dette kapittelet beskriver en metode som kan brukes til å estimere priser på opsjoner eller lignende kontrakter. Metoden skal i dette prosjektet brukes til å verdsette en europeisk opsjon med forward som underliggende. For å beregne prisen på denne forwardkontrakten vil fremtidige spotpriser bli estimert ved å bruke en numerisk metode. Alle beregninger som må gjennomføres for å komme frem til opsjonsprisene vil bli gjort i regneprogrammet Excel, og forklaring på regnearket finnes i vedlegg E.

Sammenligning mellom estimert opsjonspris på denne forwardkontrakten og markedets opsjonspris vil være et grunnlag for å vurdere hvor representativ modellen er for verdsetting av derivater, basert på datagrunnlaget modellen er bygget på. Det bør nevnes at modellen som skal brukes i denne oppgaven tar hensyn til flere karakteristika til strømpriser enn Black76 som generer opsjonsprisene hentet på Nord Pool. Det resulterer i at resultatene fra modellen nødvendigvis ikke skal sammenfalle med markedsverdier, men heller prøve å gi mer korrekte verdier på kraftderivatene.

5.1.1 Valg av derivat

I dette prosjektet velges kun én analysedato, da hensikten med oppgaven blant annet er å lære metoder for å prise derivater og ikke generalisere selve modellen. Det vil derfor ikke være hensiktsmessig å bruke prosessen på flere analysedatoer. Denne datoen er satt til 03.10.2001 og forfall på opsjonen som blir brukt som sammenligningsgrunnlag er satt til 20.12.2001. Leveringsperioden for denne forwardkontrakten er valgt til perioden vinter 1 år 2002, det vil si de første 120 dagene av år 2002 fra januar og ut april. Forfallet samt leveringsperioden, er gitt av standardiserte opsjoner på Nord Pool, da det ønskes at modellens resultater skal kunne sammenlignes med markedsdata. Disse datoene ble også valgt på bakgrunn av at nærhet i tid var ønsket.

5.1.2 Type modell

For å estimere fremtidige spotpriser vil det i denne rapporten bli brukt en modell fra Clewlow og Strickland (1999). Denne modellen tar utgangspunkt i gitte kontinuerlige forwardkurver, risikofri rente og risikonøytrale sannsynligheter, og diskretiserer fremtidige utfall i form av et trinomisk tre.

Modellen beskrevet i Clewlow og Strickland (1999) er en enfaktormodell. Dette ansees som mest hensiktsmessig i dette prosjektet, da en slik modell er enklere enn f.eks. en tofaktormodell. Fordelen med en tofaktormodell derimot er at den gir et mer realistiske bilde på den virkelige prosessen til prisene. En enfaktormodell inneholder kun en usikker variabel som kan være representert av mean reversion, mens i en tofaktormodell legges det til ytterligere en stokastisk faktor, som f.eks kan være representert av usikkerhet i likevekten for pris på lang sikt (Schwartz og Smith, 2000). Med likevekt menes det nivå prisen faller tilbake til ved mean reversion.

Disse usikre faktorene er ikke direkte observerbare, men de kan bli estimert (over tid) ut i fra spot og futurepriser, hvis det finnes futurekontrakter med lang tid til levering. For å få informasjon om komponenten for variasjon på korttid, kan forskjellen mellom priser på korttids- og langtidskontrakter studeres. Når det gjelder variasjonen på lang tid, kan informasjon oppnås ved å se på bevegelse i priser på langtidskontrakter. Hvis det ikke finnes futurekontrakter med lang tid til levering, må nivået på disse faktorene estimeres på annen måte (Schwartz og Smith, 2000), f.eks med likevektsmodeller.

Et viktig kjennetegn ved en tofaktormodell er videre at endringer på prisen på futurekontrakter med ulik modenhet ikke har perfekt korrelasjon, som er tilfellet for alle enfaktormodeller (Schwartz og Lucia, 2001). Det vil si at prisen på futurekontrakter med ulik modningstid ikke trenger å bevege seg i takt med hverandre.

5.1.3 Form på treet

Et trinomisk tre brukes framfor et tre med kun to utfall, da flere utfall gir bedre tilnærming av den kontinuerlige prisprosessen. Samtidig er et slikt tre enklere å arbeide med på bakgrunn av det passer lettere inn et rutenett og dessuten er det mer fleksibelt, slik at det enklere kan tilpasses markedspriser på forward eller opsjoner enn binomiske trær (Clewlow og Strickland, 2000A).

At valget falt på kun 3 utfall per node kan også forklares ut i fra ønsket om å ikke gjøre arbeidet for komplisert. Høyland og Wallace (2001) hevder at å representere en kontinuerlig prosess med et stort antall diskret utfall, kan utregningen bli vanskelig

fordi modellen enten eksplisitt eller implisitt krever integrasjon over disse variablene. Et stort antall utfall vil derfor føre til at en manuell konstruksjon av treet vil bli tungvint (Høyland og Wallace, 2001). Dette oppmuntrer til et begrenset antall utfall, da dette gir mulighet for at tregenereringen kan gjøres manuelt. Valget av antall grener er da en avveining mellom mengden på arbeidet og en best mulig tilnærming til den kontinuerlige prosessen.

5.1.4 Prosedyren for å bygge et trinomisk tre

Bruk av trinomiske trær for pricing av europeiske opsjoner vil i praksis deles opp i to deler med flere steg.

Del A:

- 1 Bygging av initielt tre der prisen i hver node er basert på $x(t) = \ln S(t)$, og x i startnoden = 0.
- 2 Justering av initielt tre basert på en justeringsfaktor a_i .

Del B:

- 1 Estimering av forventet (betinget) forwardpris ved opsjonens forfall basert på tilbakeregning i treet.
- 2 Estimering av opsjonspris basert på flere strikepriser og flere forwardpriser.

5.2 Teori, grunnlag for modell

5.2.1 Implisert forwardkurve

Den stokastiske differentiallikningen for forwardkurven gitt i rapporten til Clewlow and Strickland (1999) er gitt ved:

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sigma * e^{-\alpha(T-t)} dz(t) \quad \text{likning 5.1}$$

der T angir leveringstidspunkt, og t angir handledato. Usikkerheten er gitt av $dz(t)$.

Denne likningen vil danne grunnlaget for prisprosessen i treet som skal bygges, og er et utgangspunkt for å beregne volatilitet, σ , og alfa, α , ut i fra historiske priser. Disse to faktorene kan bli estimert av priser på opsjoner på spot eller forwardkontrakter.

Underliggende for kurven i likning 5.1 er at i en risikofri verden kan f.eks derivater bli verdsatt utifra forventet verdi på et tidspunkt i fremtiden, og så neddiskontert med risikofri rente.

Volatiliteten, σ , er gitt av volatiliteten til avkastningen på spot- eller forwardprisene, mens alfa, α , er bestemt av hastigheten til reduksjon av volatiliteten til forwardpriser med økende tid til forfall. α kan også bli forstått som hastigheten til mean reversion. Denne parameteren kan også forklares ut i fra halveringstiden til spotprisen. Halveringstiden oppfattes som tiden det tar for spotprisen å vende halvveis tilbake til sitt langtidsnivå fra nivået det har på dette tidspunktet (hvis ikke flere tilfeldig sprang oppstår). Sammenhengen mellom alfa og denne halveringstiden er gitt av (Clewlow og Strickland, 2000A):

$$t_{1/2} = \ln(2) / \alpha \quad \text{likning 5.2}$$

der $t_{1/2}$ er halveringstiden.

Likning 5.1 danner altså et fundament i modellen beskrevet av Clewlow og Strickland (2000A) og løsningen på denne differensiallikningen 5.1 er gitt av:

$$F(t, T) = F(0, t) * \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma(u, T)^2 du + \int_0^t \sigma(u, T) dz(u)\right) \quad \text{likning 5.3}$$

Siden spotprisen er gitt av startpunktet til forwardkurven (levering straks), settes $T=t$ og spotprisens prosess blir:

$$S(t) = F(t, t) = F(0, t) * \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma(u, t)^2 du + \int_0^t \sigma(u, t) dz(u)\right) \quad \text{likning 5.4}$$

Dersom likning 5.4 over deriveres, blir den impliserte spotprisprosessen:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left[\frac{\partial \ln F(0, t)}{\partial t} + \alpha (\ln F(0, t) - \ln S(t)) + \frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2\alpha t}) \right] dt + \sigma dz(t) \quad \text{likning 5.5}$$

Utleddning av likning 5.5 finnes i Vedlegg A.

Denne enfaktormodellen er lik enfaktormodellen gitt av Schwartz (1997)¹, men med driftsleddet som tidsavhengig. Det er dette leddet i driften som lar modellen passe til de observerte forwardprisene (Clewlow og Strickland, 2000A). Sammenhengen mellom forwardkurven og avkastningen til spot viser også at spotprisens egenskap, mean reversion, er knyttet til dempingen av volatiliteten til forwardkurven. Ved å sette α i likning 5.5 lik null, vil bl.a leddet for mean reversion falle bort, og prisprosessen som gjenstår vil sammenfalle med prisprosessen som er underliggende for Black76 (Clewlow og Strickland, 2000A).

Med utgangspunkt i likningen 5.3 kan forwardkurven utledes til å bli:

$$F(S(t), t, T) = F(0, T) \left(\frac{S(t)}{F(0, t)} \right)^{\exp[-\alpha(T-t)]} \exp \left[\frac{\sigma^2}{4\alpha} e^{-\alpha T} (e^{2\alpha} - 1)(e^{-\alpha T} - e^{-\alpha t}) \right] \text{ likning 5.6}$$

Utleddning av likning 5.6 finnes i Vedlegg B.

Likning 5.6 som angir forwardprisen på tidspunkt t , er en funksjon av spotprisen på tidspunktet t , den initielle forwardkurven og parameterne volatilitet og hastigheten til mean reversion. Dette resultatet er svært nyttig fordi ved å estimere spotpriser ved tregenerering kan en fremtidig forwardkurve beregnes analytisk. Videre gir dette mulighet til å evaluere payoff ut fra en analytisk metode (Clewlow og Strickland, 1999).

5.2.2 Volatilitet

Likning 5.1 kan mer generelt skrives som:

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sigma(t, T) \cdot dz(t) \quad \text{likning 5.7}$$

¹ $dS = \alpha(\mu - \lambda - \ln S)dt + \sigma \cdot Sdz$, som sier at spotprisen følger mean reversion prosess.

der $\sigma(t, T)$ kan forstås som volatiliteten på tidspunkt t til en forward som har leveringstidspunkt T (Hull, 2000). Det kan da med utgangspunkt i likning 5.1 og 5.7 konkluderes med at for denne enfaktormodellen, er volatiliteten, $\sigma(t, T)$, gitt av $\sigma e^{-\alpha(T-t)}$. $\sigma(T, t)$ kan finnes ut av markedsdata, og denne funksjonen utgjør da en mulighet for å finne en gjennomsnittlige volatilitet, σ , for forwardkontraktene i markedet.

Dette er også i tråd med Vedlegg A og paperet til Koekebakker og Ollmar (2001). Paperet gir:

$$\sigma(t, T) = \sigma \cdot e^{-\kappa(T-t)} \quad \text{likning 5.8}$$

Ved å innføre den naturlige logaritmen til $\sigma(T, t)$ vil likning 5.8 bli en lineær funksjon, og denne egenskapen kan benyttes for å estimere volatiliteten, σ , og hastigheten til mean reversion, α , ved hjelp av lineær regresjon.

5.3 Del A: Prosedyre for bygging av trinomiske trær

I dette delkapitlet skal det forklares en prosedyre for å generere trær. Disse trærne vil inneholde spotpriser, og skal brukes til å beregne prisen på forwardkontrakter. Med utgangspunkt i dette treet skal europeiske opsjoner prises, og fremgangsmåten for dette finnes i kapitlene 5.4 og 5.5. Trærne som omhandles kan også brukes til å prise amerikanske og stivhengige opsjoner.

5.3.1 Underliggende formeler for trebyggingsprosessen

Spotprisen $S(t)$ kan skrives på logaritmisk form etter bruk av Itos lemma (Hull, 2000). Dersom $x(t) = \ln(S(t))$ vil spotprisprosessen i likning 5.5 se slik ut:

$$dx(t) = \left[\frac{\delta \ln F(0, t)}{\partial t} + \alpha(\ln F(0, t) - x(t)) + \frac{\sigma^2}{4}(1 - e^{-2\alpha t}) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] dt + \sigma dz(t) \quad \text{likning 5.9}$$

Utleddning av likning 5.9 finnes i Vedlegg C.

Likning 5.9 kan på en enklere måte skrives som:

$$dx(t) = [\theta(t) - \alpha x(t)]dt + \sigma dz(t) \quad \text{likning 5.10}$$

der

$$\theta(t) = \left(\frac{\delta \ln F(0,t)}{\delta t} + \alpha \ln F(0,t) + \frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2\alpha t}) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \quad \text{likning 5.11}$$

og $\theta(t)$ er leddet i prosessen over som er forutsigbart (deterministisk), da det inneholder den gitte forwardkurven (Lucia, Schwartz, 2001).

Under steg A - del 1 skal $\theta(t)$ settes lik null for alle t , slik at den foreløpige prisen, $x'(t)$, kun skal inneholde stokastiske ledd. Den initielle verdien, $x'(t)$, skal settes lik null. Dette gir en prosess for x' gitt av likning 5.12:

$$dx'(t) = -\alpha \cdot x'(t)dt + \sigma \cdot dz(t) \quad \text{likning 5.12}$$

5.3.2 Utrekning av prisen i initielt tre

Verdien hver node i det initielle treet vil bli utformet av likningen:

$$x'_{i,j} = j\Delta x \quad \text{likning 5.13}$$

der j er steg i vertikal retning utifra midtnoden og

$$\Delta x = \sigma \sqrt{3\Delta t} \quad \text{likning 5.14}$$

Likning 5.14 er konstruert slik at den er best mulig tilpasset virkeligheten og Clewlow og Strickland (2000) hevder det er hensiktsmessig valg på forholdet mellom skritt i rom og tid. Hull (2000) mener dette er et fornuftig valg da det minimerer feilestimering.

Δx angir standardavviket til x i en periode på dt år. Dvs at det tas hensyn til at perioden er kortere en det året volatiliteten gjelder for. Prosessen blir derfor motsatt

som den annualiseringen som blir forklart i 5.3.6.1 og er gitt i likning 5.26. Tallet 3 som fremkommer i likning 5.14 er i henhold til antall utfall for hver node i treet.

Det initielle treet vil bli bygget basert på lik avstand mellom hvert steg i horisontal retning, og Δt vil derfor være konstant i del A av trebyggingen. Clewlow and Strickland (1999) formulerer dette ved å si at $t_i = i\Delta t$, der i representerer et ikke negativt heltall i horisontal retning. j settes slik at midtre node i tidsperioden alltid skal ha j -verdi 0, nodene over midten skal ha positive verdier og nodene under midten skal ha negative verdier. På denne måten kan hver node gis en spesifikk identitet bygget opp av to heltall; i og j . Estimering av x' i hver node skjer ved å bygge treet mot høyre og fra midten.

Det innføres i denne sammenheng et heltall k slik at nodene som kan nås fra node (i,j) er $(i+1,k-1)$, $(i+1,k)$ og $(i+1,k+1)$. Denne k -en er valgt slik at verdien av den midtre noden er lik forventningsverdien til x' ved tid t_{i+1} . Forventningsverdien til $x'_{i,j}$ er gitt av $x'_{i,j} - \alpha x'_{i,j} \Delta t$ (Clewlow og Strickland, 1999). Årsaken til at k innføres er at hver node representerer en forventningsverdi over et gitt kontinuerlig intervall på tidspunkt i . For at en gitt j gjennom hele treet skal representere dette forventningsnivået, må det garanteres at den midtre grenen peker på noden med verdi nærmest denne forventningsverdien i neste tidsskritt. Denne k -en blir dermed innført for å sikre konsistens i treet. Ved ekstremt høye verdier av x' kan det oppstå negative sannsynligheter og dette unngås ved å innføre heltallet k .

5.3.3 Utregning av sannsynligheter basert på initielt tre

Sannsynlighetene for de mulige utfallene er utregnet ved å ta utgangspunkt i likningen 4.17-4.19, og er gitt i likningene 5.15-5.17. La $p_{u,i,j}$ være sannsynligheten for at den øvre noden skal inntreffe, $p_{m,i,j}$ for at midtre node inntreffer og $p_{d,i,j}$ for at nedre utfall inntreffer. Sannsynlighetene er dermed gitt av:

$$p_{u,i,j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma^2 \Delta t + \alpha^2 x_{i,j}^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} + (k-j)^2 - \frac{\alpha x_{i,j} \Delta t}{\Delta x} (1 - 2(k-j)) - (k-j) \right] \quad \text{likn 5.15}$$

$$p_{d,i,j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma^2 \Delta t + \alpha^2 x_{i,j}^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} + (k-j)^2 + \frac{\alpha x_{i,j} \Delta t}{\Delta x} (1 + 2(k-j)) + (k-j) \right] \quad \text{likn 5.16}$$

$$P_{m,i,j} = 1 - P_{u,i,j} - P_{d,i,j} \quad \text{likn 5.17}$$

Den prosedyren som frem til nå er beskrevet gjelder for det foreløpig treet, som dannes ved å sette leddet $\theta(t)$ lik null og ved å sette den initielle verdien av x' lik null. Likevel gjelder sannsynlighetene også for nodene etter endringsparameteren, a_i , er inkludert. Dette betyr at sannsynlighetsmodellen gitt over kan og vil bli brukt til generell analyse av prisene generert i treet.

5.3.4 Utregning av tilstandspriser

Tilstandsprisen, $Q_{i,j}$, sier noe om verdien av et derivat i tidspunkt $t=0$ som gir 1 enhet i avkastning hvis node (i,j) inntreffer og 0 ellers. Prisen i dag, $C(0)$, på et europeisk opsjon med payoff funksjon, $C(S)$, på tidspunkt i er gitt av:

$$C(0) = \sum_j Q_{i,j} C(S_{i,j}) \quad \text{likning 5.18}$$

Tilstandsprisen på tidspunkt $(i+1,j)$ er gitt av summen over alle tilstandspriser i nodene (i,j') justert for sannsynlighet og risikofri rente. Tilstandsprisen blir regnet ut ved foroverrettet induksjon og er gitt av:

$$Q_{i+1,j} = \sum_s Q_{i,s} \cdot p_{s,j} \cdot P(i \cdot \Delta t, (i+1) \cdot \Delta t) \quad \text{likning 5.19}$$

der $p_{s,j}$ angir sannsynligheten for å gå fra node (i,s) til node $(i+1,j)$. s symboliserer øvre, midtre eller nedre node i trinnet i , det vil si de grenene som ender i node $(i+1,j)$. $P(i\Delta t, (i+1)\Delta t)$ angir en diskonteringsfaktor med risikofri rente fra tidspunkt $i\Delta t$ til $(i+1)\Delta t$. Den risikofrie renten antas å være NIBOR- renten fra 01.10.01 som referanse da dette er nært analysedato. Definisjonen angir diskonteringsfaktoren til å være:

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T r(u)du\right) \quad \text{likning 5.20}$$

Der r er risikofri rente til et hvert tidspunkt t til T . Diskonteringsfaktoren vil altså være kontinuerlig, og formelen er gitt av:

$$P(i\Delta t, (i+1)\Delta t) = e^{r\Delta t} \quad \text{likning 5.21}$$

Den initielle verdien til tilstandsprisen er satt til en grunnet at det finnes kun én node og derfor er sannsynligheten lik en og Δt er lik null.

5.3.5 Estimering av endringsparameteren a_i

For å justere det initielle treet til å være konsistent med observerte forwardpriser og riktig driftrate, vil x' -verdien i hver node bli justert ved å addere en faktor a_i . Endringsfaktoren, a_i , er valgt slik at treet gjenspeiler de korrekte forwardprisene. For å komme frem til denne endringsfaktoren må foroverrettet induksjon og tilstandspriser benyttes. En spesiell versjon av likning 5.18 for å få tilstandsprisene til å sammenfalle med forwardprisene gir:

$$P(0, i\Delta t) \cdot F(0, i\Delta t) = \sum_j Q_{i,j} \cdot S_{i,j} \quad \text{likning 5.22}$$

Utledningen av endringsparameteren, a_i , er beskrevet i Vedlegg D og er på bakgrunn av at $\ln S(t) = x_{i,j} = x'_{i,j} + a_i$ gitt av:

$$a_i = \ln \left(\frac{P(0, i\Delta t) F(0, i\Delta t)}{\sum_j Q_{i,j} e^{x'_{i,j}}} \right) \quad \text{likning 5.23}$$

5.3.6 Estimering av parametre

5.3.6.1 Estimering av volatiliteten, σ , og hastigheten til mean reversion, α

For å estimere volatiliteten, σ , og hastigheten til mean reversion, α , foreslår Clewlow og Strickland (1999) å estimere disse ut i fra historiske forwardpriser.

Prosedyren for å finne disse parameterne, tar utgangspunkt i historiske glattede forwardkurver som er gitt for hver handledag i løpet av et år, etter f.eks arbeid utført av Fleten og Lemming (2001). For hver handledag er det oppgitt en loddrett prisrekke (generert ut av kurven) og denne inneholder priser for levering som starter hver dag i to år. Kurvene gjenspeiler også priser på forwardkontrakter med ulike leveringsperioder.

Det skal finnes volatiliteter ut i fra variasjonen i pris på ulike tider til levering. Det må da velges et antall tider til levering. Dette antallet bør være så stort at volatiliteten og alfa gjenspeiler volatiliteten og hastigheten til mean reversion i hele utvalget på en god måte. Denne utvelgelsen kan skje tilfeldig, men må fordele seg utover perioden det finnes datagrunnlag for. Med perioden menes det her hvor lang tid det er fra første mulige start på levering til siste mulige start på levering.

For å få en volatilitet som tar hensyn til faktisk handel bør det, i følge Koekebakker og Ollmar (2001), velges ut tidspunkt til levering som faller sammen med de faktiske handlede blokkene for futurekontrakter, dvs ukene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 70, 88 og 104. Dette kunne også blitt gjort for prosjektet, da det ikke her sees noen forskjell mellom forwards og futures. Siden denne metoden ikke var kjent på tidspunktet volatiliteten ble utregnet, har ikke dette blitt gjort.

Volatilitetene må beregnes fra nye vannrette sammensatte prisrekker. Disse inneholder forwardpriser med konstant avstand i tid til levering for bestemte handledager. Det er valgt ut 53 handledager. For å beregne volatiliteten i de nye vannrette prisrekkene, benyttes prosedyren for estimering av volatilitet fra historiske data gitt i Hull (2000):

For en gitt vannrett prisrekke gjelder:

n antall handledager

F_i forwardpris på handledag i

τ lengde av tidsintervall i år, dvs tiden fra første til siste handledag

Avkastningen, u_i , i løpet av en periode vil være

$$u_i = \ln\left(\frac{F_i}{F_{i-1}}\right) \qquad \text{likning 5.24}$$

for $i=1 \dots n$

Fordi $F_i = F_{i-1} \exp(u_i)$ er u_i lik kontinuerlige avkastningen i tidsperioden i (dvs ikke annualisert). Standardavviket til en vannrett prisrekke (dvs konstant avstand i tid til levering) er derfor gitt av:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} \quad \text{likning 5.25}$$

der \bar{u} er gjennomsnittlig avkastning over perioden.

Den annualiserte volatiliteten til en gitt vannrett prisrekke er gitt av:

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{\tau}} \quad \text{likning 5.26}$$

Etter at denne prosedyren er gjennomført vil en volatilitet for hver bestemte avstand i tid til levering (vannrett prisrekke) fremkomme.

Den volatiliteten som er beregnet for hver vannrette prisrekke, skal brukes å komme frem til en samlet volatilitet, σ , for alle forwardkontraktene. Dette gjøres, som nevnt i kapitel 5.2.2, ved hjelp av å innføre den naturlige logaritmen, vist i likning 5.28.

Som forklart i 5.2.2 er:

$$\sigma(t, T) = \sigma \cdot e^{-\alpha(T-t)} \quad \text{likning 5.27}$$

og en innføring av \ln gir:

$$\ln \sigma(t, T) = \ln \sigma - \alpha(T-t) \quad \text{likning 5.28}$$

Lineær regresjon vil da bli benyttet for å finne σ og α , og logaritmen til denne volatiliteten fremkommer da som skjæringspunktet på y-aksen. Hastigheten til mean reversion, α , er absoluttverdien til stigningstallet til grafen.

På bakgrunn av forklaringene over, forventes det at ved sette inn logaritmen til volatilitetene for hver vannrette prisrekke med tilhørende tid til levering inn i et koordinatsystem, vil det dannes en lineær kurve.

5.3.6.2 Risikofri rente r

Den risikofrie renten som vil bli brukt er 3 måneders NIBOR renten for 01.10.2001, som er nærliggende til analysedatoen for prosjektet. Denne renten er satt til (Ssb, 2001):

$$r = 7.1\%$$

Siden det er valgt å bruke en kontinuerlig diskonteringsrente i modellen, må renten regnes om til en kontinuerlig rente gitt av (Hull, 2000):

$$1 + r = e^{r_k} \quad \text{likning 5.29}$$

der r_k er den kontinuerlig rentesatsen og dette gir r_k lik 6,86%.

5.3.6.3 Tidsintervallet Δt

I den første delen av treprosessen og ved bruk av stimetoden til å beregne forwardprisene, benyttes følgende metode for å finne Δt .

Tidsintervallet Δt er valgt slik at et helt antall Δt går opp i leveringsperioden. Leveringsperioden er valgt til første periode av år 2002, og denne er på 2879 timer. Grunnet én times justering for overgang til sommertid, vil feilestimeringen være på kun én time dersom Δt lik 30 dager velges som tidsintervall. Verdi for Δt blir dermed:

$$\Delta t = (30/365) \quad \text{likning 5.30}$$

5.4 Del B-1: Prosedyrer for utregning av forwardpriser

I dette kapitlet vil prosedyrene som skal brukes for å regne ut forwardprisene, for leveringsperioden 1. januar år 2002 og 120 dager utover, bli forklart.

Før metodene for å beregne forwardprisene beskrives, er det viktig å forklare indeksene i, j, i', j' , da disse vil være sentrale for å forstå beregningene som følger. Hvilket tidspunkt som prisen skal gjelde fra er representert ved i , dvs for leveringstidspunktet, $i=3$, 01.01.02. For å henvise til en bestemt node på dette

tidspunktet brukes j , som kan variere fra -3 til 3 . Indeksene i' og j' viser til en fremtidig posisjon i treet (dvs $i' \geq i$), og kan sees i sammenheng med det treet som har fremkommet etter å ha fulgt metoden i kap. 5.3.

Forwardprisene for perioden 01.01-01.05, vil for hver node j på tidspunkt 3, bli regnet ut ved å bruke en vektemetode basert på fem observasjoner (én pris for hver periode). Første observasjon er 1. januar 2002, andre observasjon 30 dager etter, tredje observasjon 60 dager etter, osv.

En slik vektemetoden finnes i Bjerksund, Rasmussen og Stensland (2000) og bygger på ulik vekting av prisene, fordi det tas hensyn til at prisene fremkommer på forskjellige tidspunkt. Lucia og Schwartz (2000) bruker i stedet en enklere vektemetode ved å bruke et aritmetisk gjennomsnitt av kontraktspriser. Følgende likning foreslås derfor av Lucia og Schwartz (2000) for å beregne forward- og futurepriser:

$$F_0(P_0; T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} * \sum_{T=T_1}^{T_2} F_0(P_0, T) \quad \text{likning 5.31}$$

og

$$F_0(P_0, T) = E(P_T) \quad \text{likning 5.32}$$

der T_2 og T_1 er gitt i antall dager til henholdsvis slutten og begynnelsen av leveringsperioden, dvs antall priser de har i modellen. $F(P_0, T)$ er forventningsverdien til spotprisen.

Denne vektemetoden skal overføres til vår modell. Siden gjennomsnittet gitt av Lucia og Schwartz (2000) er et aritmetisk gjennomsnitt, må spotprisen være parameter i likningen og ikke den logaritmiske prisen $x_{i,j}$.

For vår modell må det for hver node j på tidspunkt $i=3$ beregnes et gjennomsnitt av fem priser, en for hvert tidspunkt, i' , i treet. Hver av forwardprisene for node j kan beregnes ved å overføre likning 5.31 og 5.32 til vår modell og er da gitt av:

$$F_j = \frac{\sum_{i=3}^7 F_{j,i}}{5}$$

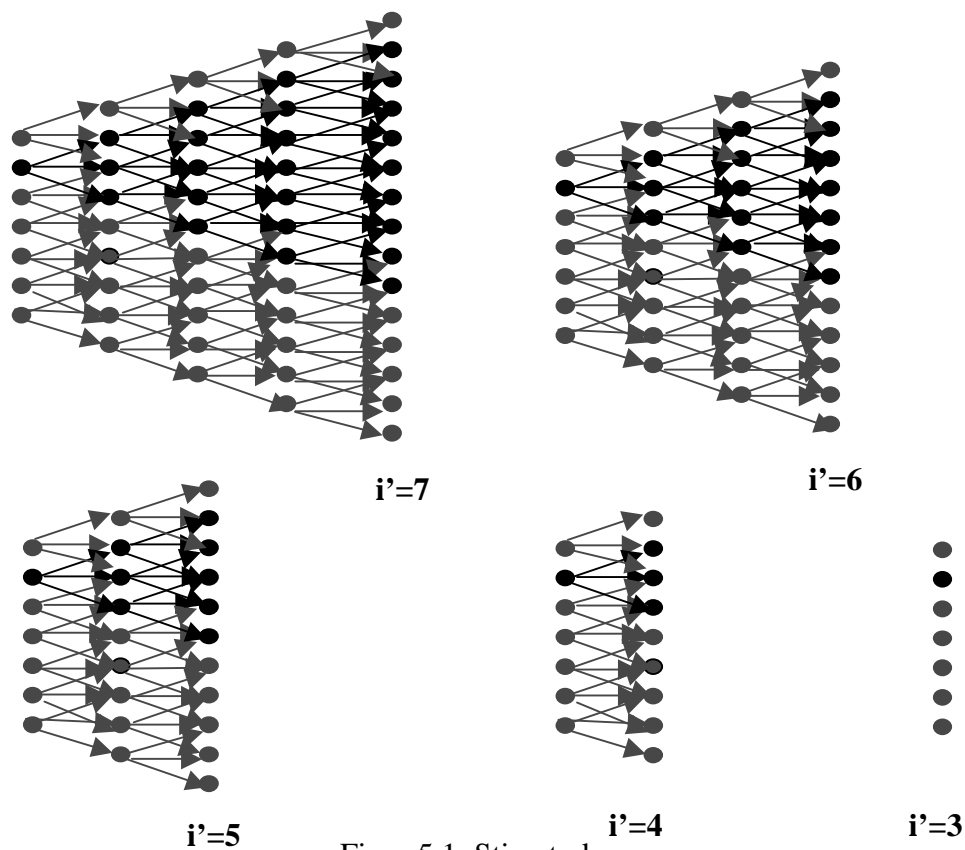
likning 5.33

der F_j symboliserer forwardprisen for hele leveringsperioden fra tidspunkt 01.01.2002 frem til 01.05.2002 i node j . $F_{j,i}$ er den forventede spotprisen på tidspunktet i for hvert mulige utfall j , og skal beregnes etter en av metodene som fremkommer i kapitlene 5.4.1 og 5.4.2. Begge metodene skal benytte likning 5.33 for å finne en gjennomsnittlig forwardpris for hver node j på tidspunkt 3.

5.4.1 Sti-metode

For at forventningsverdien på hvert tidspunkt i skal være lik den gitte forwardkurven, må stiavhengig metode brukes. Dette fordi stiavhengig metode er den eneste metoden som tar hensyn til alle sannsynligheter i treet.

Denne metoden tar utgangspunkt i verdiene i treet forklart i kapitel 5.3. Videre bygger fremgangsmåten på at utfallet på tidspunkt 3 har inntruffet. Det vil si at hver node på dette tidspunktet spenner ut et nytt lite tre, og verdiene i dette lille treet er hentet fra det genererte treet. Figur 5.1 viser hvordan det nye treet dannes for node $(i=3, j=2)$. Tilsvarende skjer for nodene $j=3, 1, 0, -1, -2$ og -3 på tidspunkt 3.



Figur 5.1: Stimetoden

Hvert tidspunkt, i' , har summert vertikal betinget sannsynlighet i det nye lille treet lik 1.0 , da en av disse må inntreffe. Sannsynligheten for at en bestemt node (i',j') i et bestemt nytt tre inntreffer (ut i fra node $(3,j)$), vil være lik den betingede sannsynligheten i noden (i',j') gitt av

$$B_{j,i'+1,j'} = \sum_s B_{j,i',s} * p_{j',s} \quad (\text{tatt fra oppbyggingen av tilstandspriser}) \quad \text{likning 5.34}$$

der $p_{j',s}$ er sannsynligheten for å gå fra node (i',s) til $(i'+1,j')$. $B_{j,i'+1,j'}$ er den betingede sannsynligheten for at node $(i'+1,j')$ inntreffer og indeksen j er tatt med for å henvise til hvilket nytt tre sannsynligheten tilhører. $B_{j,3}$ er den initielle verdien i hver av de nye trærne og har verdi lik 1 , da denne noden allerede er tenkt å ha inntruffet.

Inputparameterne i likning 5.33 er 5 forventede spotpriser som hver tilhører et fremtidig tidspunkt (for hver eneste node på tidspunkt 3). For å finne disse forventede spotprisene må det tas utgangspunkt i at summen av sannsynlighetene i vertikal retning er lik 1.0 . Forventningsverdiene kan derfor på hvert tidspunkt, i' , bli generert ved å vekte spotprisene på alle nodene med tilhørende sannsynlighet. For hvert

tidsskritt (vertikalt) summeres de vektete spotprisene sammen til en forventningsverdien til spotprisen for disse tidsskrittene. Dette gir for hver j på tidspunkt $i=3$ 5 forventede spotpriser som er gitt av:

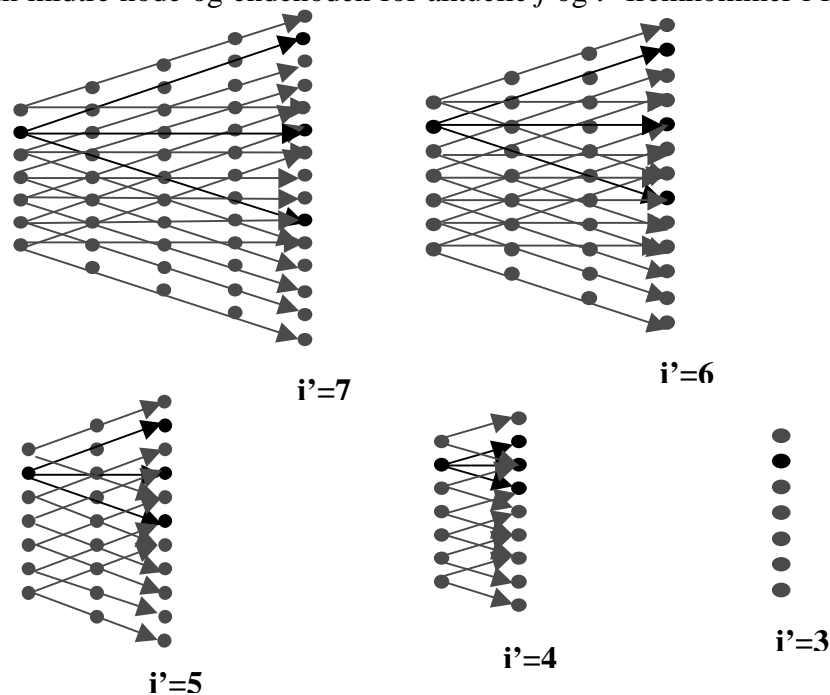
$$F_{j,i'} = E(S_{j,i'}) = \sum_j B_{j,i',j} * S_{i',j} \quad \text{likning 5.35}$$

der $B_{j,i',j}$ er betinget sannsynligheten for at node (i',j') inntreffer og $S_{i',j}$ er spotprisen i hver node hentet fra det opprinnelige treet. Likning 5.35 generer fire forwardpriser, en for hver av tidspunktene $i'=4,5,6$ og 7. For tidspunkt $i'=3$ må den forwardprisen hentes fra det genererte treet.

5.4.2 Ulik Δt -metode

Hovedidéen bak denne metoden var å finne en enklere og mindre tidkrevende manuell fremgangsmåte enn stimetoden, som ble forklart i kap 5.4.1. Denne metoden bygger på prosjektdeltagernes egne idéer og resonnement.

Denne modellen tar utgangspunkt i det opprinnelige treet, og det skal gjøres forenklinger på dette. Måten er å innføre kun én periode mellom $i=3$ og i' , der i' kan være lik 4,5,6 og 7. Det vil fremdeles være 5 perioder i treet som har ulik Δt . Dette er vist i figur 5.2 for node $j=2$. Tilsvarende blir gjort for alle nivåene j på tidspunkt $i=3$. Avstanden mellom midtre node og endenoden for aktuelle j og i' fremkommer i figur 5.2.



Figur 5.2: Ulik Δt -metoden

Det skal for denne metoden tas utgangspunkt i sannsynlighetene gitt av Clewlow og Strickland (1999), og disse formlene er avhengig av tidsperioden Δt , Δx (som også er avhengig av Δt) og $x_{i',j}$. Nye sannsynligheter må derfor beregnes der tidsperioden Δt og Δx må variere for hvert eneste fremtidig tidspunkt, samtidig som $x_{i',j}$ alltid må være lik prisen på tidspunkt $i=3$, dvs $x_{3,j}$. Verdiene som fremkommer av likningene, vil da angi sannsynligheten for å gå fra periode $i=3$ direkte til periode $i'=4,5,6$ eller 7.

Med utgangspunkt i likningene 5.15A, 5.16A og 5.17A blir de nye sannsynlighetene lik:

$$p_{u,i,j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma^2 \Delta t + \alpha^2 x_{3,j}^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} + (k-j)^2 - \frac{\alpha x_{3,j} \Delta t}{\Delta x} (1 - 2(k-j)) - (k-j) \right] \quad \text{likn 5.15B}$$

$$p_{d,i,j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma^2 \Delta t + \alpha^2 x_{3,j}^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} + (k-j)^2 + \frac{\alpha x_{3,j} \Delta t}{\Delta x} (1 + 2(k-j)) + (k-j) \right] \quad \text{likn 5.16B}$$

$$p_{m,i,j} = 1 - p_{u,i,j} - p_{d,i,j} \quad \text{likn 5.17B}$$

For oppnå de fem prisene som kreves av likning 5.33 må det for hver node på tidspunkt 3, for hvert fremtidige tidspunkt i' , fremkomme en forventet spotpris. Den første av disse fem prisene, dvs den på tidspunkt, $i=3$, kan hentes direkte ut av de genererte treet, mens de fire andre må beregnes ved å benytte følgende likning:

$$F_{j,i'} = E(S_{j,i'}) = \sum_s p_{v,j,i'} \cdot S_{i'} \quad \text{likning 5.36}$$

der $p_{v,j,i'}$ angir sannsynligheten for å gå fra node $(3,j)$ til node (v,i') og i' viser hvilken periode som sannsynligheten henviser til. Den innførte indeksen v angir u , m eller d , og henviser tilsvarende i likningene 5.15B, 5.16B og 5.17B. Indeksen v tilsvarer derfor ikke den tidligere innførte indeksen s .

5.5 Del B-2: Prosedyre for utregning av opsjonsprisen

Opsjonsprisene på en forwardkontrakt for levering vinter 1 år 2002 som underliggende, skal regnes ut både for call og put. Ved å ta utgangspunkt i F_j gitt av likning 5.33 vil profitten på henholdsvis call og put bli regnet ut av følgende formel:

$$c_{i,j} = \max(F_j - K, 0) \quad \text{likning 5.37}$$

$$p_{i,j} = \max(K - F_j, 0) \quad \text{likning 5.38}$$

der K er strike pris og $c_{i,j}$ og $p_{i,j}$ er profitt (payoff). Likningene over skal brukes med $K = 175$ NOK/MWh til $K = 240$ NOK/MWh, med 5 enheter som intervall.

For å regne ut prisen på en europeisk opsjon i dag med benyttes likning 5.18.

$$C(0) = \sum_j Q_{i,j} \cdot C(S_{i,j}) \quad \text{likning 5.18}$$

der $C(S_{i,j})$ er derivatets payoff funksjon, gitt av $c_{i,j}$ og $p_{i,j}$.

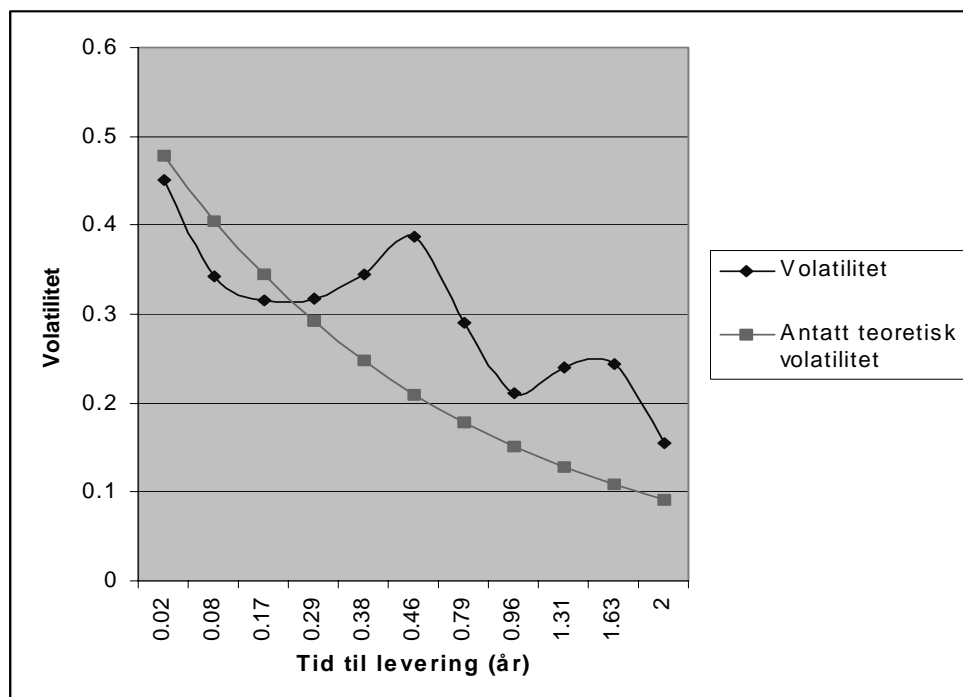
Dermed blir opsjonsprisen $C(0)$ for hver strike pris, K , på analysedato 03.10.2001 gitt ved:

$$C(0) = \sum_{j=-3}^3 Q_{i,j} C_{i,j} \quad \text{likning 5.39}$$

der i er tidspunkt 01.01.2002, Q er tilstandspris, og C representerer payoff på den europeiske opsjonen.

5.6 Resultat

For å kunne avgjøre hvor representativ opsjonspringsmodellen er for 03.10.01, må dataene som er fremkommet sammenlignes med virkelige priser fra Nord Pool på den samme dagen. På grunn av at prosedyren for å finne forwardpriser og opsjonspriser ikke er gjort på en rekke tidspunkt, men kun én dag, kan ikke resultatene si noe om modellen generelt er god eller dårlig. Den kan kun si noe om den dagen den har tatt utgangspunkt i.

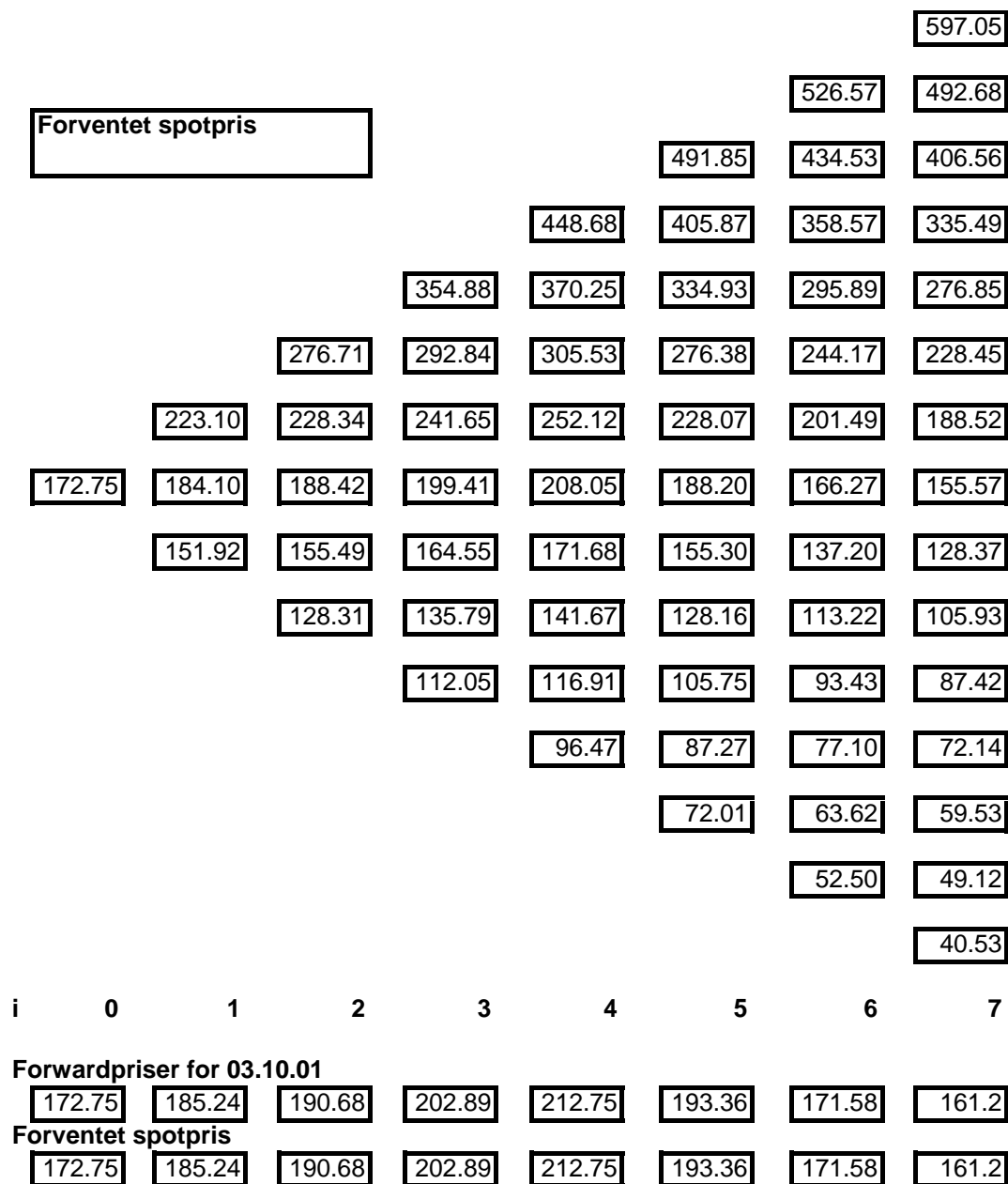


Figur 5.3: Volatilitet for dager til levering

I kapittelet 5.3.6.1 er det vist hvordan volatiliteten til forwardpriser og hastigheten til mean reversion er estimert. Som forklart ble det for de utvalgte handledagene regnet ut ulike volatiliteter for ulike tid til levering, og figur 5.3 viser disse volatilitetene. Kurven gir et bilde av volatiliteten til handledagene fra 01.10.01 til 01.10.02. Disse tidene til levering er representert av x-aksen i figur 5.3, slik at volatiliteten på y-aksen gjelder generelt for en gitt avstand i tid til levering.

Disse volatilitetene danner videre grunnlaget for å regne ut en gjennomsnittlig volatilitet, σ , for alle forwardpriser, som har blitt brukt til å generere fremtidige spotpriser i treet. Verdien på denne parameteren har blitt estimert til 0.39 og hastigheten til mean reversion ble estimert til 0.40.

Generelt for volatiliteten i figur 5.3 gjelder at denne synker med tiden til levering, T , som teoretisk antatt. Den beregnede volatilitetskurven avviker likevel tallmessig fra den antatte teoretiske volatiliteten vist som en eksponentialfunksjon i figur 5.3. Dette vil bli nærmere evaluert under kapittel 5.7 om feilkilder.

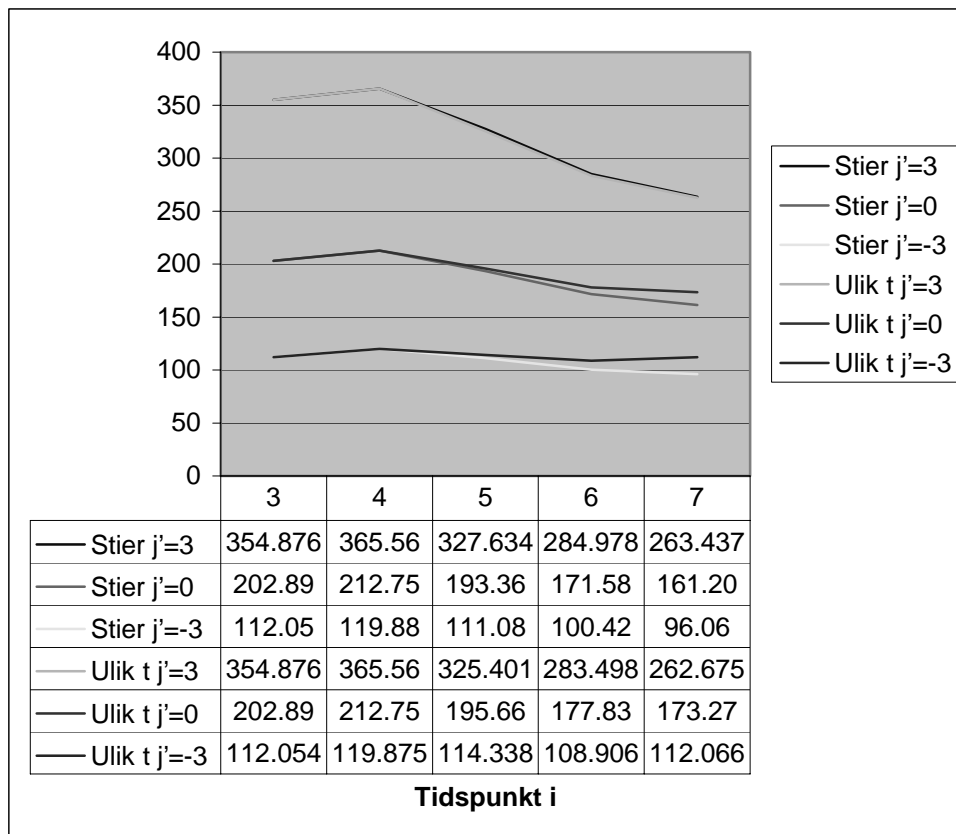


Figur 5.4: Forventet spotpris generert i treet

Figur 5.4 viser det genererte treet med forventede spotpriser (forwardpriser) angitt i hver node. Prisene på nivå j viser at spotprisen vil øke frem til tidspunkt $i=4$, og deretter synke til $i=7$. Dette er i tråd med forwardprisene observert i markedet, da disse synker etter vinterhalvåret grunnet lavere etterspørsel og større produksjon og tilsig. Variasjonen i de forventede spotpriser viser også at det er et sesongbasert mønster, som forklart i kapittel 3.

De to nederste linjene i figur 5.4 viser de gitte forwardprisene som brukes som input i treet og den forventede spotprisen i treet for hver periode. Prisrekken for forventet spotpris er beregnet ved å, for hvert tidspunkt, i , multiplisere samtlige av spotprisene

på dette tidspunktet med tilhørende betinget sannsynlighet. Da disse to prisrekkene er like, viser det at det er konsistens i treet og at spotprisene i treet er korrekt i henhold til metoden som benyttes for å beregne disse.



Figur 5.5: Forventet spotpris

Denne figuren viser seks ulike kurver, forklart i teksten til høyre for figur 5.5. De to midterste kurvene gjengir forventet verdi for de fremtidige tidspunktene i , og kurvene som ligger ytterst viser forventet verdi av node $j=3$ og $j=-3$, da dette sier noe om hvor ekstreme den forventede spotprisen kan bli.

Generelt for kurvene gjelder at forventede spotpriser stiger frem til tidspunkt $i=4$ og deretter faller frem til analyseperiodens slutt. Dette er konsistent med prisene i markedet. Opptreden til kurvene er også i tråd med teorien, forklart i kapittel 3, som sier at det er større sannsynlighet for høye ekstremverdier enn lave. Dette vises ved at de øverste kurvene har større avstand til de midtre kurvene enn de laveste.

Tabell 5.1: Opsjonspriser fra modeller og marked (c = pris på call, p = pris på put)

<u>Stier</u>				<u>Ulik tid</u>		
Strike	Modell C	Marked C	Feil i %	Modell C	Marked C	Feil i %
180	17.41	18.5	-5.90	20.10	18.5	8.64
185	13.80	15.7	-12.09	16.49	15.7	5.04
190	12.11	13.18	-8.09	12.97	13.18	-1.61
195	10.64	11	-3.31	11.49	11	4.44
200	9.16	9.1	0.63	10.01	9.1	10.01
210	6.20	6.05	2.50	7.05	6.05	16.60
220	3.24	3.9	-16.80	4.10	3.9	5.07
230	2.16	2.45	-11.81	2.24	2.45	-8.62
240	1.62	1.5	7.73	1.69	1.5	12.94

Strike	Modell P	Marked P	Feil i %	Modell P	Marked P	Feil i %
180	8.91	7.85	13.49	7.41	7.85	-5.66
185	10.39	10	3.87	8.88	10	-11.16
190	13.79	12.44	10.82	10.45	12.44	-16.03
195	17.39	15.2	14.42	14.05	15.2	-7.55
200	21.00	18.2	15.38	17.66	18.2	-2.97
210	28.21	25.05	12.63	24.87	25.05	-0.70
220	35.43	32.8	8.01	32.09	32.8	-2.17
230	44.51	41.2	8.04	40.40	41.2	-1.94
240	54.14	50.1	8.06	50.03	50.1	-0.15

Prisene som fremkommer i tabell 5.1 er hentet fra regnearket "Opsjonspriser", og viser hvor mye de estimerte opsjonsprisene viker fra priser hentet på Nord Pool for samme analysedato. Den gir derfor et bilde på hvor representativ modellen er. For kunne si at modellen er representativ for markedet generelt burde flere analysedager vært testet ut. Som nevnt tidligere er hovedhensikten med dette prosjektet å lære og prise derivater, og derfor er det kun tatt utgangspunkt i én analysedato for å teste modellen.

5.6.1 Markedspriser vs priser fra stiavhengig metode

Ved å sammenligne markedsprisene på opsjoner med prisene der sti-metoden er brukt, er det et lite avvik. For prisene på call opsjoner er avviket mellom 8 og -17%, og disse ekstremverdiene oppstår med strike henholdsvis lik 240 og 220 kr.

For put er avviket mellom modellpris og markedsverdi også tydelig. Samtlige avvik er positive, dvs at modellprisene er høyere enn markedsprisene. Opsjonsprisen med høyest feilrate oppstår med strikeprisen 200 kroner.

Siden denne metoden bygger på betingede sannsynligheter, finnes det en mulighet for å få priser som samsvarer totalt med prisene på Nord Pool. Det er kjent at Nord Pool benytter Black76 og ved å sette hastigheten til mean reversion lik null, vil prisprosessen i modellen til Clewlow og Strickland (1999) sammenfalle med GBM, som gjelder for Black76, jfr kapittel 4 og 5.2.1. Det vil si at hvis det i denne oppgaven hadde blitt benyttet en volatilitet og en rentefaktor som var i samsvar med de som blir benyttet på Nord Pool, skulle opsjonsprisene basert på den stivhengige metoden blitt identiske med markedsprisene hvis hastigheten til mean reversion, α , settes lik null.

5.6.2 Markedspriser vs priser fra ulik Δt -metode

Opsjonsprisene som fremkommer ved bruk av ulik Δt -metoden avviker noe fra markedsverdiene. Prisene på call opsjoner varierer fra å overstige markedsprisene med 17% til å ligge under markedsverdiene med 9%. Prisene for put opsjoner har tendens til å ligge under markedsprisene, med variasjon fra 0-16%.

5.6.3 Sammenligning av metodene til å finne forwardpriser

De to metodene som er brukt til å finne forwardpriser har generert noe forskjellige resultater. Ut i fra tabell 5.1 kan det derfor ikke trekkes den slutningen at resultater fra den ene metoden generelt gir mer like verdier med markedspriser for 03.10.01 enn den andre.

5.7 Feilkilder og kritikk av metode

5.7.1 Feilkilder

I dette kapitlet vil det bli drøftet årsaker til mulige feil som både kan skyldes datagrunnlaget og utregning.

5.7.1.1 Volatiliteten, σ , og faktoren for mean reversion, α

Forwardkurvene og de tilhørende prisrekkene som ligger til grunn for beregning av volatiliteten og hastigheten til mean reversion er mulige feilkilder. Prisene som finnes i kurvene har blitt estimert ut fra prisblokker og kurvene har blitt gjort glatte for å få en kontinuerlig kurve. Det er dermed en viss usikkerhet i måten disse blokkene har blitt behandlet på, og i hvilken grad denne kurven reflekterer prisene på en god måte.

Ved å bruke den naturlige logaritmen til volatilitetene, skal en lineær kurve fremkomme, se kap 5.2.2 og 5.3.6.1. Ut i fra de oppgitte prisene ble det, i denne

rapporten, estimert verdier som ikke samsvarer med dette i særlig god grad. Regresjonsanalysen som ble gjennomført i Excel har en R-verdi lik 0.88 og denne verdien sier noe om hvor god regresjonen har vært. Her betyr det at punktene ikke ligger spesielt nært til den estimerte lineære kurven.

Utvalget av tidsavstanden fra handledato til levering er tilfeldig valgt, som forklart i kapittel 5.3.6.1. Denne utvelgelsen kan likevel være skjev, slik at den totalt fremkomne volatiliteten blir påvirket og gir en feil verdi. I tillegg kan antallet av disse punktene være for få (her kun 11), slik at de ikke gir et godt og reelt bilde av den virkelige volatiliteten. For å velge ut tider til levering kunne det også ha blitt brukt metoden til Koekebakker og Ollmar (2001), da disse tar utgangspunkt i tider til levering som er i samsvar med markedet. Denne metoden kunne muligens ha gitt verdier som var bedre i samsvar med teorien.

Dessuten ble det bevisst hoppet over enkelte tider til levering, da disse ga svært store volatiliteter. De gjorde den lineære regresjonsanalysen svært dårlig og hadde stor innvirkning på den fremkomne gjennomsnittlige volatiliteten. Disse verdiene kunne likevel vært korrekte og skulle vært tatt med i beregningen.

Når det gjelder handledager er det i dette prosjektet valgt ut 53 (én per uke) og det er også mulig at dette antallet er for snevert for å gi et godt bilde av volatiliteten. Dessuten ble det i prosessen for utvelgelsen av disse valgt bort og byttet ut enkelte dager, da disse viste resultater og priser som intuitivt virket lite sannsynlige. Muligheten finnes for at disse prisene likevel skulle vært tatt med og var korrekte. Dette kunne medført endring i volatiliteten i stor grad.

Det finnes to muligheter for å estimere volatiliteten og hastigheten på mean reversion. Det kan enten beregnes ut i fra historiske priser, eller av markedspriser på opsjoner. Det er i denne rapporten tatt utgangspunkt i historiske priser og det er en mulighet at den andre metoden vill gitt et resultat som ville vært i bedre samsvar med de virkelige verdiene. Av den nevnte grunn kan derfor volatiliteten og hastigheten til mean reversion være noe feilaktige.

Volatiliteten og hastigheten for mean reversion er i dette prosjektet antatt å være konstant over hele tidsperioden. Det kan fastslås å være feilaktig, da disse faktorene mest sannsynlig er tidsavhengige, som forklart i kapittel 3.

5.7.1.2 Prisene på Nord Pool 03.10.01

Det er i dette prosjektet bare tatt utgangspunkt i én analysedag, dvs 03.10.01, og alle input-data fra Nord Pool er hentet fra denne dagen. Nord Pool skal være en nøytral og effektiv børs, men det finnes ingen garanti at for at frekvensen på handel denne dagen var generelt som en annen handledag. Dette kan føre til uoverenstemmelse mellom spot-, forward- og opsjonspriser, slik at prisene som her brukes å sammenligne med kan være noe feilaktige. På en annen side sier effisient markedshypotesen at prisene til enhver tid gjenspeiler markedet på en riktig måte, slik at slike tilfeller ikke kan inntreffe.

Nord Pool er dessuten ikke et like likvid marked for handel for opsjoner sett i forhold til opsjonsmarkedet på OTC. Når det sammenlignes med markedsverdier, kunne sammenligningsgrunnlaget i stedet vært priser på OTC-markedet. Dette ble ikke gjort da prosjektdeltagerne ikke har hatt tilgang til slik informasjon.

5.7.1.3 Feil i formler

I løpet av prosjektperioden har en mengde formler og likninger blitt manuelt skrevet inn i regnearkprogrammet Excel. Det kan derfor ikke garanteres at ingen av disse formlene inneholder feil eller mangler. Dette kan ha årsak i menneskelig svikt, og kan ha større eller mindre konsekvenser for resultatet som har fremkommet.

5.7.1.4 Feil i utført metode

Deler av metodene som er beskrevet i kapittel 6 kan inneholde mangler eller feil som prosjektdeltagerne har sett over eller glemt. Noen av metodene har blitt dannet ut av diskusjon, prøving og feiling og siden modellene er laget av deltagerne selv, kan de være spesielt utsatt for feil og logiske brister.

5.7.1.5 Tid mellom levering og utløpstid for opsjon

Forfall på standardiserte opsjoner med forward for Vinter 1 som underliggende er torsdag 20. desember. Det betyr at det er ti dager mellom denne opsjonens forfall og start på levering. Det er i denne oppgaven sett bort i fra disse ti dagene. Dette gir en

feil ved utregning av opsjonsprisene, da tilstandsprisene som er brukt er referert til 01.01.02 i stedet for 20.12.01.

Fordi perioden frem til innløsningstidspunktet er kortere enn til leveringstidspunktet, skulle følgelig diskoteringsfaktoren i tilstandsprisen vært mindre og gitt en høyere tilstandspris. Dette hadde resultert i noe høyere opsjonspriser for modellen.

5.7.1.6 Feil i den risikonøytrale renten r

Den risikonøytrale renten, r , er antatt å holde seg konstant lik NIBOR-renten for 01.10.01, i hele perioden. Dette er ikke spesielt trolig, da renten i år 2001 har variert mellom 7.1% og 7.5 % og for år 2000 varierte renten mellom 5.9% og 7.4% (Ssb, 2001). Det kan derfor slås fast at denne konstante rentesatsen muligens har ført til at de estimerte opsjonsprisene ikke sammenfalt med markedsprisene.

5.7.1.7 Valg av den initielle forwardprisen

Treet som er generert har tatt utgangspunkt i en gitt forwardkurve. Denne forwardkurven ga ikke informasjon om prisen på analysedatoen. Siden forwardprisen på analysedatoen teoretisk sett faller sammen med spotprisen, kunne spotprisen blitt brukt som initiell verdi. Det ble likevel valgt å bruke et gjennomsnitt av de syv første forwardprisene i kurven, da spotprisen for denne dagen kan inneholde støy i form av f.eks lite/mye handel på denne dagen.

5.7.2 Kritikk av metode

5.7.2.1 Kritikk av den valgte metode

Modellen som ligger til grunn for tregenereringen er en enfaktormodell, og tar derfor ikke hensyn til usikkerhet i likevektsnivået prisene faller tilbake til ved mean reversion og heller ikke at det ikke er korrelasjon i forwardpriser med ulik tid til levering. For å ta hensyn til disse egenskapene skulle det vært brukt en tofaktormodell.

Metoden til Clewlow og Strickland (1999) antar tidsuavhengig volatilitet, selv om dette er noe feilaktig. I kapittel 3 beskrives det at mest sannsynlig er volatiliteten tidsavhengig.

Historiske spotpriser viser at det er en viss sannsynlighet for at sprang i priser kan inntreffe. Denne modellen ser bort i fra denne egenskapen til strømprisene og dette er derfor en svakhet med modellen.

Driftsledet, $\mu(t)$, i modellen er varierende med tiden og slik blir sesongeffekten til prisene på strøm tatt hensyn til i den underliggende prismodellen. Dette gjør dermed at modellen involverer deterministiske ledd og dette er en styrke ved modellen. En annen styrke med modellen er at den tar hensyn til mean reversion, slik at tregenereringen blir mer realistisk i forhold til å bruke GBM eller andre metoder som gjelder for aksjepriser.

Forskjellen på forwards og futures er ikke tatt hensyn til i denne oppgaven. Ut i fra treet er det beregnet forwardpriser og opsjonspriser med forwardkontrakt som underliggende. Derimot er volatiliteten estimert på bakgrunn av ukesbasert tid til levering, som er en egenskap kun for futurekontrakter. Forwardkontrakter derimot, har standardiserte dager hvor leveringen starter for lengre perioder.

Metodene som er brukt for å beregne forwardpris er ikke spesielt kompliserte. Disse er basert på prosjektdeltagernes kunnskap og tanker, og kan følgelig være vanskelig å forklare. Dette er årsaken til at enkelte avsnitt i kapitel 5 kan virke noe innviklede.

5.7.2.2 Alternative metoder for å prise derivater

I dag finnes det ikke omfattende teori om pricing av kraftderivater. Det er derfor vanskelig å foreslå alternative metoder utenom Black76, som brukes på Nord Pool for pricing av opsjoner. Modellen som er bygget i denne rapporten gir resultater som er i noenlunde samsvar med markedsverdier. Innføring av to stokastiske faktorer, tidsavhengig volatilitet eller hensyn til ekstremverdier kan føre til at denne modellen blir enda mer representativ for den virkelige prosessen til strømpriser.

6 Konklusjon

Denne prosjektoppgaven har gitt utførerne en bred innsikt i oppbygning av kraftmarkedet og den typen derivater som bli handlet der. Samtidig har deltakerne gjennom utarbeidelsen av oppgaven fått en bred kunnskap om hvilke særegenskaper elektrisitet har og følgelig hvordan prisene på elektrisitet og kraftderivater skiller seg i forhold til priser i aksjemarkedet.

Etter å ha utviklet en opsjonsprisermodell basert på tregenerering, har deltakerne fått en forståelse for hvordan prising av derivater kan gjøres, i tillegg til å ha studert de metodene som brukes på Nord Pool. Dette har følgelig gitt en bred innsikt i selve prosessen til strømpriser, samt generering av priser innen finansiell handel.

7 Litteraturliste

Bjerksund, P., Rasmussen, H. og G. Stensland, Februar 2000, "Valuation and Risk Management In the Norwegian Electricity Market".

Bystrøm, Hans NE., November 2000, "The Hedging Performance of Electricity Futures on the Nordic Power Exchange Nord Pool".

Clelow, Les og Chris Strickland, 2000a, Energy Derivatives: Pricing and risk management, Lacima Publications, London, England.

Clelow, Les og Chris Strickland, Februar 2000b, Implementing derivatives models, John Wiley and Sons Ltd., West Sussex, England.

Clelow, Les og Chris Strickland, April 1999, "Valuing Energy Options in a One Factor Model Fitted to Forward Prices".

Deng, Shi-Jie, Johnson, Blake og Aram Sogomonian, 2001, "Exotic electricity options and the valuation of electricity generation and transmission assets", Elsevier Science.

Fleten, S.-E., Tomasgard, A. og Stein W. Wallace, 2001, "Produksjonsplanlegging og risikostyring i et deregulert kraftmarked med finansielle instrumenter", magma, årgang 4, Nr.5, Fagbokforlaget.

Herguera, Iñigo, Februar 2001, "Bilateral contracts and the spot market for electricity: Some observations on the British and the Nord Pool experiences", Elsevier Science Ltd.

Hjalmarsson, Erik, Juli 2000, "Nord Pool: A Power Market Without Market Power".

Høyland, Kjetil og Stein W. Wallace, Februar 2001, "Generating Scenario Trees for Multistage Decision Problems", Management Science, Vol. 47, No.2.

Hull, John C., 2000, Options, Futures, and Other Derivatives, 4th ed., Prentice-Hall International Inc, Upper Saddle River, NJ.

Knittel, Christopher R. og Michael R., Roberts, Juni 2001, "Financial Models of Deregulated Electricity Prices: An Application to the California Marketet".

Koekebakker, Steen, og Fridthjof, Ollmar, Oktober 2001, "Forward curve dynamics in the Nordic electricity market".

Lucia, Julio J. og Eduardo S. Schwartz, Mars 2001, "Electricity prices and power derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange".

Nord Pool, 2001A, "Clearing Services offered by Nord Pool".

Nord Pool, 2001B, "Det fysiske og finansielle markedet- handel og oppgjør", (kursmateriell).

Nord Pool, 2001B, "Derivatives Trade at Nord Pool's Financial Markets".

Nord Pool, 1999A, "Elopsjoner".

Nord Pool, 1998, "Eltermin, Det finansielle markedet".

Nord Pool, 1999B, "Security Calculation and settlement of Financial Power Contracts".

Nord Pool, 2001D, "The Nordic Power Market, Electricity Power Exchange across National Borders".

Nord Pool, 2001E, "The Nordic Spot Market: The world's first international spot power exchange".

Pilpovic, Dragana, 1998, Energy Risk: Valuing and Managing Energy Derivatives, McGraw-Hill, the US.

Schwartz, Eduardo S. og James E. Smith, Juli 2000, "Short-Term Variations and Long-Term Dynamics", Management Science, Vol.46, No.7.

Statistisk Sentralbyrå; www.ssb.no

Wangensteen, Ivar., vår 2001, SIE 10065 Kraftmarkeder, (Kompendium), NTNU.

8 Vedlegg A: Utledning av implisert spotprisprosess

Det er gitt i likning 5.7 at forwardkurven tilfredsstiller

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sigma \cdot e^{-\alpha(T-t)} dz(t)$$

Denne lognormale spesifikasjonen gir følgende løsning for forwardprisen:

$$F(t, T) = F(0, T) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma(u, T)^2 du + \int_0^t \sigma(u, T) dz(u)\right)$$

Siden spotprisen er gitt av forwardprisen ved å sette $T=t$, blir spotprisens prosess

$$S(t) = F(t, t) = F(0, t) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma(u, T)^2 du + \int_0^t \sigma(u, T) dz(u)\right)$$

Derivering gir:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left[\frac{\partial \ln F(0, t)}{\partial t} - \int_0^t \sigma(u, t) \frac{\partial \sigma(u, t)}{\partial t} du + \int_0^t \frac{\sigma(u, t)}{\partial t} dz(u) \right] dt + \sigma(t, t) \cdot dz(t)$$

Spesielt for enfaktormodellen til Clewlow og Strickland (1999) gjelder:

$$\sigma(t, T) = \sigma \cdot e^{-\alpha(T-t)}$$

$$\frac{\partial \sigma(t, T)}{\partial T} = -\alpha \cdot \sigma \cdot e^{-\alpha(T-t)}$$

La

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = y(t)dt + \sigma(t, t)dz(t)$$

der

$$y(t) = \left[\frac{\partial \ln F(0, t)}{\partial t} - \int_0^t \sigma(u, t) \frac{\partial(u, t)}{\partial t} du + \int_0^t \frac{\sigma(u, t)}{\partial t} dz(u) \right]$$

Det gir:

$$y(t) = \frac{\partial \ln F(0, t)}{\partial t} + \alpha \cdot \sigma^2 \int_0^t e^{-2\alpha(t-u)} du + \alpha \cdot \int_0^t \sigma \cdot e^{-\alpha(t-u)} dz(u)$$

fra likning 5.7 er det gitt at

$$\ln S(t) = \ln F(0, t) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 \cdot e^{-2\alpha(t-u)} du + \int_0^t \sigma \cdot e^{-\alpha(t-u)} dz(u)$$

som impliserer at

$$\alpha \cdot \int_0^t \sigma \cdot e^{-\alpha(t-u)} dz(u) = \alpha \cdot \left[\ln S(t) - \ln F(0, t) + \frac{1}{2} \cdot \int_0^t \sigma^2 \cdot e^{-2\alpha(t-u)} du \right]$$

Derfor er

$$y(t) = \frac{\partial \ln F(0, t)}{\partial t} + \alpha \cdot \sigma^2 \int_0^t e^{-2\alpha(t-u)} du - \alpha \cdot \left[\ln S(t) - \ln F(0, t) + \frac{1}{2} \cdot \int_0^t \sigma^2 \cdot e^{-2\alpha(t-u)} du \right]$$

Med

$$\int e^{-2\alpha(t-u)} du = \frac{1}{2\alpha} [1 - e^{-2\alpha}]$$

får man ved å stokke om på leddene i likningen over

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left[\frac{\partial F(0, t)}{\partial t} + \alpha (\ln F(0, t) - \ln S(t)) + \frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2\alpha}) \right] dt + \sigma dz(t)$$

9 Vedlegg B: Utledning av forwardkurven på tidspunkt t

$$F(t, T) = F(0, T) \cdot \exp \left[\frac{-1}{2} \int_0^t \sigma \cdot e^{-2\alpha(T-u)} du + \int_0^t \sigma \cdot e^{-\alpha(T-u)} dz(u) \right] \quad \text{likning B1}$$

og

$$\int_0^t \sigma^2 \cdot e^{-2\alpha(T-u)} du = \frac{\sigma^2}{2\alpha} \cdot e^{-2\alpha T} \cdot (e^{-2\alpha t} - 1) \quad \text{likning B2}$$

Likning 5.4 gir at

$$S(t) = F(0, t) \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 e^{-2\alpha(t-u)} du + \int_0^t \sigma \cdot e^{-\alpha(t-u)} dz(u) \right) \quad \text{likning B3}$$

Siden

$$\int_0^t \sigma \cdot e^{-\alpha(T-u)} dz(u) = \ln \left(\frac{S(t)}{F(0, t)} \right) + \frac{\sigma^2}{4\alpha} \cdot [1 - e^{-2\alpha t}] \quad \text{likning B4}$$

Ved å substituere

$$\int_0^t \sigma \cdot e^{-\alpha(T-u)} dz(u) = \int_0^t \sigma \cdot e^{-\alpha t} \cdot e^{\alpha u} dz(u) = \frac{e^{-\alpha T}}{e^{-\alpha t}} \cdot \int_0^t \sigma \cdot e^{-\alpha(t-u)} dz(u) \quad \text{likning B5}$$

fra likningen B5 :

$$\int_0^t \sigma \cdot e^{-\alpha(T-u)} dz(u) = e^{-\alpha(T-t)} \cdot \ln \left(\frac{S(t)}{F(0, t)} \right) + \frac{\sigma^2}{4\alpha} \cdot [1 - e^{-2\alpha t}] \quad \text{likning B6}$$

Ved å substituere likning B5 og B2 inn likning B1 fremkommer:

$$F(S(t), t, T) = F(0, T) \left(\frac{S(t)}{F(0, t)} \right)^{\exp[-\alpha(T-t)]} \exp \left[\frac{\sigma^2}{4\alpha} e^{-\alpha T} (e^{2\alpha t} - 1)(e^{-\alpha T} - e^{-\alpha t}) \right]$$

10 Vedlegg C: Bruk av Itos lemma

Med utgangspunkt i formelen

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left[\frac{\delta \ln F(0,t)}{\delta t} + \alpha (\ln F(0,t) - \ln S(t)) + \frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2\alpha t}) \right] dt + \sigma dz(t)$$

som gir

$$dS(t) = \left[\frac{\delta \ln F(0,t)}{\delta t} \cdot S(t) + \alpha \cdot S(t) \cdot (\ln F(0,t) - \ln S(t)) + S(t) \cdot \frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2\alpha t}) \right] dt + S(t) \cdot \sigma dz(t)$$

skal en finne en likning uttrykt ved $dx(t)$ der $x(t) = \ln S(t)$.

Dette kan gjøres ved å benytte Ito's lemma (Hull, 2000).

Anta at verdien av en variabel x følger Ito-prosessen

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

hvor dz er en Wiener prosess og a og b er funksjoner av x og t . x har en driftrate lik a og en varians lik b . Itos lemma sier at

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \cdot a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \cdot b^2 \right) dt + \left[\frac{\partial G}{\partial x} b \right] dz$$

G følger med det også en Ito prosess og har en driftrate som vist inni parentesen i likningen over. Variansen er følgende lik leddet i hakeparentes i andre ledd.

Med prosessen

$$dS = \mu \cdot Sdt + \sigma \cdot Sdz$$

hvor μ og σ konstant, er prosessen med Itos lemma med G og S gitt av

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \cdot \mu \cdot S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \right) dt + \left[\frac{\partial G}{\partial S} \cdot \sigma \cdot S \right] dz$$

Ved å sette $G = \ln S$

Gir det:

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S} \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \quad , \text{ og}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

Det gir videre:

$$\partial G = \left(\frac{S}{S} a - \frac{S^2}{S^2} \cdot b^2 \right) \cdot dt + b dz$$

med

$$a = \left[\frac{\delta \ln F(0,t)}{\partial t} + \alpha(\ln F(0,t) - x(t)) + \frac{\sigma^2}{4}(1 - e^{-2\alpha}) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \text{ og}$$

$$b = \sigma$$

Dette gir:

$$dx(t) = \left[\frac{\delta \ln F(0,t)}{\partial t} + \alpha(\ln F(0,t) - x(t)) + \frac{\sigma^2}{4}(1 - e^{-2\alpha}) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] dt + \sigma dz(t)$$

11 Vedlegg D: Utledning av endringsparameteren a_i

Fra likning 5.22 er

$$P(0, i\Delta t) \cdot F(0, i\Delta t) = \sum_j Q_{i,j} \cdot S_{i,j}$$

Ved å uttrykke spotprisen i form av $x_{i,j}$ gir det:

$$P(0, i\Delta t) \cdot F(0, i\Delta t) = \sum_j Q_{i,j} \cdot e^{x_{i,j}}$$

$$= \sum_j Q_{i,j} \cdot e^{(x'_{i,j} + a_i)}$$

$$P(0, i\Delta t) \cdot F(0, i\Delta t) = e^{a_i} \sum_j Q_{i,j} \cdot e^{x_{i,j}}$$

som gir

$$a_i = \ln \left(\frac{P(0, i\Delta t) F(0, i\Delta t)}{\sum_j Q_{i,j} e^{x_{i,j}}} \right)$$

12 Vedlegg E: Forklaring av regnearkene

E.1 Opsjonspriser

Regnearket ”Opsjonspriser” består av ni ark (work sheets). Det er disse som skal forklares i dette vedlegget.

Sigma_alfa

Viser regresjonsanalysen som har fremkommet etter å ha beregnet volatiliteten til de ulike tider til levering. For mer utregning av disse parameterne henvises til regnearket ”Volatilitet”.

Forwardpriser_03.10.01

Verdiene som fremkommer i dette arket er forwardpriser som har fremkommet av forwardkurven som er gjort glatte av Stein-Erik Fleten. De bakenforliggende verdiene for den glattede forwardkurven er hentet fra Nord Pool.

Forwardkurvene_våre

Viser en kurve som blir benyttet i hoveddokumentet. Kurven viser forventningsverdien for nodene $j=3$, $j=0$ og $j=-3$.

Opsjonspriser_Nord Pool

Dette er opsjonspriser som er hentet fra Nord Pool på 03.10.01 og brukes som markedsverdier og sammenligningsgrunnlag for prisene som er beregnet ut av modellen.

Initielt_tre

Viser treet både med initiell x' og endret x . De fargede boksene angir sannsynligheter for å komme inn i nodene disse står til venstre for. Forklaring av de ulike verdiene i nodene er forklart i arket.

Beregning_Stier

Viser utregning av metoden forklart i kap. 5.4.1.

Beregning_Ulik_t

Viser utregning av metoden forklart i 5.4.2

Opsjonspriser_Stier

Det er i dette kapitlet hovedresultatene fremkommer. Her beregnes opsjonsprisene på bakgrunn av den sti-avhengige-metoden ved hjelp av prosedyren gitt i kap 5.5.

Opsjonspriser_Ulik_t

Dette arket inneholder tilsvarende som Opsjonspriser_Stier, men tar i stedet utgangspunkt i ulik Δt -metoden.

E.2 Volatilitet**Beregning**

Det er her beregning av volatiliteten i ulike tider til levering blir gjort i henhold til kapitel 5.3.6.1. Alle vannrette prisrekker representerer en konstant tid til levering og volatiliteten per prisrekke er en input-verdi for regresjonsanalysen.

Regresjonsanalyse

Viser Excels egne beregninger for å finne en lineær funksjon som passer til logaritmen til volatiliteten som er fremkommet i regnearket "Beregning".

Input_regresjon

Figuren som brukes i teksten til å vise de ulike volatilitetene i sammenheng med dens tilhørende tid til levering blir laget, samt en antatt teoretisk volatilitetskurve.